

# ENGANCHE EN FASE DE LASERES POR INYECCION EXTERNA VARIABLE EN EL TIEMPO

R.C.Buceta

*Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Mar del Plata, Funes 335°, 7600 Mar del Plata.*

M.S.Torre, H.F.Ranea Sandoval

*Instituto de Física Arroyo Seco, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, 7000 Tandil.*

Analizamos un sistema dinámico no lineal sujeto a un forzado periódico en presencia de ruido. En particular, este sistema representa un láser con señal externa inyectada proveniente de otro láser, en el contexto semiclásico. Esta señal es modulada en el tiempo dando origen al forzado periódico. Los términos de ruido son incluidos para tener en cuenta fluctuaciones tanto en la intensidad como en la frecuencia de ambos láseres.

El sistema determinista con señal inyectada constante presenta bifurcación de Hopf caracterizada por los valores de los parámetros de ganancia, de pérdida del láser, y la desintonía entre ambos láseres. Por lo tanto, pueden distinguirse dos comportamientos dinámicos bien definidos, ciclos límites y soluciones estables de punto fijo (que es la llamada región de locking).

En este trabajo caracterizamos el comportamiento dinámico del sistema cuando el forzado, variando periódicamente en el tiempo, permite que el sistema oscile entre ambas regiones alrededor de la bifurcación. En esta situación el sistema es capaz de seleccionar o generar nuevas frecuencias, aún subarmónicos de la fundamental.

## I. INTRODUCCION

En este trabajo analizamos la dinámica de un láser con señal inyectada modulada en el tiempo fuera de sintonía. Se tienen en cuenta fluctuaciones naturales en la intensidad y en la frecuencia de la señal inyectada. Se consideran términos de ruido blanco aditivo y multiplicativo cuyo origen está en las fluctuaciones en la intensidad del campo inyectado y en la desintonía respectivamente. En estas condiciones es posible describir la dinámica del sistema en la vecindad del punto de bifurcación. Estos sistemas presentan una bifurcación de Hopf como puede verse a partir de la forma normal en coordenadas polares y realizando una eliminación adiabática de la fase.

Los resultados permiten mostrar que el sistema selecciona o genera nuevas frecuencias, en algunos casos subarmónicos de la fundamental. Todos estos resultados están en perfecto acuerdo con las simulaciones numéricas. En el régimen de ciclo límite la densidad espectral de potencia contiene contribuciones a la frecuencia de Hopf y sus múltiplos. En el régimen de punto fijo, en cambio, la densidad espectral de potencia consta de una única contribución central sobre ruido de fondo.

A diferencia del enfoque teórico, los resultados obtenidos a través de las simulaciones numéricas no se limitan a pequeñas amplitudes del forzado periódico.

## II. MODELO DETERMINISTA

Una descripción ampliamente aceptada para modelar un láser mono-modo homogéneamente ensanchado son las conocidas ecuaciones de Maxwell-Bloch<sup>1</sup>, resultando un tratamiento semiclásico del problema que permite estudiar fenómenos como corrimientos en frecuencia, enganche en frecuencia, pulsaciones en la diferencia de población, enganche de modos activo y pasivo, oscilaciones amortiguadas, pulsos ultracortos, rutas al caos, biestabilidad óptica, etc.

Los procedimientos de eliminación adiabática de la polarización y la diferencia de población es generalmente posible en los láseres de clase A (He-Ne, Ar, Kr, dye, etc.) y permite escribir una ecuación diferencial para el campo eléctrico dentro de la cavidad en la aproximación de onda estacionaria. Con una adecuada adimensionalización, considerando el caso de inyección no resonante modulada periódicamente, la ecuación resulta

$$\dot{E} = (i \Delta\nu + g(E)) E + F(1 + \lambda \cos\omega\tau) \quad (1)$$

donde  $g(E) = G(E)/\Delta\nu$  es la ganancia neta en unidades de la desintonía  $\Delta\nu$ , definida por

$$g(E) = -\kappa + \frac{\gamma}{1 + E^2} \quad (2)$$

$\kappa = K/\Delta\nu$ ,  $\gamma = \Gamma/\Delta\nu$  son las pérdidas y ganancia adimensionales,  $\omega$  es la frecuencia angular del forzado externo en unidades de  $\Delta\nu$ .

El parámetro  $F = \Delta_c \sqrt{T} \cdot E_{IO}/\Delta\nu$  queda determinado por  $\Delta_c$ , el espaciado de frecuencia entre los modos del resonador pasivo,  $T$ , el coeficiente de transmisión del espejo de acoplamiento externo de la cavidad, y en la amplitud de la señal inyectada,  $E_I = E_{IO} (1 + \lambda \cos \omega t)$ . Note que  $F\lambda$  es la amplitud real de las oscilaciones.

A continuación estudiaremos la estabilidad del sistema y caracterizamos el punto de bifurcación del mismo; un análisis más detallado puede verse en la Ref. 2.

Sea  $E_s$  la solución estacionaria de la ecuación (1) en ausencia del término periódico ( $\lambda=0$ ) y  $g_s = g(E_s)$  la ganancia neta estacionaria. Las soluciones para la amplitud y la fase del campo estacionario satisfacen las ecuaciones trascendentes

$$E_s^2 = \frac{\mu - g_s}{\kappa + g_s} \quad (3)$$

$$\varphi_s = -\operatorname{arccot} g_s$$

siendo  $\delta = \gamma - \kappa$  el parámetro adimensional de ganancia neta.

La ecuación (1) igualada a cero, y tomando  $\lambda = 0$ , define la curva solución para los estados estacionarios del campo eléctrico. Esta, para  $\vartheta$  y  $\lambda$  fijos, es independiente de  $F$ . Su intersección con la curva

$$F \operatorname{sen} \varphi_s = E_s \quad (4)$$

determina el punto fijo ( $E_s, \varphi_s$ ) para cada valor de  $F$ .

Para determinar la estabilidad de la solución estacionaria, realizamos un cálculo perturbativo del campo eléctrico en torno de su valor estacionario  $E_s$  ( $E = E_s + v$ ). Linealizando (1) con  $\lambda=0$  mediante un procedimiento estándar, es posible determinar los autovalores  $\Lambda_s$  que diagonalizan la parte lineal de la ecuación diferencial resultante para  $v$ .

El sistema alcanza un punto de bifurcación cuando  $\operatorname{Re}(\Lambda_s) = 0$ . Para que esto ocurra consideremos el caso  $\Lambda_s$  perteneciente a los complejos. Sea  $g_b$  la única solución físicamente aceptable de  $g_s$  para la cual  $\operatorname{Re}(\Lambda_s) = 0$ . Esta es

$$g_b = \kappa(\sqrt{\sigma} - 1)$$

que nosotros llamamos ganancia neta en el punto de bifurcación, donde  $\sigma = \gamma/\kappa$  es la relación ganancia pérdida.

A pesar de que no es posible obtener una expresión analítica explícita para  $E_s$ , ahora si es posible dar el valor del campo eléctrico en el punto de bifurcación y estudiar la estabilidad de las soluciones estacionarias.

El punto de bifurcación queda determinado por

$$E_b^2 = \sqrt{\sigma} - 1$$

$$\varphi_b = -\operatorname{arccot} g_b \quad (6)$$

$\Omega_b$ , la frecuencia de oscilación en torno del punto de bifurcación, viene dada por por

$$\Omega_b^2 = 1 - g_b^2 \geq 0, \text{ puesto que } |g_b| \leq 1.$$

Si llamamos  $F_b$  a la excitación necesaria para llevar al sistema a punto de bifurcación, su valor queda unívocamente determinado por los parámetros  $\gamma$  y  $\vartheta$  del láser inyectado. Es posible, después de cierta álgebra, determinar la siguiente relación para  $F_b$

$$F_b^2 = [\kappa^2(\sqrt{\sigma} - 1)^2 + 1](\sqrt{\sigma} - 1) \quad (7)$$

Si  $F < F_b$  se tiene una solución inestable para  $E_s$ , dando lugar a una nueva solución estable de ciclo límite cuyas oscilaciones son de frecuencia  $\Omega_b$ , mientras que para  $F > F_b$  se tiene que  $E_s$  es una solución estable de punto fijo.

De este análisis se desprende que es la fuerza  $F$  la que determina la estabilidad de la solución estacionaria, estando ésta determinada únicamente por los parámetros adimensionales  $\gamma$  y  $\kappa$ .

El comportamiento de la frecuencia en la vecindad del punto de bifurcación, ha sido detallado en la Ref. 2.

### III. MODELO ESTOCASTICO

Incluimos ahora fluctuaciones estocásticas temporales en los parámetros relevantes del sistema. Para esto consideramos fluctuaciones en la amplitud de la señal inyectada y las frecuencias de ambos láseres.

La desintonía y la amplitud del campo inyectado están bien definidos por sus valores medios, que llamaremos  $\langle \Delta_i(t) \rangle = \Delta_i$ , y  $\langle E_i(t) \rangle = E_i$ .

Para el caso de desintonía no nula, las fluctuaciones pueden ser expresadas como

$$\frac{\Delta v(\tau)}{\Delta v} = 1 + u_3(\tau) \text{ y } \frac{\Delta v \sqrt{T} E_1(\tau)}{\Delta v} = F + u_4(\tau), \text{ los}$$

cuales conducen a la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$\partial_\tau E = (i + g(E)) E + F(\tau) + i u_3 E + u_4 \quad (8)$$

donde  $g(E)$ , como antes, es la ganancia neta de saturación y  $f$  un parámetro adimensional relacionado con la amplitud de la señal inyectada.

En el caso del ruido blanco, las funciones de autocorrelación para las variables aleatorias  $u_j(\tau)$  son

$$\langle u_j(\tau) u_j(\tau') \rangle = D_j \delta(\tau - \tau') \text{ para } j = 3 \text{ ó } 4; D_3 =$$

$\varepsilon_3 / \Delta v^2$  y  $D_4 = (\Delta_c \sqrt{T})^2 \varepsilon_4 / \Delta v^2$ , siendo  $\varepsilon_3$  y  $\varepsilon_4$  las intensidades de las fluctuaciones en la frecuencia y la amplitud de la señal, respectivamente.

#### IV. SIMULACION NUMERICA

La integración numérica de la ecuación diferencial estocástica fue realizada mediante un procedimiento convencional<sup>3</sup>. Se utilizan los valores para el campo eléctrico de cada una de 200 realizaciones simultáneas e independientes que simulan el proceso estocástico. Con dichos valores se calculan los coeficientes de Fourier y con estos últimos, mediante las relaciones de Wiener-Khinchine, se obtiene la densidad espectral de potencia. Para este cálculo, la integración numérica se deja evolucionar hasta pasar la etapa transiente. Todos los casos que presentamos fueron resueltos con parámetros similares respecto de la integración numérica. El paso del tiempo adimensional usado fue  $10^{-3}$ .

La Fig. 1 muestra la densidad espectral de potencia en función de la frecuencia adimensional  $\omega$  obtenida de la simulación numérica para el caso especial de señal inyectada constante ( $\lambda=0$ ).

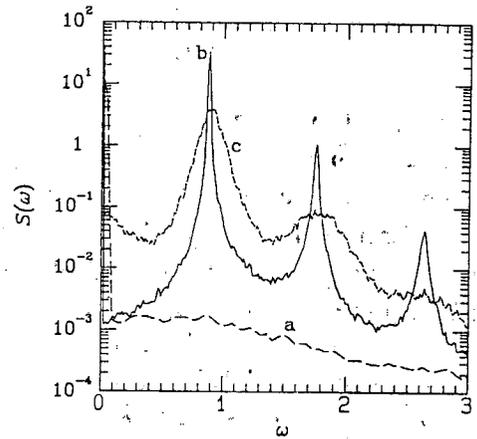
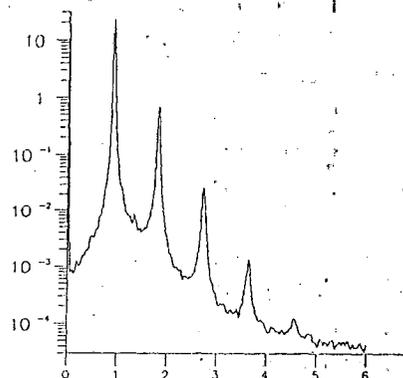


Fig. 1: Densidad espectral de potencia vs.  $\omega$  adimensional. Señal inyectada constante,  $\lambda=0$ . Los parámetros del láser son:  $\gamma = 3$ ,  $\kappa = 2$ ,  $D_3 = D_4 = 10^{-3}$ . En a)  $F = -0.6$ , el sistema funciona en el régimen de locking. En b)  $F = 0.4$ , el sistema tiene soluciones de ciclo límite, mostrando el espectro las contribuciones a la  $\Omega_b$  y sus primeros armónicos. La curva c) se incluye como ilustración de los efectos de la inclusión de ruido de color.

Los parámetros del láser son:  $\gamma = 3$ ,  $\kappa = 2$ ,  $D_3 = D_4 = 10^{-3}$ . El valor calculado de  $F_f = 0.52$ . En a)  $F > F_b$ , ( $F = 0.6$ ) el espectro consiste en un pico central muy angosto sobre un ruido de fondo. Este es el aspecto que presenta la densidad de espectral de potencia para un láser con señal inyectada funcionando en régimen de locking. En b)  $F < F_b$ , ( $F = 0.4$ ) el sistema tiene soluciones de ciclo límite, mostrando el espectro las contribuciones a la  $\Omega_b$  y sus primeros armónicos. La curva c) se incluye por comparación y representa ruido de color aditivo y multiplicativo, es decir con tiempos de correlación finitos.

Fig. 2 muestra una secuencia de la densidad espectral de potencia en función de  $\omega$  adimensional, para un caso particular de parámetros del láser.



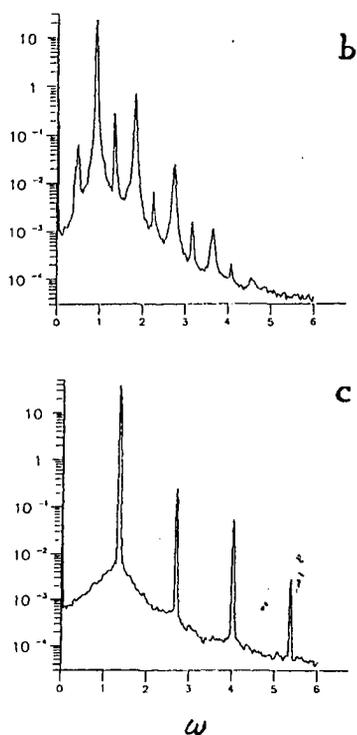


Fig. 2: Densidad espectral de potencia vs.  $\omega$  adimensional. Señal inyectada variable en el tiempo. Los parámetros del láser:  $\gamma = 3$ ,  $\kappa = 2$ ,  $F = 0.35$ ,  $\omega_f/\Omega_b = 1.5$ ,  $D_3 = D_4 = 10^{-3}$ . En a)  $\lambda = 0.017$ , el sistema oscila dentro de la región de ciclo límite. En b)  $\lambda = 0.17$ , el sistema desde la región de ciclo límite puede alcanzar ligeramente la región de locking. Nótese las contribuciones resonantes a la frecuencia de bifurcación y sus armónicos, también las contribuciones a la frecuencia del forzado externo, sus armónicos y diversas combinaciones. En c)  $\lambda = 1.71$ , sólo están presentes las contribuciones resonantes a la frecuencia del forzado y sus armónicos.

Estos son:  $\gamma = 3$ ,  $\kappa = 2$ ,  $F = 0.35$ . La relación entre la frecuencia del forzado y la frecuencia de bifurcación calculada es  $\omega_f/\Omega_b = 1.5$ . Las intensidades de ruido adimensionales son  $D_3 = D_4 = 10^{-3}$ . Igual que antes,  $F_b = 0.52$ .

En la Fig. 2.a la amplitud de las oscilaciones es tal que el sistema oscila dentro de la región de ciclo límite ( $\lambda = 0.017$ ). La densidad de potencia espectral muestra débilmente la presencia de término forzado y el aspecto general de la densidad de potencia espectral es similar a la mostrada en la Fig. 1, parte b).

En la Fig. 2.b se ha incrementado el valor de  $\lambda$  ( $\lambda = 0.17$ ) de forma tal que el sistema desde la región de ciclo límite puede alcanzar ligeramente la región de locking. La densidad espectral de potencia mues-

tra las contribuciones resonantes a la frecuencia de bifurcación y sus armónicos como también las contribuciones a la frecuencia del forzado externo, sus armónicos y diversas combinaciones que pueden ser determinadas analíticamente a través del cálculo de la Forma Normal<sup>4</sup>.

En la Fig. 2.c el valor del parámetro  $\lambda$  es incrementado más aún ( $\lambda = 1.71$ ). En estas condiciones, sólo están presentes las contribuciones resonantes a la frecuencia del forzado y sus armónicos.

La Fig. 3 corresponde al caso de inyección no resonante variable en el tiempo, con parámetros tales que el sistema está por encima de la bifurcación ( $F = 0.48$ ).

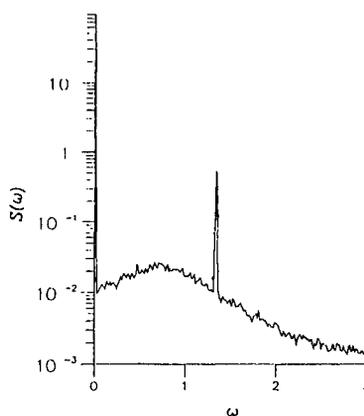


Figura 3: Densidad espectral de potencia vs.  $\omega$  adimensional. Los parámetros son:  $\gamma = 3$ ,  $\kappa = 2$ ,  $F = 0.7$ ,  $D_3 = 10^{-3}$ ,  $D_4 = 10^{-3}$ ,  $\lambda = 0.1$ ,  $\omega_f/\Omega_b = 1.5$ . El sistema está por encima de la bifurcación,  $F_b = 0.48$ . Nótese la pequeña resonancia ( $\omega = 1$ ) cercana a la desintonía entre el láser y la señal externa y la resonancia estocástica a la frecuencia externa.

El forzado oscilatorio lleva el sistema fuera de la región de locking y aparece una pequeña resonancia ( $\omega = 1$ ) cercana a la desintonía entre el láser y la señal externa. La resonancia estocástica a la frecuencia externa del forzado resulta evidente.  $\gamma = 3$ ,  $\kappa = 2$ ,  $F = 0.7$ ,  $D_3 = 10^{-3}$ ,  $D_4 = 10^{-2}$ ,  $\lambda = 0.1$ ,  $\omega_f/\Omega_b = 1.5$ .

## REFERENCIAS

- 1- A.E.Siegman, *Laser*, University Science Books, Mill Valley, California. (1986).
- 2- R.C.Buceta, M.S.Torre, H.F.Ranea Sandoval, enviado a Phys. Rev. A.
- 3- M.Sancho, M.San Miguel, S.L.Katz, J.D.Gunton, Phys. Rev. A **26**, 1589 (1982).
- 4- *Laser with periodic injected signal. Stochastic and deterministic model*. R.C.Buceta, M.S. Torre, H.F.Ranea Sandoval, en preparación.