

# Cavidad resonante cilíndrica de sección elíptica para el análisis de señales optoacústicas

## Cylindrical resonant cavity of elliptical cross section for generation of photoacoustic signals

Ladaga J. L. y Mosquera C. F.

Facultad de Ingeniería UBA – Laboratorio de láser – Paseo Colón 850 – Buenos Aires  
E-mail: cmosque@fi.uba.ar

Se propone una cavidad resonante de sección transversal elíptica para la generación de señales optoacústicas en una cavidad cilíndrica. Se analizan los posibles modos de vibración a ser excitados en función de la excentricidad de la elipse de la sección, cuando se ubica el haz láser en el eje de la cavidad o fuera de él. Para una dada frecuencia de resonancia común a la cavidad de sección elíptica y a una de sección circular, se comparan valores proporcionales de la amplitud de la presión para ambas cavidades en el punto de ubicación del micrófono, para un modo de oscilación representativo en cada una de ellas.

Optoacústica, resonancia, elipse

We propose a cylindrical resonant cavity of elliptical cross section for generation of photoacoustic signals. We analyze the possible resonant modes as a function of the ellipse's eccentricity when the laser is directed either through the central axis of the cavity or out of the axis. We calculate a value proportional to the pressure at the microphone place for a representative resonant mode of two cavities, one with elliptical cross section and other with circular cross section, and compare both results.

Photoacoustic, resonance, ellipse

### I.- Introducción

Las cavidades cilíndricas de sección circular han sido y son ampliamente utilizadas en experiencias de fenómenos optoacústicos<sup>[1]</sup>. Con la intención de aumentar la respuesta de la celda excitando diversos modos de vibración acústicos, algunos investigadores han propuesto desplazar en forma paralela el haz del láser desde el eje del cilindro hacia la pared lateral<sup>[2]</sup>; otros han propuesto nuevos diseños internos para la cavidad de sección cilíndrica tradicional con el mismo objetivo<sup>[3]</sup>. En todos los casos se rompe la simetría de la cavidad cilíndrica para excitar otros modos de resonancia a fin de incrementar la señal en el micrófono. La idea de utilizar una cavidad elíptica persigue también el objetivo de aumentar la respuesta y se fundamenta en que las funciones de Mathieu, en particular las de paridad par y período  $\pi$  ( $\gamma=0$ ), presentan máximos en el centro de la elipse y en los extremos del eje menor (figura 1). Un comportamiento similar tienen las funciones de Mathieu impares de período  $2\pi$ . Las funciones de Mathieu de paridad par y período  $2\pi$ , presentan en cambio máximos en los focos de la elipse y en los extremos del eje mayor, mientras que las de paridad par y período  $\pi$  tienen máximos descentrados sobre el eje mayor de la elipse y, sobre el contorno, fuera de los extremos de los ejes. Iluminando el gas dentro de la cavidad en aquellas regiones en las cuales las funciones que representan a la presión tienen un máximo, se logra la máxima eficiencia en la generación del fenómeno optoacústico.

### II. Señal optoacústica en una cavidad resonante elíptica

La generación de ondas acústicas y térmicas en gases está gobernada por la ecuación de onda lineal para la presión<sup>[1]</sup>  $p$ :

$$\partial_t^2 p(\vec{r}, t) - c^2 \nabla^2 p(\vec{r}, t) = (\sigma - 1) \partial_t H(\vec{r}, t) \quad (1)$$

donde  $c$ ,  $\sigma$  y  $H$  son la velocidad del sonido, el coeficiente adiabático del gas y la densidad de calor depositado en el gas por absorción de la luz, respectivamente.

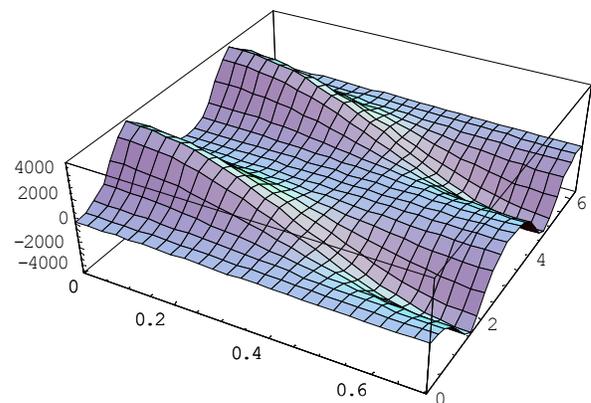


Figura 1: Función par de Mathieu de período  $\pi$ ,  $r=0$  con  $0 \leq u \leq 0.70362$ ;  $0 \leq v \leq 2\pi$ .

Todas las cavidades cerradas utilizadas como celdas optoacústicas tienen resonancias acústicas y sus modos de vibración son las soluciones de la ecuación de ondas homogénea:

$$\partial_t^2 p(\vec{r}, t) - c^2 \nabla^2 p(\vec{r}, t) = 0 \quad (2)$$

que, para una variación temporal de tipo armónico, se transforma en la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 p(\vec{r}) + k^2 p(\vec{r}) = 0 \quad (3)$$

Esta ecuación se puede resolver mediante separación de variables en coordenadas cilíndricas elípticas<sup>[4]</sup> ( $u, v, z$ ). La transformación de las coordenadas cartesianas a las cilíndricas elípticas es la siguiente:

$$x = \frac{d}{2} \cdot \cosh u \cdot \cos v \quad y = \frac{d}{2} \cdot \operatorname{senh} u \cdot \operatorname{sen} v$$

$$z = z \quad 0 \leq u < \infty \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

donde  $d$  es la distancia interfocal de la elipse. Dado  $d$ , cada valor de  $u = \operatorname{cte}$  da una elipse particular.

Al separar variables en este sistema de coordenadas, las soluciones de las ecuaciones en  $u$  y en  $v$ , son las funciones de Mathieu<sup>[5]</sup>. Las autofunciones de la ecuación de Helmholtz se pueden escribir como:

$$p_j(\vec{r}) = S p_{2r+\gamma}(s, v) \cdot S p_{2r+\gamma}(s, iu) \cdot \cos(n\pi z / L) \quad (4)$$

en la que el subíndice  $j$  en la expresión de la presión simboliza el valor de la terna  $r, \gamma$  y  $n$ .  $L$  es la longitud de la cavidad. El parámetro  $p$  que acompaña a la expresión de las funciones  $S$  indica la paridad par o impar de la función;  $\gamma$  puede valer  $0$  ó  $1$  de acuerdo a si las funciones de Mathieu son de período  $\pi$  ó  $2\pi$  respectivamente. El parámetro  $r$  es el número de orden de los autovalores y, el parámetro  $s$  está relacionado con la distancia interfocal y la frecuencia. Las funciones angulares de Mathieu, las de argumento  $v$ , son combinaciones lineales de funciones seno o coseno (según la paridad) cuyos coeficientes están tabulados<sup>[6]</sup>. Las funciones radiales de Mathieu, las de argumento  $u$ , son combinaciones lineales de productos de funciones de Bessel con argumento dado en función de  $u$ , cuyos coeficientes también están tabulados<sup>[6]</sup>.

La solución de la ecuación de onda inhomogénea, ecuación (1), puede ser escrita como:

$$p(\vec{r}, t) = A_0(t) + \sum_j A_j(t) p_j(\vec{r}) \quad (5)$$

Dado que las autofunciones de la ecuación de Helmholtz (3) son ortogonales, los coeficientes  $A_j$  se pueden calcular mediante la expresión<sup>[1]</sup>:

$$A_j = \frac{i\omega(\sigma-1) \int_{V(L)} H(\vec{r}) p_j(\vec{r}) dV}{\left( \omega_j^2 - \omega^2 + i \frac{\omega\omega_j}{Q_j} \right) \int_V |p_j(\vec{r})|^2 dV} \quad (6)$$

La región de integración en la integral del numerador,  $V(L)$  es el volumen iluminado por el láser; en la integral del denominador, el volumen  $V$  es el total de la cavidad.  $Q_j$  es el factor de calidad de la cavidad para el modo  $j$ ;  $\omega_j$  es la frecuencia de resonancia de la cavidad para ese modo y  $\omega$  es la frecuencia con la que se excita la cavidad.

## II. Parámetros de la cavidad de sección elíptica

### a. Láser centrado en el eje de la cavidad

Se eligieron los parámetros apropiados para poder excitar una determinada frecuencia ( $2435 \text{ Hz}$ ) en el modo dado por la función de Mathieu par, de período  $\pi$  con  $r=0$  y  $\gamma=0$  en la cavidad de sección elíptica, calcular los correspondientes valores de  $A_j$  para este modo (con los diferentes juegos de parámetros determinados) y poder así compararlos con el de un resonador de sección circular equivalente.

En primer lugar es necesario determinar los valores de  $s$  y de  $d$  a utilizar. Elegido un valor de  $s$  se halló el valor de la coordenada  $u=u_c$  que hace cero a la derivada normal de la presión, lo que significa físicamente hacer máxima la presión en el contorno de la cavidad. Este valor de  $u_c$  determina la elipse para el modo y la correspondiente frecuencia elegida, pues la relación entre la frecuencia y el parámetro  $s$  es  $\sqrt{s} = \pi\omega d / c$ . En esta expresión se ha considerado nulo el índice del modo longitudinal,  $n=0$  en la ecuación (4).

En la tabla 1 se especifican los valores del parámetro  $s$ ; de la distancia interfocal  $d$ ; el valor de  $u_c$ ; de los semiejes mayor  $a$  y menor  $b$  y la excentricidad  $e$  de la elipse resultante, valores que determinan el valor de la frecuencia ( $2435 \text{ Hz}$ ).

Tabla 1

$s$	$d$ [cm]	$u_c$	$a$ [cm]	$b$ [cm]	$e$
2.89	7.56	1.51531	9.01	8.18	0.42
3.24	8	1.46034	9.08	8.15	0.44
12.96	16	0.858728	11.14	7.74	0.72
20.25	20	0.70362	12.56	7.63	0.79

### b. Láser descentrado con respecto al eje de la cavidad

Como se mencionó en la introducción, las funciones de Mathieu que presentan máximos fuera del centro de la cavidad son las de paridad par y período  $2\pi$  (máximos en los focos de la elipse y en los extremos del eje menor), y las de paridad impar y período  $\pi$  (máximos descentrados sobre el eje mayor de la elipse y, sobre el contorno, fuera de los extremos de los ejes). Para la misma frecuencia se calculó el coeficiente  $A_j$  para el modo de paridad par, período  $2\pi$  ( $\gamma=1$ ) y  $r=0$ , con un valor de  $s=20.25$  y una distancia interfocal  $d=20 \text{ cm}$ . En este caso el valor de  $u_c$  es  $u_c=0.602$ ; los semiejes mayor y menor de la elipse miden respectivamente  $a=11.9 \text{ cm}$  y  $b=6.4 \text{ cm}$ , y la excentricidad es  $e=0.84$ .

## III. Cálculo de $A_j$

El cálculo de  $A_j$  se efectuó suponiendo que la frecuencia de excitación de la cavidad es igual a la frecuencia de resonancia del modo  $j$  elegido. Se consideró que la absorción del medio gaseoso que llena la cavidad es muy pequeña de forma tal que, para facilitar los cálculos, se puede suponer que el haz láser no modifica su intensidad en el trayecto dentro de la cavidad. Esto significa, matemáticamente, no incluir una dependencia de la amplitud del haz respecto del eje  $z$ . Asimismo se considera que la intensidad del haz se encuentra

uniformemente distribuida en la sección del haz, supuesta de 1 cm de diámetro. Con estas consideraciones la función  $H(r)$  sale fuera de la integral del numerador de la expresión (6). El jacobiano de la transformación para ambas integrales de (6) es:  $|J|=(d/2)^2(\text{sen}^2u+\text{sen}^2v)$ .

Asimismo, la expresión de  $A_j$  queda:

$$A_j = \frac{(\sigma-1)H(\bar{r})|_{V(L)} p_j(\bar{r})|_J |dudvdz}{\frac{\omega_j}{Q_j} |_{V} |p_j(\bar{r})|^2 |J| dudvdz} \quad (7)$$

#### IV. Resultados

##### a. Láser centrado en el eje de la cavidad

Se calculó el cociente de ambas integrales de la expresión (7) para la frecuencia de 2435 Hz en el modo de la cavidad de sección elíptica dado por la función par de período  $\pi$  con  $r=0$  y  $\gamma=0$ , para los distintos valores de  $s$  dados en la tabla 1. Se tuvo especial cuidado en que la región de integración de la integral del numerador (superficie circular de 1 cm de diámetro centrada en el origen de coordenadas) fuera correctamente expresada en función de las variables  $u$  y  $v$  del sistema de coordenadas cilíndrico elíptico. A cada valor obtenido para el cociente de las integrales, proporcionales a los de  $A_j$  correspondientes, se lo multiplicó por el de la función  $p_j(r)$  en el semieje menor de la elipse (de coordenadas cilíndricas elípticas  $u=u_c$ ,  $v=\pi/2$ ), uno de los puntos en que su valor se maximiza y en el cual se ubicaría el micrófono. Los valores así obtenidos, proporcionales al valor de la presión se muestran en la tabla 2.

Tabla 2

$s$	$d$ [cm]	$p=A_j p_j(u_c, \pi/2)$
2.89	7.56	-0.0098
3.24	8	-0.0156
12.96	16	-0.0122
20.25	20	-0.0116

El signo menos se debe al signo del máximo de la función  $p_j(r)$  sobre el contorno, contrario al del máximo central.

Para comparar este resultado con los que se obtienen en cavidades ya utilizadas, se calculó el cociente de las integrales de la ecuación (7) para una celda de sección circular que resuena a la misma frecuencia de 2435 Hz en el modo longitudinal  $k=0$ ; azimutal  $m=0$  y radial  $n=1$ . El radio de esta celda es  $R=8.4$  cm. Las autofunciones de la presión  $p_j(r)$  para la cavidad de sección circular están dadas en general por:

$$p_j(r) = \cos(m\varphi) J_m(\alpha_{m,n} r / R) \cos(k\pi z / L) \quad (8)$$

donde  $L$  es la longitud de la celda y  $\alpha_{m,n}$  es la raíz enésima de la derivada normal a la superficie lateral del cilindro de la función de Bessel de orden  $m$  (con  $r=R$ , sobre el contorno, en alguno de cuyos puntos está ubicado el micrófono). El valor de la raíz  $\alpha_{0,1}$  es 1.2075. La longitud  $L$  de la celda no es necesario especificarla porque no aparece en la expresión a calcular.

El valor del cociente de las integrales de la ecuación (7) así obtenido fue multiplicado por el valor dado por la ecuación (8) para  $p_j(r)$  con  $r=R$ . Se obtuvo un valor de -0.0087. El signo menos tiene explicación idéntica al caso de la cavidad de sección elíptica.

Los resultados expuestos en la tabla 2 para la cavidad de sección elíptica son comparables al obtenido para la cavidad de sección circular pues se trata de cavidades equivalentes: tienen igual frecuencia de resonancia; la constante adiabática del gas que llena su interior es la misma; las suponemos iluminadas por el mismo láser; y, por último, es válido suponer que los valores de  $Q_j$  son muy similares por lo que, en primera aproximación, se los puede suponer iguales.

##### b. Láser descentrado del eje de la cavidad

En el modo par de período  $2\pi$  con número de orden del autovalor  $r=0$ , la posición de los máximos de la autofunción sobre el eje  $x$  varían con el parámetro  $s$ . Para  $s=20.25$  uno de los máximos se encuentra en  $x=4.976$ ,  $y=0$ . Se calculó el valor de  $A_j$  suponiendo al láser centrado en torno a ese punto, para la misma frecuencia de excitación, con el valor indicado del parámetro  $s$  y la distancia interfocal igual a 20 cm. Este valor del coeficiente, multiplicado por el valor de la autofunción en un punto del contorno dado por  $u_c=0.602$  y  $v=5.23$ , en el cual es máxima, dio -0.0037.

#### V. Discusión

Los valores representativos de la presión en el punto de la cavidad de sección elíptica donde es conveniente ubicar el micrófono alcanzan, para el modo par de período  $\pi$ , hasta un 79% mayor que el valor equivalente para el caso de la cavidad de sección circular, en aquellos modos en que es deseable su resonancia y a frecuencias de modulación del láser alcanzables sin dificultad. Aumentando el valor del parámetro  $s$  aumenta el valor del máximo de la autofunción en el centro de la elipse y en los extremos del semieje menor. Al mismo tiempo disminuye el valor de la variable  $u$  que maximiza a la presión en el contorno. Esto permite aumentar la excentricidad de la elipse manteniendo la misma frecuencia de resonancia en el modo elegido. Simultáneamente aumenta el área de la sección y, con ella, el volumen de la cavidad. Esto establece una competencia entre el incremento de la autofunción (proporcional a la presión) y el del área de la sección de la cavidad (y por ende el de su volumen) con el incremento del parámetro  $s$ . Se da lugar así a un aumento en el valor de la integral del denominador de la ecuación (7), con la consecuente disminución del valor de  $A_j$ , que el aumento del valor de la autofunción en el punto donde se ubica el micrófono no alcanza a compensar. Comparando las áreas de las secciones elíptica y cilíndrica (o los respectivos volúmenes de las cavidades suponiendo igual longitud para ambas) se encuentra que para  $s=3.24$ , la de la elíptica excede en sólo 5% al de la cilíndrica; mientras que con  $s=20.25$  el exceso asciende al 36%. La cavidad elíptica rompe la simetría en la distribución espacial de la presión, con relación a la de la cavidad cilíndrica (para el modo analizado); esto introduce una diferencia favorable a la cavidad elíptica con respecto a la cilíndrica cuando la

energía de la onda acústica y los volúmenes de ambas cavidades son similares.

En el caso del láser ubicado descentrado respecto del eje de la cavidad, si bien el valor obtenido ( $-0.0037$ ) es menor al de la cavidad cilíndrica, está en curso el cálculo suponiendo una ubicación del láser en uno de los focos de la elipse, dado que con  $s=3.24$  los máximos de la autofunción se encuentran en los focos y sobre los extremos del semieje mayor de la elipse con  $d=8$  cm, cuando se excita la frecuencia ya mencionada ( $2435$  Hz) en el modo par de período  $2\pi$  con número de orden del autovalor  $r=0$ .

Los resultados obtenidos abren así la posibilidad práctica de utilizar una cavidad resonante de sección elíptica en futuras experiencias de detección de gases mediante técnicas optoacústicas.

### **Agradecimientos**

Al Lic. Jorge Bush por su invaluable ayuda para orientarnos ante las dificultades en abordar simetrías matemáticas que conocíamos muy poco.

### **Referencias**

- 1.- "Application of acoustic resonators in photoacoustic trace gas analysis and metrology" A. Miklós and P. Hess, Rev. Sci. Instrum., vol 72, 1937-1955, (2001).
- 2.- "Resonant Photoacoustic Spectroscopy" P. Hess, Top. Curr. Chem., vol 111, 1-32, (1983).
- 3.- "A new cylindrical photoacoustic cell with improved performance" Lu-Yuan Hao et al, Rev. Sci. Instrum., vol 71, 404-410, (2002).
- 4.- H. Margenau and G.M. Murphy "The mathematics of physics and chemistry", D. Van Nostrand Company, N.Y., 1943.
- 5.- "New method for computing eigenfunctions (Mathieu functions) for scattering by elliptical cylinders" J.J. Stamnes and B. Spjelkavik, Pure Appl. Opt., vol 4, 251-262, (1995).
- 6.- J.A. Stratton, P.M. Morse, L.J. Chu and R.A. Hutner. Publication of the Technology Press, MIT (1941).