

ELABORACION DE UN CODIGO PARALELO PARA EL ESTUDIO DE LOS ESTADOS DE EQUILIBRIO DE CONFIGURACIONES DE CAMPO INVERTIDO

Hebe O. Gavarini^{a)}, Nestor O. Fuentes

Comisión Nacional de Energía Atómica

Av. del Libertador 8250, 1429- Buenos Aires Argentina

La simulación numérica de los estados de equilibrio de un plasma, permite predecir el comportamiento de las variables a medir y, a la vez, dar soporte teórico al diseño de los experimentos. Los códigos numéricos suelen requerir un esfuerzo computacional considerable tanto en tiempo como en capacidad de memoria. Es posible hacer cálculos en paralelo disminuyendo el tiempo de cómputo y aumentando la memoria de la computadora. Esto se logra por medio de un arreglo de procesadores ("transputers") que se inserta en una PC a través de una plaqueta madre que los alberga; cada "transputer" aporta al sistema su propia memoria y el arreglo en su conjunto permite hacer cálculos más veloces. En este trabajo se presenta un código numérico paralelo para el estudio de los estados de equilibrio producidos por una theta pinch lineal de campo invertido con una espira de inducción segmentada. El cálculo consiste en la subdivisión balanceada de un programa (secuencial) entre los cuatro "transputers" de arreglo disponible, a fin de que todos ellos ejecuten en forma simultánea (paralelo) la parte de tarea asignada, intercambiando datos entre sí cuando el cálculo lo requiere (comunicación). La relación de tiempos secuencial/paralelo obtenida es de 3.56:1, siendo la ideal de 4:1.

I. INTRODUCCION

En el presente trabajo se resuelve la ecuación de Grad-Shafranov por diferencias finitas, aplicando el método SOR (sobrerrelajaciones sucesivas)¹⁻³, para el dispositivo de espiras segmentadas cuyo corte longitudinal se muestra en la Fig.1, que corresponde al theta pinch de campo invertido de la CNEA⁴. En éste, la espira principal está formada por doce espiras equiespaciadas del mismo tamaño, que tiene radio interno r_m y radio externo r_{mo} , de 8.5 cm y 11.0 cm, respectivamente. Cada componente de la espira principal tiene una longitud de 1.7 cm y la separación entre dos espiras sucesivas es de 2.3 cm. Entre cada espejo y la espira principal adyacente hay una separación de 0.3 cm y ambos espejos tienen radio interno r_x y radio externo r_{xo} de 8.0 cm y 10.5 cm respectivamente. El método de cálculo es iterativo y está formado por dos lazos anidados: uno externo, en el que se tienen en cuenta las condiciones de contorno, y otro interno, que toma en consideración al término fuente debido a la densidad de corriente del plasma. Teniendo en cuenta que el método SOR, antes citado, consume la mayor parte del tiempo requerido para el cálculo, en este trabajo se paraleliza solamente la subrutina correspondientes, obteniéndose una disminución considerable en el tiempo de cómputo.

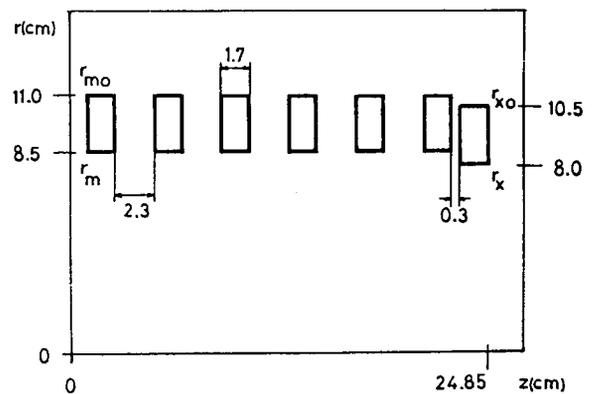


Fig.1 Geometría del dispositivo de espiras segmentadas del theta pinch lineal de la CNEA.

II. CALCULO DEL EQUILIBRIO

Si se desprecia la componente toroidal del campo magnético, los estados de equilibrio de las configuraciones de campo invertido, están representados por la ecuación

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = - \frac{8\pi^3}{c} r J_\phi, \quad (1)$$

donde r y z son las coordenadas cilíndricas, Ψ es la función de flujo magnético poloidal y J_ϕ es la densidad de corriente toroidal del plasma que está relacionada con la presión del mismo por la expresión

^{a)} Miembro del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas.

$$J_\phi = 2\pi crp'(\Psi), \quad (2)$$

en la que se supone que la presión del plasma es función de Ψ solamente; $p'(\Psi)$ indica diferenciación de $p(\Psi)$ con respecto a Ψ . Se considera que hay simetría axial y de espejo, de tal forma que $\Psi(r, z) = \Psi(r, -z)$. Siguiendo el trabajo de Kako, Ishimura y Amano², se divide el espacio en cuatro zonas (Fig. 2). Sólo la región I contiene un número finito de espiras, N , mientras que las demás zonas contienen un infinito, $r \rightarrow \infty$, $z \rightarrow \infty$, o ambos. En esas zonas, las coordenadas que tienden a infinito se transforman a sus inversas.

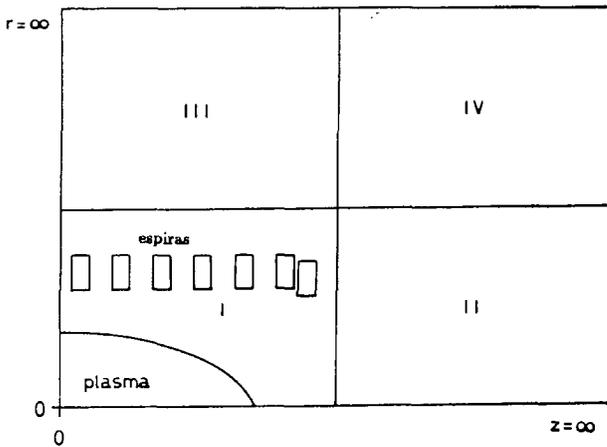


Fig. 2. Regiones de cálculo. La región I contiene un número finito de espiras, N , y el lazo interno donde existe el plasma. En las regiones II y III las coordenadas z y r son transformadas en sus recíprocas, $\xi = 1/z$ y $\rho = 1/r$, respectivamente. En la última región ambas coordenadas son transformadas en ρ y ξ .

Para comenzar el cálculo se considera, además^{2,5,6}.

$$\Psi = \sum_{i=1}^N C_i \Psi_i + C_2 \Psi_2, \quad (3)$$

donde cada Ψ_i es una solución homogénea de (1) asociada a la espira i , Ψ_2 es una solución particular que tiene en cuenta la densidad de corriente del plasma y se anula en las espiras. Para $p(\Psi)$ se propone un perfil de la forma^{6,7-9}.

$$p(\Psi) = P\Psi^3. \quad (4)$$

donde P es una constante que debe ser reactualizada durante el cálculo¹. Los coeficientes de (3) se obtienen teniendo en cuenta la ley de Ampere para cada espira:

$$I_l = \frac{c}{4\pi} \oint_{C_l} \bar{B} \cdot d\bar{l}, \quad (5)$$

donde C_l es una curva que concatena a la espira l y \bar{B} se obtiene a partir de

$$B_r = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Psi}{\partial z},$$

$$B_z = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}. \quad (6)$$

Una vez obtenidos los C_l y C_3 se calcula Ψ y, a partir de ella, J_ϕ , imponiendo la condición que la corriente atrapada por el plasma, I_ϕ , sea constante. La ecuación (1) se reescribe usando diferencias finitas,

$$\Psi_{i,j}^{n+1} = \omega(a_{i,j} \Psi_{i-1,j}^{n+1} + b_{i,j} \Psi_{i,j-1}^{n+1} + c_{i,j} \Psi_{i,j+1}^n + d_{i,j} \Psi_{i+1,j}^n + f_{i,j}) + (1-\omega) \Psi_{i,j}^n \quad (7)$$

y se considera el método SOR¹⁻³ para resolverla. En la ecuación (7) $\Psi_{i,j}$ es el valor de Ψ en la posición r_i y z_j , los supraíndices indican el paso de la iteración y ω es el parámetro de relajación. Además, los coeficientes $a_{i,j}, \dots, d_{i,j}$ son funciones solamente de la posición (r_i, z_j) y del espaciado de la grilla $(\Delta r, \Delta z)$ y $f_{i,j}$ es el término fuente. En el cálculo se usa como criterio de convergencia:

$$\max |\Psi_{i,j}^{n+1} - \Psi_{i,j}^n| < 10^{-3}. \quad (8)$$

En (7) ω viene dado por

$$\omega = \frac{2}{[1 + (1-\delta)^{1/2}]}, \quad (9)$$

y δ es la expresión

$$\delta = \frac{\max |\Psi_{ij}^{n+1} - \Psi_{ij}^n|}{\max |\Psi_{ij}^n - \Psi_{ij}^{n-1}|}, \quad (10)$$

El esquema de cómputo abarca los siguientes pasos:

- 1) Se calculan los coeficientes $a_{i,j}, \dots, d_{i,j}$ (constantes para el cálculo).
- 2) Se proponen soluciones iniciales para las Ψ_i homogéneas de la ec. (3).
- 3) Se optimizan cada una de estas soluciones por el método SOR (ec.(7)) con $f_{i,j} = 0$.
- 4) Se propone una solución Ψ_3 para la no homogénea y se calculan los $f_{i,j}$ de (7).
- 5) Se optimiza Ψ_3 con el método SOR.

6) Con las funciones así halladas se calculan los coeficientes C_1 y C_3 de (3).

7) Con las ecuaciones (2) y (4) se calcula J_ϕ y, a partir de ella, I_ϕ , que debe ser constante. Para ello se modifica P en (4) en forma iterativa. Se calcula $f_{i,j}$ de (7).

8) Se repiten los pasos 5,6,7.

9) Se puede iterar además sobre los pasos 4-8.

III. PARALELIZACION DEL PROBLEMA

A fin de resolver la ec.(7), se trabaja sobre una grilla de 71×151 puntos, asignando a cada punto (i,j) un valor para todas las magnitudes indicadas en (7).

Para actualizar $\Psi_{i,j}^{n+1}$ a partir de $\Psi_{i,j}^n$ se barre la grilla de abajo hacia arriba y de izquierda a derecha usando el método "black and red"³, que se describe brevemente a continuación. Para una dada fila se actualiza el valor en un punto usando los valores viejos de los cuatro vecinos. Se saltea un punto en la fila y, el siguiente, también se actualiza a partir de valores viejos. Al pasar a la fila siguiente se consideran los puntos intercalados con los anteriores. Luego, en una pasada siguiente, se actualizan los valores de los puntos que quedan, pero ahora, a partir de los valores reactualizados en la pasada anterior y de este modo se sigue hasta satisfacer la condición de la ecuación (8).

Este método es fácilmente paralelizable. En el presente trabajo, se eligió dividir la grilla en cuatro fajas verticales. Cada una de ellas se asigna a un procesador. Cada uno de ellos realiza, para su porción de grilla, la secuencia descrita en la sección anterior, e intercambia los datos de borde con los procesadores vecinos entre sucesivas barridas.

IV. RESULTADOS

En la Tabla I se comparan los tiempos de cómputo obtenidos con el programa secuencial y el paralelizado, correspondientes a una corriente atrapada por el plasma $I_\phi = 79.851186$ kA y una corriente en cada una de las espiras $I_l = 12.113816$ kA. La relación entre ambos tiempos es de 3.56, siendo de 4.0 la relación óptima. Cabe destacar que estos resultados difieren de manera muy poco significativa con los obtenidos con otro programa

secuencial en el que el método SOR se implementa de manera no paralelizable.

	SECUENCIAL 2 (B & R)	PARALELO
TIEMPO DE COMPUTO (S)	437.54	122.91

Tabla I. Tiempos de cómputo obtenidos con los programas secuencial y paralelizado.

En la Tabla II se muestran, a modo de ejemplo, para los datos de corriente antes citados, los valores del radio de la separatriz (r_3) y de la semilongitud de la configuración (z_3), que resultan de aplicar ambos métodos secuenciales (SECUENCIAL 1, método no paralelizable y SECUENCIAL 2, método "black and red"). En la Fig. 3 se muestran además las curvas de nivel correspondientes a la función de flujo poloidal para el caso mencionado. En la parte inferior izquierda de los gráficos se puede observar la formación de la columna de plasma.

	SECUENCIAL 1	SECUENCIAL 2 (B & R)
r_s (cm)	6.60	6.60
z_s (cm)	7.00	6.67

Tabla II. Valores de la separatriz y la semilongitud de la configuración de campo invertido, obtenidos en forma secuencial por dos métodos distintos.

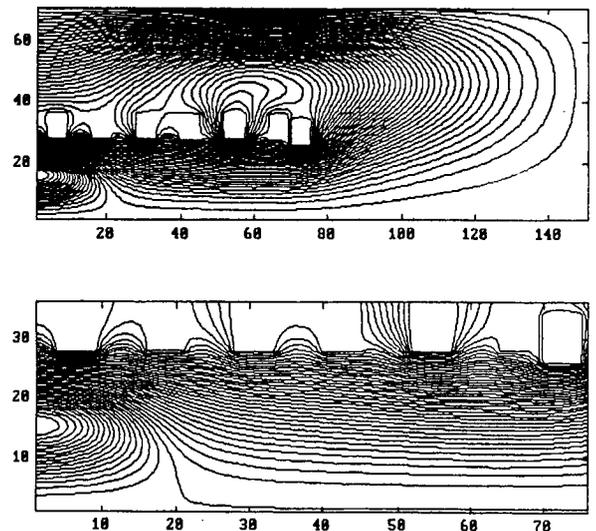


Fig. 3. Curvas de nivel de la función de flujo magnético poloidal para un estado de equilibrio de las configuraciones de campo invertido.

V. CONCLUSIONES

Se obtiene una muy buena ganancia de tiempo sin pérdida en la calidad del resultado final. Si bien, de la bibliografía se desprende que la ganancia en el tiempo de cómputo a medida que se aumenta el número de procesadores no es indefinida^{10,11}, es de esperar que, en este caso en particular, agregando más procesadores pueda mejorarse este resultado.

REFERENCIAS

1. D.W.Hewett y R.L. Spencer, *Phys. Fluids* **26**, 1299 (1983).
2. M.Kako, T.Ishimura y T. Amano, *J. Phys. Soc. Jpn.* **52**, 3056 (1983).
3. F.B. Hildebran, *Introduction to Numerical Analysis* (Dover, New York, 1987), p. 561.
4. J.R.Sobehart, R.J.Maqueda y A. B. Rodrigo, in *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research* (IAEA, Vienna, 1989), Vol. 2, p. 697.
5. J.L.Johnson, H.E. Dalhed, J.M. Greene, R.C.Grimm, Y.Y.Hsieh, S.C.Jardin, J.Manickam, M.Okabayashi, R.G.Storer, A.M.M. Todd, D.E.Voss y K.E.Weimer, *J.Comp.Phys.* **32**, 212 (1979).
6. Y.Suzuki, *Nucl. Fusion* **14**, 345 (1974).
7. F.Herzegger, in *Proceedings of the Fifth European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics* (Euratom CEA, Grenoble, 1972), Vol. 1, p. 26.
8. E.K.Maschke, *Plasma Phys.* **15**, 535 (1973).
9. Y.Suzuki, *Nucl. Fusion* **13**, 369 (1973).
10. A.N.Burkitt y D.W.Heermann, *Comp. Phys. Communications* **54**, 201 (1989).
11. B.A.Huberman, *Comp.Phys. Communications* **56**, 25 (1989).