ISSN (EN LINEA): 1850 - 1158

FORMALISMO CANÓNICO COVARIANTE EN GRAVITACIÓN TOPOLÓGICA MASIVA (2+1). FORMALISMO DE SEGUNDO ORDEN. CUANTIFICACIÓN CANÓNICA

CANONICAL COVARIANT FORMALISM IN TOPOLOGICALLY MASSIVE (2+1) GRAVITY. SECOND ORDER FORMALISM. CANONICAL QUANTIZATION .

C.L. Abecasis[1], C.E. Repetto[1,2 *] y O.P. Zandron[1,2]

[1] Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura – UNR,
Instituto de Física Rosario – CONICET
27 de Febrero 210 bis - (2000) -Rosario - Argentina
e-mail: repetto@ifir.edu.ar

Se estudia un modelo de gravitación topológica masiva (2+1) a partir del interés que despierta el hecho que este modelo corresponde a una teoría dinámica y renormalizable. Para ello, utilizando el formalismo canónico covariante, se halla la estructura de vínculos de la teoría. Posteriormente, pasando al formalismo de segundo orden que contiene términos en altas derivadas, se encuentra el Hamiltoniano total, generador de las evoluciones temporales de funcionales genéricos. Finalmente, se lleva a cabo la cuantificación canónica.

Palabras clave: Formalismo Hamiltoniano, Gravedad, Cuantificación Canónica

A topologically massive (2+1) gravity model is studied. This is of interest because the model correspond to one dynamical and renormalisable theory . The first and second order canonical formalism is constructed. The set of constraints is analysed and the total Hamiltonian, generator of time evolution of generic functionals is given. Finally, the canonical quantization is carried out.

Keywords: Hamiltonian Formalism, Gravity, Canonical Quantization

I. INTRODUCCIÓN

Nuestro objetivo es estudiar un modelo de gravitación topológica masiva (2+1) a partir del interés que despierta el hecho que este modelo corresponde a una teoría dinámica y renormalizable. El propósito del presente trabajo es dar un marco geométrico alternativo para este modelo, desde el punto de vista de las variedades con estructura de grupo. En este sentido, se desarrolla el formalismo canónico exterior con el objeto de facilitar una futura cuantificación en el marco canónico. La inclusión del término de altas derivadas y la posterior extensión supersimétrica, mejorará la convergencia de la teoría.

El modelo en el formalismo Lagrangiano de primer orden se describe introduciendo un conjunto de campos dinámicos 1-formas $\mu^{\Sigma} \equiv \left(V^{a}, \omega^{ab}\right)$, donde el índice compuesto $\Sigma \equiv (a, ab)$ toma valores en el rango vectorial *a* y tensorial *ab*. Estos campos de gauge V^{a} y ω^{ab} son el dreibein y la conexión espinorial de Lorentz. En este formalismo $d\mu^{\Sigma}$ juega el rol de velocidades.

Las 2-formas curvaturas correspondientes a los anteriores campos son $R^{\Sigma} \equiv \left(R^{a}, R^{ab}\right)$ y se escriben como:

$$R^{a} = dV^{a} + \omega^{ab} \wedge V_{b} \tag{1.1}$$

$$R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^{ac} \wedge \omega_{c}^{\ b} \tag{1.2}$$

El Lagrangiano de partida es:

$$\begin{aligned} L = {} & R^{ab} \wedge V^{c} \varepsilon_{abc} + d\omega^{ab} \wedge \omega_{ab} \\ & -\frac{2}{3}\omega^{ab} \wedge \omega_{b}^{\ c} \wedge \omega_{ca} \end{aligned} \tag{1.3}$$

que difiere en una derivada total del siguiente:

$$\begin{aligned} L = {} & dV^{a} \wedge \omega^{bc} \varepsilon_{abc} + d\omega^{ab} \wedge \omega_{ab} - \frac{2}{3}\omega^{ab} \wedge \omega_{b}^{\ c} \wedge \omega_{ca} \\ & + \omega^{ad} \wedge \omega_{d}^{\ b} \wedge V^{c} \varepsilon_{abc} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Luego, el momento canónico conjugado π_{Σ} de las variables de campo μ^{Σ} se obtiene como variación funcional de la densidad Lagrangiana de la teoría con respecto a las velocidades $d\mu^{\Sigma}$:

$$\pi_{\Sigma} = \frac{\partial L}{\partial\left(d\mu^{\Sigma}\right)} \tag{1.5}$$

En función del Lagrangiano (1.4), quedan definidas las siguientes 1-formas momento:

$$\pi_a = \omega^{bc}\varepsilon_{abc} \quad (1.6)$$

$$\pi_{ab} = \omega_{ab} \quad (1.7)$$

resultando de esta manera los siguientes vínculos primarios de la teoría (que son relaciones entre las variables campos y momentos, e independientes de las velocidades):

$$\Phi_a = \pi_a - \omega^{bc}\varepsilon_{abc} \approx 0 \quad (1.8)$$

$$\Phi_{ab} = \pi_{ab} - \omega_{ab} \approx 0 \quad (1.9)$$

donde el símbolo $\approx$ implica débilmente cero[1].

Por otro lado, es necesario definir una operación adecuada entre formas, con la capacidad de reemplazar el rol de los corchetes clásicos de Poisson, y con la ayuda de la cual podremos escribir las ecuaciones de movimiento Hamiltonianas. Así es como se introduce la operación corchetes entre formas[2], al que se simboliza como $(\ , \ )$.

Puede demostrarse que los vínculos primarios son de segunda clase, puesto que:

$$\left(\Phi_a , \Phi_{bc}\right) \neq 0 \quad (1.10)$$

A partir del Lagrangiano, el Hamiltoniano canónico se puede escribir como:

$$H_{can} = d\mu^{\Sigma} \wedge \pi_{\Sigma} - \mathrm{L} \quad (1.11)$$

que aplicado a este modelo da como resultado:

$$H_{can} = -\omega^{ad} \wedge \omega_d{}^b \wedge V^c\varepsilon_{abc} + \frac{2}{3}\omega^{ab} \wedge \omega_b{}^c \wedge \omega_{ca} \quad (1.12)$$

Luego, el Hamiltoniano total se obtiene sumándole al canónico una combinación lineal de los vínculos primarios:

$$H_T = H_{can} + \Lambda^{\Sigma} \wedge \Phi_{\Sigma} \quad (1.13)$$

resultando:

$$\begin{aligned} H_T = &-\omega^{ad} \wedge \omega_d{}^b \wedge V^c\varepsilon_{abc} + \frac{2}{3}\omega^{ab} \wedge \omega_b{}^c \wedge \omega_{ca} \\ &+\Lambda^a \wedge \left(\pi_a - \omega^{bc}\varepsilon_{abc}\right) + \Lambda^{ab} \wedge \left(\pi_{ab} - \omega_{ab}\right) \end{aligned} \quad (1.14)$$

donde $\Lambda^{\Sigma} \equiv \left(\Lambda^a , \Lambda^{ab}\right)$ son los multiplicadores de Lagrange.

Ahora es necesario introducir la ecuación de movimiento fundamental del formalismo; en analogía con la mecánica clásica se introduce la siguiente ecuación que involucra corchetes entre formas:

$$dA = \left(A, H_T\right) + \partial A \quad (1.15)$$

donde $A = A(\mu, \pi)$ es un polinomio genérico en las variables canónicas μ^{Σ} y π_{Σ}. El operador ∂ [2,3] actúa no trivialmente sólo sobre campos externos. En consecuencia, para las variables canónicas se tiene:

$$\partial\mu^{\Sigma} = \partial\pi_{\Sigma} = 0 \quad (1.16)$$

y lo mismo ocurre para los vínculos:

$$\partial\Phi_{\Sigma} = 0 \quad (1.17)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (1.15) puede escribirse

$$d\mu^{\Sigma} = \left(\mu^{\Sigma} , H_T\right) \quad (1.18)$$

y reemplazando el Hamiltoniano total a partir de la expresión (1.14), por cálculo directo se llega al siguiente resultado:

$$\Lambda^{\Sigma} = d\mu^{\Sigma} \quad (1.19)$$

Luego es necesario probar si es que en la teoría existen vínculos secundarios: para ello se impone la condición de consistencia sobre los vínculos primarios. A partir de la ecuación (1.15) para Φ_{Σ} se impone la condición

$$d\Phi_{\Sigma} = \left(\Phi_{\Sigma} , H_T\right) \approx 0 \quad (1.20)$$

donde fue considerada la ecuación (1.17).

Calculando explícitamente los corchetes entre formas que aparecen en (1.20) para los vínculos primarios de la teoría (1.8) y (1.9), resulta:

$$d\Phi_a = -R^{bc}\varepsilon_{abc} + \left(\Phi_a , \Lambda^{\Sigma}\right) \wedge \Phi_{\Sigma} \quad (1.21)$$

$$d\Phi_{ab} = -2R_{ab} - R^c\varepsilon_{abc} + \left(\Phi_{ab} , \Lambda^{\Sigma}\right) \wedge \Phi_{\Sigma} \quad (1.22)$$

donde en forma general

$$d\Phi_{\Sigma} = -\left[\text{ec. de movimiento}\right] + \left(\Phi_{\Sigma} , \Lambda^{\mathrm{A}}\right) \wedge \Phi_{\mathrm{A}} \quad (1.23)$$

Puesto que $\left(\Phi_{\Sigma} , \Lambda^{\mathrm{A}}\right) \wedge \Phi_{\mathrm{A}}$ son términos débilmente cero, las ecuaciones (1.21) y (1.22) implican que la teoría no contiene vínculos secundarios.

II. DESCOMPOSICIÓN ESPACIO-TIEMPO

En el formalismo canónico covariante CCF las pseudoconecciones 1-formas μ^{Σ} están definidas en toda la variedad supergrupo G y pueden ser descriptas en la base dx^M en términos de sus componentes holonómicas como sigue:

$$\mu^{\Sigma} = \mu^{\Sigma}_M \, dx^M \quad (2.1)$$

donde dx^M son las diferenciales de los parámetros del grupo en la variedad G. Realmente la 1-forma μ^{Σ} debe ser conocida en la variedad cociente (superespacio físico). Estas son las formas reducidas[2], y ellas pueden ser extendidas naturalmente a toda la variedad grupo a través de las transformaciones de gauge H [4]. Entonces para relacionar el CCF con el CVF, se trabajará con formas reducidas definidas sobre la variedad M., las cuales pueden ser escritas en la base holonómica, así:

$$\mu^{\Sigma} = \mu^{\Sigma}_{\nu} dx^{\nu}, \quad \nu = 0,1,2 \quad y \quad \Sigma = (ab, a, \alpha, A) \quad (2.2)$$

Adicionalmente se considerarn campos y formas definidos sobre una hipersuperficie de tipo espacial de dos dimensiones y $x^0 = t = t^0$.

Con este propósito se debe considerar el mapeo inyectivo $\chi : \Sigma \to M$. Entonces, el pullback asociado actúa sobre cualquier forma haciendo $t = t^0$ y $dt = 0$.

Se detalla la notación: se usan índices griegos $\mu, \nu, \rho, \dots$ para tensores espacio-tiempo (índices de universo). Índices latinos *a, b, c,* .... para el espacio tangente (índices de Lorentz) e índices latinos *i, j, k,* ... = 1, 2 para indicar componentes espaciales.
Para la descomposición espacio-tiempo en *M* se sigue Ref. 5. Se denominan a N_i y $N^{\perp}$ las funciones "shift" y "lapse", respectivamente, las cuales determinan las componentes del tensor métrico 3-dimensional $^{(3)}g_{\mu\nu}$.
Un vector arbitrario A^a puede ser descompuesto como:

$$A^a = A^{\perp} n^a + A^i L_i^a \tag{2.3}$$

donde la normal a la superficie n_a y el dreibein se definen respectivamente como sigue: $n_a = n^{\mu} L_{a\mu}$ y ${}^3L_a^i = {}^2L_a^i + \left(N^{\perp}\right)^{-1} N^i n_a$.
Otra cuestión importante de remarcar es que en el formalismo CVF la componente temporal del momento canónico se hace cero naturalmente, mientras que en el formalismo CCF, esto no ocurre.
El punto de partida para relacionar el formalismo CCF con el CVF es reescribir en componentes todas las cantidades que en el formalismo inicial estaban escritas en lenguaje de formas.
El primer paso es considerar la ecuación (1.1) y poder escribir la conexión espinorial en función del vierbein $\omega^{ab} = \omega^{ab}(V)$:

$$\begin{aligned}\omega_{\mu ab}(V) &= \frac{1}{2} L_a^{\nu} \left(\partial_{\mu} L_{\nu b} - \partial_{\nu} L_{\mu b}\right) \\ &-\frac{1}{2} L_b^{\nu} \left(\partial_{\mu} L_{\nu a} - \partial_{\nu} L_{\mu a}\right) \\ &-\frac{1}{2} L_a^{\rho} L_b^{\sigma} \left(\partial_{\rho} L_{\sigma c} - \partial_{\sigma} L_{\rho c}\right) L_{\mu}^c\end{aligned} \tag{2.4}$$

Cuando se reemplace esta expresión en la ecuación del Lagrangiano (1.4) en componentes, aparecerán altas derivadas temporales, por lo que es necesario introducir la transformación de Ostrogradski, que consiste en redefinir como nuevos campos L_{μ} y $\dot{L}_{\mu}$. A partir de éstos, se definen los momentos de la siguiente manera:

$$L_{\mu} \to P^{(1)\mu}_{\ \ c} = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial L_{\mu}^c} - \partial_{\nu} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\left(\partial_{\nu} \dot{L}_{\mu}^c\right)} \tag{2.5}$$

$$\dot{L}_{\mu} \to P^{(2)\mu}_{\ \ c} = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\left(\partial_0 \dot{L}_{\mu}^c\right)} \tag{2.6}$$

La componente temporal de (2.6) es cero. Junto a ésta, también generan vínculos la componente temporal de (2.5) y la espacial de (2.6), mientras que la componente espacial de (2.5) no genera vínculo por depender de las velocidades.

III. EL HAMILTONIANO Y LOS VÍNCULOS DE PRIMERA CLASE

A continuación, partiendo del Hamiltoniano total (1.14) se lleva a cabo su descomposición en un conjunto de vínculos de primera clase en un formalismo de segundo orden. De esta manera:

$$\int H_T = \int dx^0 \wedge \tilde{\mathrm{H}} \tag{3.1}$$

donde el Hamiltoniano $\tilde{\mathrm{H}}$ está dado por:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathrm{H}} &= \int \mu_0^{\Sigma}\, \mathrm{H}_{\Sigma}(x)\, d^3x = \\ &= \int [L_0^{\ a} \mathrm{H}_a(x) + \frac{1}{2} \omega_0^{\ ab} \mathrm{H}_{ab}(x)]\, d^3x\end{aligned} \tag{3.2}$$

donde μ_0^{Σ} son las componentes temporales de los campos 1-formas μ^{Σ}, y:

$$\mathrm{H}_a(x) = -R^{bc} \varepsilon_{abc} - \omega_a^{\ b} \wedge \psi_b \approx 0 \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_{ab} &= -4R_{ab} - 2R^c \varepsilon_{abc} + (\psi_a \wedge V_b - \psi_b \wedge V_a) \\ &-2(\omega_a^{\ c} \wedge \psi_{cb} - \omega_b^{\ c} \wedge \psi_{ca})|_{\Sigma} \approx 0\end{aligned} \tag{3.4}$$

donde quedan definidas en forma natural las cantidades M_{ab} antisimétricas y débilmente cero

$$M_{ab} d^3x \equiv \psi_a \wedge V_b - \psi_b \wedge V_a \approx 0 \tag{3.5}$$

Estas cantidades son funcionales de ψ_a y son vínculos primarios, y además son los generadores del grupo de Lorentz local de la teoría.

IV. CUANTIFICACIÓN CANÓNICA. CORCHETES DE DIRAC

En el primer orden del CCF todos los vínculos primarios son de segunda clase. Es bien conocido[1,6,7] que los vínculos segunda clase no pueden ser interpretados como generadores de la simetría y deben ser eliminados de la teoría. Esto se logra utilizando los corchetes de Dirac, los cuales se obtienen a partir de vínculos segunda clase Ω_{Σ}, definidos por:

$$\left[F, G\right]^* = \left[F, G\right] - \left[F, \Omega_{\Sigma}\right] C^{\Sigma\Lambda} \left[\Omega_{\Lambda}, G\right] \tag{4.1}$$

donde $C^{\Sigma\Lambda}\left[\Omega_{\Lambda}, \Omega_{\theta}\right] = \delta^{\Sigma}{}_{\theta}$. Los índices Σ, Λ, θ son compuestos y Ω_{Σ} indica todos los posibles vínculos segunda clase.
Algunas propiedades importantes de los corchetes de Dirac:
1) Si los funcionales *F* y *G* son primera clase, luego:

$$\left[F, G\right]^* = \left[F, G\right] \tag{4.2}$$

En particular para el Hamiltoniano, se tiene:

$$\left[F, H\right]^* = \left[F, H\right] \tag{4.3}$$

Esto significa que algunas ecuaciones de movimiento pueden ser obtenidas usando los corchetes de Poisson o de Dirac. Así, la evolución temporal de cualquier funcional *F* de variables canónicas, se obtiene mediante:

$$dF/dt = \left[F, H\right]^* \tag{4.4}$$

2) Para cualquier funcional *F* de variables canónicas

$$\left[\Omega_{\Sigma}\,, F\right]^{*} = 0 \qquad (4.5)$$

Así, se obtiene un conjunto $\Omega_{\Sigma} = 0$ evaluando los corchetes de Dirac.

Para computar los corchetes de Dirac $\left[F\,, G\right]^{*}$, se debe primero obtener el conjunto de vínculos segunda clase Ω_{Σ} considerando la restricción a Σ de los vínculos que se desprenden de (2.5) y (2.6).

Se dará continuidad con la versión supersimétrica de la teoría con la intención de corroborar la mejoría de la convergencia. Se avanzará en la renormalización, para lo cual se harán los cálculos de diagramas a un loop; los resultados se presentarán en un próximo trabajo.

Referencias

1- P.A.M. Dirac, Can. J. Math 2, 129 (1950); Lectures on Quantum Mechanics (New York: Academic)

2- A. D`Adda, J.E. Nelson and T. Regge, Ann Phys. (NY) 165, 384 (1985).

3- A. Foussats and O.S. Zandron, Class. Quant. Grav. 5, 605 (1988).

4- Y. Ne'eman and T. Regge, Phys.Lett. (NY) 74B, 31 (1978).

5- R. Arnowitt, S. Deser and C.W. Misner, In Gravitation: An Introduction to Current Research, edited by L. Witten (NY) (1982).

6- J.E. Nelson and C. Teitelboim, Phys. Lett. 69B, 81 (1977); Ann. Phys. 116, 1 (1978).

7- K. Sundermeyer, "Constrained Dunamics", Springer-Verlag, NY (1982) .