

## Shell Model with anti-bound states Modelo de Capas con Estados Anti-ligados

R. Id Betan

*Departamento de Física y Química, FCEIA, UNR. IFIR. Avenida Pellegrini 250, 2000 Rosario, Argentina\**

R. J. Liotta

*Royal Institute of Technology, AlbaNova University Center, SE-10691, Stockholm, Sweden*

N. Sandulescu

*Institute of Physics and Nuclear Engineering, 76900 Bucharest, Romania*

T. Vertse

*Institute of Nuclear Research of the Hungarian Academy of Sciences, H-4001 Debrecen, Pf. 51, Hungary*

(Dated: November 4, 2005)

An unified shell model scheme to evaluate simultaneously the contributions of bound single-particle states, Gamow resonances, antibound (virtual) states and continuum complex scattering states is presented. The formalism could be very suitable to study processes occurring in the continuum part of the nuclear spectra

El espectro continuo de un sistema de muchos cuerpos presenta ciertas propiedades características de sistemas resonantes, como por ejemplo secciones eficaces con picos muy definidos a energías cercanas a la resonancia, o un cambio rápido en el desfase ("phase shift") a la energía de resonancia. Este estado resonante puede ser descrito, para resonancias angostas, aproximadamente por un vector de Gamow, esto es, un autovector generalizado del Hamiltoniano del sistema con energía compleja. Estas energías son polos de la extensión analítica de la matriz  $S$ , como también lo son las energías correspondientes a los estados ligados. Además de estos polos la matriz  $S$  tiene otros polos sobre el eje imaginario negativo. Los estados asociados con estos polos se los llama estados anti-ligados o estados virtuales. Cuando el polo está muy cerca del eje real produce efectos observables en la sección eficaz. En este trabajo mostramos como incluir tales estados en el modelo de capas y lo aplicamos a un sistema nuclear donde es conocido que tal efecto existe.

Keywords: anti-bound state, virtual state, resonance, shell model.  
estado anti-ligado, estado virtual, resonancia, modelo de capas

### I. INTRODUCCIÓN

Las nuevas instalaciones experimentales en el campo de la Física Nuclear consisten en dispositivos capaces de crear y acelerar haces de núcleos radiactivos. Esta nueva herramienta experimental ofrece la posibilidad de estudiar los núcleos cercanos a la línea de inestabilidad, llamados 'drip line nucleus' o 'exotic nucleus'.

Como una metodología en el avance del conocimiento los físicos teóricos buscan inspiración en los experimentos para crear sus modelos, al tiempo que los resultados teóricos guían a los físicos experimentales en la elección de experimentos que sean relevantes para el tema estudiado [1].

El conocimiento actual sobre los 'halos' nucleares indica que estos sistemas son producido por partículas que se mueven en estados cuya distribución radial se extiende más allá del núcleo. En sistemas esféricos esto implica que las partículas ocupan principalmente estados con

barreras centrífugas bajas, o sea estados  $s$  o  $p$ , los cuales pueden ser estados ligados, o resonantes, o unos estados muy raros, llamados antiligados. Por ejemplo el estado  $s$  podría ser anti-ligado, mientras el estado  $p$  podría ser una resonancia, que es lo que ocurre en el sistema  $^{11}\text{Li}$  [2].

En tales sistemas el espectro continuo de energía del sistema juega un rol fundamental a diferencia de los sistemas que son fuertemente ligados, donde el continuo no tiene ninguna relevancia. Para tratar sistemas de muchos cuerpos donde la influencia del continuo es importante es que fue desarrollado el '*Complex Shell Model*' [3]. Ésta es una representación que incluye al continuo explícitamente en la estructura del Modelo de Capas (resonancias, estados de scattering con energía compleja).

En este trabajo mostramos cómo incluir los estados anti-ligados (también llamados virtuales) en el '*Complex Shell Model*'. En la sección II describimos el formalismo mientras en la sección III lo aplicamos al núcleo  $^{11}\text{Li}$ . Finalmente en la sección IV damos algunas conclusiones.

---

\*Electronic address: idbetan@ifir.edu.ar

## II. FORMALISMO

El Modelo de Capas en el plano complejo ('Complex Shell Model') está basado en la representación de partícula simple que incluye estados con energía compleja, usualmente llamada representación de Berggren [4]. Esta representación está formada por un conjunto de estados discretos que son polos de la matriz de scattering  $S$  más un continuo de estados de scattering con energía compleja. En esta representación la relación de completitud para el espacio de coordenada radial tiene la forma [4]

$$\delta(r-r') = \sum_{n_b, n_a, n_d} u_{nlj}(r) u_{nlj}(r') + \int_L dk u_{lj}(k, r) u_{lj}(k, r') \quad (1)$$

La suma es sobre los estados ligados mas los polos en la segunda hoja de Riemann en el plano de energías (hoja no física) encerrados por el contorno  $L$ . Estos polos pueden ser resonancias y estados anti-ligados. Mientras la integral de línea es a lo largo de un contorno en el plano complejo de energía. La forma del contorno es arbitraria pero si uno quiere aislar los polos correlacionados de estados de dos partículas es conveniente tomar un contorno con forma rectangular [3]. La integral es discretizada de modo que la representación de partícula simple queda definida por el siguiente conjunto de estados discretos [5],

$$\phi_{nlj}(r) = \begin{cases} u_{nlj}(r) & \text{est. lig., anti-lig. y res.} \\ \sqrt{\Delta_n L_n} u_{lj}(k_n, r) & \text{'est. scattering'} \end{cases}$$

donde  $k_n$  y  $\Delta_n$  quedan definidos por el método de integración.  $L_n$  es la derivada del contorno en el plano complejo respecto a la variable que parametriza el contorno.

Después de completar la función de onda radial con la parte angular resulta la siguiente relación de completitud para funciones en el espacio de coordenadas (en tres dimensiones),

$$\sum_{nljm} \left[ \frac{\phi_{nlj}(r')}{r'} Y_{ljm}^*(\hat{r}') \right] \left[ \frac{\phi_{nlj}(r)}{r} Y_{ljm}(\hat{r}) \right] = \delta(\bar{r} - \bar{r}') \quad (2)$$

En esta representación los elementos de matriz tienen la característica que sólo en la parte angular el elemento "bra" es conjugado.

Los estados anti-ligados son el nuevo elemento agregado al 'Complex Shell Model' en este trabajo. Desde el punto de vista matemático ellos son soluciones de la ecuación de Schroedinger radial independiente del tiempo con condiciones de contorno saliente, con número de onda puramente imaginario y negativo  $k = -i|k|$  (es conveniente recordar que los estados ligados son definidos con la misma condición de contorno pero con número de onda

puramente imaginario y positivo). De este modo la energía resulta real y negativa (como los estados físicos ligados). Sin embargo, a diferencia de los estados ligados estas autofunciones (autovectores generalizados) divergen para valores grandes de la coordenada radial. Esto hace que los elementos de matriz que los involucran no estén bien definidos, por lo que debe introducirse alguna regularización en la definición de estos elementos de matriz. Desde el punto de vista físico uno podría pensar que son estados para los cuales la interacción no es suficientemente intensa como para ligarlos, pero si ellos se encuentran cerca del humbral del continuo de energía tienen un efecto observable debido a que las funciones de onda generalizadas muestran localización dentro del volumen nuclear, lo que influye los observables medidos debido a que tales observables correspondientes a procesos que ocurren dentro del núcleo.

Los estados de scattering (con energía real positiva) muestran la presencia de un estado anti-ligado cerca del humbral de energía a través de la localización de sus estados de baja energía (cerca del humbral de energía). Esta propiedad se puede entender considerando la forma de las funciones de onda de scattering en regiones de energías del continuo (o sea positivas) cerca del humbral, es decir cerca del estado anti-ligado. Migdal mostró que tales funciones tienen la forma

$$u_{lj}(k, r) \approx \sqrt{\frac{2k|k_0|a}{k^2 + |k_0|^2}} u_{lj}(|k_0|, r), \quad (3)$$

donde el estado anti-ligado corresponde al polo de la matriz  $S$  en  $k = -i|k_0|$ ,  $a$  es una constante que depende de la normalización de la función de onda de scattering  $u_{lj}(|k_0|, r)$ . Lo notable de esta ecuación es que muestra que tanto para un estado ligado  $k_0 > 0$  como para un estado anti-ligado  $k_0 < 0$  cerca del humbral de energía, la función radial de scattering con energías  $E = \hbar^2 k^2 / 2\mu$  ( $k$  real y positiva) alrededor de  $|E_0|$  están localizados. El mismo efecto puede ser observado en la Figura 1, donde la localización  $L(E)$  de los estados de scattering está definida como

$$L(E) = \int_0^b u_{s_{1/2}}^2(k, r) dr \quad (4)$$

donde  $b = 3.1$  fm y el cálculo fue realizado para el sistema  $^{10}\text{Li}$ .

En el marco del 'Complex Shell Model' uno puede estudiar en forma directa el papel jugado por los estados anti-ligados y no a través de los estados de scattering.

## III. APLICACIONES

Cómo aplicación mostraremos algunos resultados en el sistema  $^{11}\text{Li}$ , núcleo que está rodeado de un 'halo' nuclear, lo que implica que el continuo es relevante en este

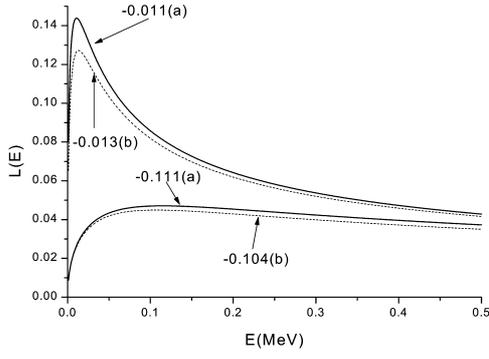


FIG. 1: Localización  $L(E)$ , Eq. 4, para la presencia de estados- $s$  anti-ligado (a) y ligado (b). Los números etiquetando las curvas son las energías en MeV.

sistema. Además el sistema con un nucleón menos, o sea  $^{10}\text{Li}$ , no es ligado y se piensa que existe un estado  $s$  anti-ligado (virtual) en él [6], a demás de la presencia de una resonancia.

La presencia del estado anti-ligado  $s$  en el núcleo  $^{10}\text{Li}$  tiene efecto sobre el núcleo  $^{11}\text{Li}$ . Este efecto es observado en la gran contribución que tiene la configuración donde ambas partículas están en el estado  $s$ , explicando de este modo lo que se conoce experimentalmente.

El espectro experimental del  $^{10}\text{Li}$  tiene dos estados no ligados de baja energía. Uno de ellos es un estado anti-ligado  $s_{1/2}$  con una energía alrededor de -25 keV y una resonancia  $p_{1/2}$  con energía alrededor de 240 keV [7, 8].

La interacción entre los dos neutrones de valencia en el carozo  $^9\text{Li}$  induce un estado ligado con energía alrededor de -295 keV [9].

El primer paso en el 'Complex Shell Model' es definir los estados de partícula simple, los que en este caso son los estados de neutrones en el sistema  $^{10}\text{Li}$ . Para simular el hecho experimental que el estado  $s$  se encuentra a menor energía que el estado  $p_{1/2}$  usamos diferente parametrización para el campo medio (que consiste en un Saxon-Woods más un término de interacción spin-órbita que contiene la derivada del Saxon-Woods) para diferente paridad  $(-1)^l$  del estado [10].

Los parámetros del campo medio son los siguiente:  $a = 0.67$  fm,  $r_0 = 1.27$  fm,  $V_0 = 50.55$  (39.97) MeV y  $V_{so} = 19.31$  MeV para  $l$  par (impar). Con estos parámetros uno halla los siguiente estados ligados:  $0s_{1/2}$  a -23.689 MeV y  $0p_{3/2}$  a -4.500 MeV formando el carozo  $^9\text{Li}$ . Los estados de valencia son: las resonancias  $0p_{1/2}$  a (0.240,-0.064) MeV,  $0d_{5/2}$  a (2.281,-0.362) MeV,  $0d_{3/2}$  a (6.613,-5.582) MeV y el estado anti-ligado  $1s_{1/2}$  a -0.025 MeV.

Los estados de scattering de las ondas parciales  $p$  y  $d$  son elegidos a lo largo del contorno mostrado en la Figura 2. Los estados de scattering para la onda parcial  $s$  fueron tomados, como muestra la Figura 3, de modo tal de incluir el estado anti-bound (el cual se encuentra sobre el semieje real negativo de la segunda hoja Riemann) en la representación.

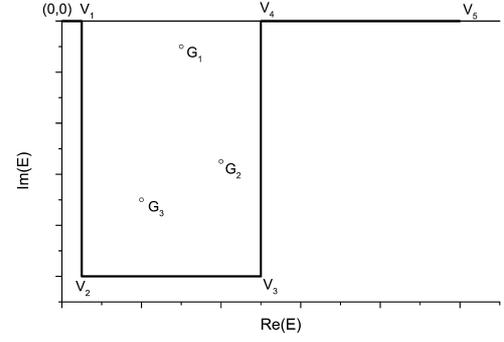


FIG. 2: Contorno para las ondas parciales  $p$  y  $d$ . Con  $V_1 = (0,0)\text{Mev}$ ,  $V_2 = (0,-0.7)\text{Mev}$ ,  $V_3 = (5,-0.7)\text{Mev}$ ,  $V_4 = (5,0)\text{Mev}$  y  $V_5 = (10,0)\text{Mev}$

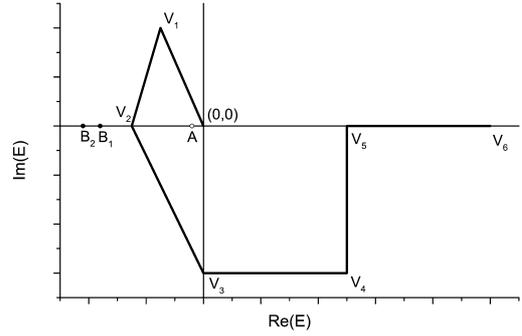


FIG. 3: Contorno para la onda parcial  $s$ . Con  $V_1 = (-0.025,0.1)\text{Mev}$ ,  $V_2 = (-0.05,0)\text{Mev}$ ,  $V_3 = (0,-0.7)\text{Mev}$ ,  $V_4 = (5,-0.7)\text{Mev}$ ,  $V_5 = (5,0)\text{Mev}$  y  $V_6 = (10,0)\text{Mev}$ .

El número de estados de scattering fue el siguiente: 26 estados para la onda parcial  $p_{1/2}$ , 40 para  $d_{5/2}$ , 52 para  $s_{1/2}$ , 16 para  $p_{3/2}$  y 18 para  $d_{3/2}$ .

La base de estados de dos partículas fue construida tomando todos los pares ordenados posibles formados a partir de la base compleja de una partícula [11–13]. La interacción entre las partículas de valencia fue tomada como separable  $\langle \vec{k}l; \alpha | V | ij; \alpha \rangle = -G_\alpha f_\alpha(kl) f_\alpha(ij)$ , donde  $G_\alpha$  es la intensidad de la interacción.

$$-\frac{1}{G_\alpha} = \sum_{i \leq j} \frac{f_\alpha^2(ij)}{\omega_\alpha - \epsilon_i - \epsilon_j} \quad (5)$$

donde  $\omega_\alpha$  son las energías correlacionadas de dos partículas. El factor de forma de la fuerza separable fue definido como la derivada del Saxon-Woods con los siguientes parámetros:  $R' = 4.5$  fm y  $a' = 1.5$  fm. La intensidad de la interacción  $G_0$  fue elegido de modo de reproducir el estado ligado de dos partículas a la energía -295 keV. De lo cual resulta  $G_0 = 15.3 \text{ MeV}$ .

Tomar como contorno el eje real para todas las ondas parciales (representación standard de la Mecánica Cuántica) implica que la representación de una partícula está formada sólo por estados de scattering (con energía

TABLE I: Contribuciones parciales y totales a la norma del estado fundamental

	$(s_{1/2})^2$	$(p_{1/2})^2$	$(d_{5/2})^2$
pole-pole	(2.960, -0.001)	(0.583, -0.195)	(0.080, 0.015)
pole-scat.	(-7.825, 0.003)	(-0.145, 0.210)	(-0.017, -0.016)
scat.-scat.	(5.335, -0.002)	(0.002, -0.015)	(-0.001, 0.002)
<b>total</b>	<b>(0.470, 0.000)</b>	<b>(0.440, 0.000)</b>	<b>(0.062, 0.000)</b>

real), esto es, no contiene ningún estado ligado (porque el sistema menos un nucleón no es ligado). Tomando ésta como representación uno encuentra que el estado fundamental está formado en un 47 % por estados de onda parcial  $s$ , un 46 % por estados de onda parcial  $p$  y un 7 % por estados de onda parcial  $d$  [14, 15]. Las mayores contribuciones a la función de onda viene por estados donde ambas partículas se encuentran en estados de scattering  $p_{1/2}$  con energía cercana a 480 keV (esto es aproximadamente dos veces la energía de la resonancia  $0p_{1/2}$ ) y configuraciones donde ambas partículas se encuentran en estados de scattering con onda parcial  $s_{1/2}$  con energías cercanas al umbral de energía (esto es aproximadamente dos veces la energía del estado anti-ligado  $s_{1/2}$ ).

Tomando como representación los estados de energía compleja con los contornos de las Figuras 2 y 3, con el valor de  $G_0$  hallado en la representación real, encontramos el estado fundamental a la misma energía y con la misma distribución total para cada onda parcial, pero con el agregado que el formalismo nos permite ver, para cada onda parcial, las contribuciones debido a configuraciones donde una partícula se encuentra en un estado discreto y la otra en el continuo, o configuraciones donde ambas partículas están en estados discretos o del continuo. La Tabla I muestra estas contribuciones para el estado fundamental.

Las amplitudes de configuraciones donde al menos una de las partículas está en el continuo depende del contorno elegido y por lo tanto no tiene ningún significado físico, mientras las amplitudes donde ambas partículas se encuentran en estados discretos (estado resonante o anti-ligado) no depende del contorno, pero no necesariamente tienen significado físico. Para resonancias cuya parte real de la energía es mucho mayor que su parte imaginaria, uno encuentra que esta amplitud es prácticamente real y uno podría asignarle el significado físico estandar de amplitud de probabilidad. Para configuraciones donde ambas partículas están en el estado anti-ligado, esta amplitud no tiene ningún significado físico y su valor tan grande se explica en la importancia de las configuraciones donde al menos una partícula está en el continuo (este efecto no ocurre con las resonancias). De todos modos la suma de todas las configuraciones posible para una dada onda parcial no depende del contorno porque tiene el significado físico estandar de la Mecánica Cuántica de amplitud de probabilidad para la dada onda parcial.

Este formalismo permite ver el movimiento de los polos del sistema interactuante como función de la intensidad

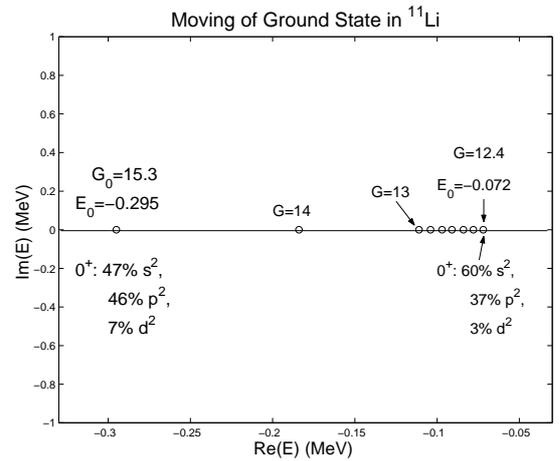


FIG. 4: Movimiento del estado fundamental como función de la interacción

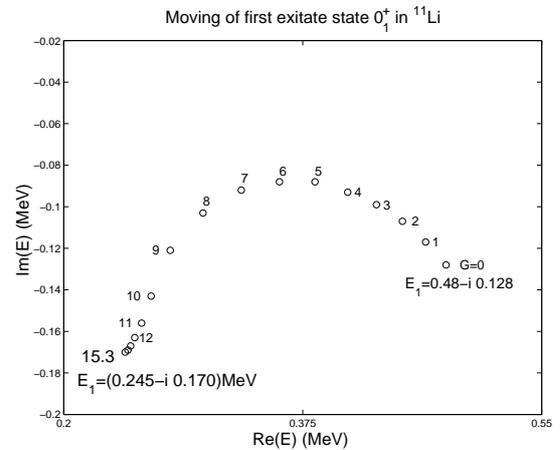


FIG. 5: Movimiento del primer estado excitado  $0_2^+$  como función de la interacción.

de la interacción. En la Figura 4 mostramos cómo se mueve el estado fundamental  $0_1^+$  al incrementar la interacción.

Debido al corte en el plano de energía de dos partículas no es posible observar (en la hoja física) el estado fundamental para intensidades menores a aquéllas que pone al estado en la hoja física. Esto ocurre para intensidades mayores que  $G = 12.4$  MeV, para la cual la energía es  $E_0 = -72$  KeV. [16]. Para este valor de energía la función de onda tiene 60% de onda parcial  $s$ , 37% de onda parcial  $p$  y 3% de onda parcial  $d$ . A partir de aquí, al incrementar  $G$  la contribución de la onda parcial  $s$  decrece al tiempo que crece la correspondiente a  $p$ , hasta llegar al valor experimental ( $G = 15.3$  MeV) mostrado en la Tabla I.

La Figura 5 muestra lo propio para el primer estado excitado  $0_2^+$  construido a orden cero a partir de la configuración donde ambas partículas se encuentran en el estado resonante ( $0p_{1/2}$ )<sup>2</sup>.

A medida que la intensidad aumenta el estado reso-

TABLE II: Contribuciones parciales a la norma del primer estado excitado en configuraciones  $(p_{1/2})^2$ . Las contribuciones donde ambas partículas están en el continuo  $(p_{1/2})^2$  contribuyen a la norma con valores del orden de  $10^{-3}$ . Las contribuciones de las otras ondas parciales son también menores.

G	Pole-Pole	Pole-Scat.
3	(1.01,0.00)	(0.00,-0.01)
7	(1.07,0.07)	(0.02,-0.05)
10	(0.71,0.23)	(0.36,-0.07)
11	(0.49,0.04)	(0.57,0.08)
13	(0.18,-0.03)	(0.85,0.08)
$G_0$	(0.09,-0.01)	(0.93,0.04)

nante de dos partículas se hace más angosto, pero llega un valor de la intensidad a partir del cual ( $G = 6MeV$ ) las configuraciones donde una de las partículas está en el continuo se hace relevante y la resonancia se ensancha. Este estado tiene la particularidad de estar formado casi el 100 % por configuraciones donde ambas partículas se encuentran en el estado de onda parcial  $p_{1/2}$  en el rango de la intensidad estudiado. Sólo cambia la contribuciones relativas de configuraciones donde ambas partículas están en el estado discreto, una en el estado discreto y la otra en el continuo o ambas en el continuo. Este efecto es mostrado en Tabla II. Configuraciones donde ambas partículas están en el continuo contribuyen a la norma con valores del orden de  $10^{-3}$ .

La energía del primer estado excitado  $^+0_2$  correspondiente a la intensidad 'física'  $G_0 = 15.3MeV$  es  $E_1 = (0.245 - i0.170)MeV$  y es principalmente construida ( $\approx 93\%$ ) por configuraciones donde una de las partículas se

halla en el continuo y la otra en la resonancia.

#### IV. CONCLUSIONES

Excepto el hecho de que todas las integrales que involucran polos de la matriz  $S$  que no correspondan a estados ligados deban regularizarse, el 'Complex Shell Model' es una estructura que permite tratar los estados resonantes y los estados anti-ligados del mismo modo que los estados ligados. La selección de tales estados se hace a través del contorno en el plano complejo, lo cual da arbitrariedad de incluir aquellos que uno considera relevantes para el problema. Sin importar que contorno elige uno siempre trata con un sistema completo. Esto implica que todas las cantidades físicas calculadas en esta representación tendrán valores reales aunque los elementos parciales sean complejos. El formalismo permite un análisis directo de las contribuciones debido a configuraciones donde ambas partículas están en estados discretos o ambas en estados del continuo, o una en el discreto y la otra en el continuo. Una conclusión del sistema tratado es que al incluir los estados anti-ligados en la representación no es posible despreciar el continuo, cosa que es posible para algunas resonancias (esto es, para resonancias angostas omitir el continuo no cambia radicalmente los resultados).

Este trabajo fue financiado parcialmente por FOMEC (Argentina), Fundación Antorchas (Argentina), por 'the Hungarian OTKA fund Nos. T37991 and T29003' y por el 'Swedish Foundation for International Cooperation in Research and Higher Education (STINT)'.

- 
- [1] B. Jonson, 'Light dripline nuclei', Physics Reports **389**, 1 (2004).
  - [2] M. Zhukov, B. Danilin, D. Fedorov, J. Bang, I. Thompson, 'Bound state properties of Borromean halo nuclei:  $^6He$  and  $^{11}Li$ ', Physics Reports **231**, 151 (1993).
  - [3] R. Id Betan, R. J. Liotta, N. Sandulescu and T. Vertse, 'Two-Particle Resonant States in a Many-Body Mean Field', Phys. Rev. Lett. **89**, 042501 (2002).
  - [4] T. Berggren, 'On the use of resonant states in eigenfunction expansions of scattering and reaction amplitudes', Nucl. Phys. **A 109**, 265 (1968).
  - [5] R. J. Liotta, E. Maglione, N. Sandulescu and T. Vertse, 'A representation to describe nuclear processes in the continuum', Phys. Lett. **B 367**, 1 (1996).
  - [6] I. J. Thompson and M. V. Zhukov, 'Effects of  $^{10}Li$  virtual states on the structure of  $^{11}Li$ ', Phys. Rev. C **49**, 1904 (1994).
  - [7] H. G. Bohlen et al, 'Study of weakly bound and unbound states of exotic nuclei with binary reactions', Nucl. Phys. **A616** 254c (1997).
  - [8] www.tunl.duke.edu, Preliminary version on 'Energy Levels of Light Nuclei A=10'.
  - [9] G. F. Bertsch and H. Esbensen, 'Pair correlations near the neutron drip line', Ann. of Phys. **209**, 327 (1991).
  - [10] H. Esbensen, G. F. Bertsch and K. Hencken, 'Application of contact interactions to Borromean halos', Phys. Rev. C **56**, 3054 (1997).
  - [11] R. Id Betan, R. J. Liotta, N. Sandulescu and T. Vertse, 'Shell model in the complex energy plane and two-particle resonances', Phys. Rev. C **67**, 014322 (2003).
  - [12] N. Michel, W. Nazarewicz, M. Ploszajczak and K. Benhaceur, 'Gamow Shell Model Description of Neutron-Rich Nuclei', Phys. Rev. Lett. **89**, 042502 (2002).
  - [13] N. Michel, W. Nazarewicz, M. Ploszajczak and J. Okolowicz, 'Gamow shell model description of weakly bound nuclei and unbound nuclear states', Phys. Rev. C **67**, 054311 (2003).
  - [14] Y. Suzuki, R. G. Lovas, K. Yabana and K. Varga, 'Structure and Reactions of Light Exotic Nuclei', Taylor and Francis, London, 2003.
  - [15] K. Varga, Y. Suzuki, R. G. Lovas, 'Microscopic multi-cluster model of  $^{9,10,11}Li$ ', Phys. Rev. C **66**, 041302(R) (2002).
  - [16] Para esta figura el vértice  $V_2$  en la figura 3 vale  $V_2 = (-0.030, 0)MeV$