

CORRIENTES DE GRAVEDAD CON CAUDAL VARIABLE I: TEORIA GENERAL

J. Gratton[†] y C. Vigo

*INFIP-CONICET, Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,
Universidad de Buenos Aires, Pabellón I, Ciudad Universitaria,
1428 Buenos Aires.*

Se estudian las corrientes de gravedad autosemejantes que describen la intrusión de un fluido denso debajo de un fluido ambiente más liviano que descansa sobre un plano. Las corrientes tienen simetría plana y son producidas por una fuente de caudal variable; su volumen varía como t^α . La resistencia del fluido ambiente se describe mediante una condición de contorno que depende de un parámetro β que es función de la razón de densidades de fluidos. El flujo está caracterizado por β , α , y el número de Froude de la fuente, \mathcal{F}_0 . Se desarrolla el formalismo del plano de fase y se discute la construcción de las soluciones.

I. INTRODUCCIÓN

Se estudian aquí las corrientes de gravedad autosemejantes producidas por la intrusión de un fluido denso (densidad = ρ) debajo de un fluido ambiente más liviano (densidad = ρ_a) que reposa sobre una superficie rígida horizontal. La fuente del fluido denso está en el origen de coordenadas, y el volumen de la intrusión varía con el tiempo según la ley de potencias del tipo t^α . La resistencia del fluido ambiente se describe mediante una condición de contorno en el frente de la corriente¹ que depende de un parámetro β , función de ρ/ρ_a . Las corrientes de gravedad son frecuentes en la naturaleza y en situaciones creadas por el hombre e interesan por razones tanto teóricas como prácticas². El derrame instantáneo de un volumen fijo de un fluido denso en un fluido ambiente fue estudiado por varios autores³ por su importancia para la evaluación de riesgos en la rotura de depósitos o conductos que contienen gases tóxicos o inflamables. En este contexto también interesan las corrientes con caudal variable, pues describen pérdidas en que el derrame ocurre durante cierto tiempo. Una serie de experimentos sobre corrientes planas con caudal variable fue realizada por Maxworthy⁴.

Cuando la viscosidad es despreciable el flujo está gobernado por la inercia y la gravedad y se puede describir con la aproximación de aguas poco profundas⁵ si la longitud de la corriente es mucho mayor que su espesor (para que se puedan despreciar las aceleraciones verticales y la presión sea hidrostática). Con estas hipótesis el problema admite una familia de soluciones autosemejantes que repre-

sentan la asintótica intermedia de una variedad de corrientes con diversas condiciones iniciales y de contorno. Las corrientes de gravedad autosemejantes con volumen constante fueron estudiadas teóricamente⁶ y experimentalmente⁷. Grundy y Rottman⁸ estudiaron instrucciones de volumen variable, pero sus resultados no son satisfactorios: para corrientes planas no hallaron soluciones para ciertos intervalos de β (incluyendo $\beta \rightarrow \infty$, que corresponde a un fluido ambiente de densidad nula); para otros β encontraron una curiosa multiplicidad de soluciones; para simetría axial, lisa y llanamente no hallaron soluciones. Vista la importancia de las corrientes de gravedad se justifica reestudiar el problema para aclarar estas cuestiones.

En este trabajo y el siguiente consideramos en detalle las corrientes planas y demostramos la existencia y unicidad de soluciones autosemejantes para todo β ; estudiamos sus propiedades y damos su interpretación física. Quedan así resueltas las inconsistencias y ambigüedades del trabajo anterior⁸ y se logra una adecuada comprensión de estas corrientes.

II. TEORÍA

Supondremos que la profundidad del fluido ambiente es mucho mayor que el espesor h de la corriente, de modo que el flujo se describe dando h y la velocidad u del fluido denso, que dependen de t y de una sola coordenada espacial x . Para simetría plana ($n=0$) x es la distancia desde una fuente lineal y para simetría axial ($n = 1$) es la distancia desde una fuente puntiforme. Indicamos con g la aceleración de la gravedad y con sufijos las derivadas.

[†] Investigador del Conicet

Usando la notación $\mathcal{F} = g/(\rho - \rho_a)/\rho, h = \mathcal{F}h$, las ecuaciones que expresan la conservación de la cantidad de movimiento y de la masa son⁹:

$$u_t + uu_x + h_x = 0, h_t + x^{-n}(x^n uh)_x = 0 \quad (1)$$

Las (1) son semejantes a las ecuaciones de la aproximación de aguas poco profundas¹⁰ (con g en vez de g en la definición de h).

En un salto hidráulico h y u son discontinuas. Los saltos hidráulicos en la interfase entre dos fluidos superpuestos se conocen como saltos internos¹¹ y las condiciones de salto (cuando la profundidad del fluido ambiente es infinita) son idénticas a las de un salto hidráulico ordinario¹², con g en vez de g :

$$u' - c = 2(u - c)/\phi, h' = (h/2)\phi, \quad (2)$$

Aquí c es la velocidad del salto, $\mathcal{F} = (u - c)/\sqrt{gh}$ es el número de Froude, $\phi = \sqrt{(1 + 8F^2) - 1}$, y las variables después del salto.

Indicamos con $Q(t) = q_\alpha t^\alpha$ el volumen (por unidad de ancho si $n=0$) de la corriente y usamos la notación $Q = gQ, q_\alpha = gq_\alpha$. La condición de contorno en la fuente es:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2\pi x)^n uh = \dot{Q} = \alpha q_\alpha t^{\alpha-1} \quad (3)$$

Otra forma de expresar el caudal de la fuente, equivalente a la de (3), es la condición integral:

$$Q = \int_0^{x_f(t)} (2\pi x)^n h(x, t) dx, \quad (4)$$

donde $x_f(t)$ indica la posición del frente.

La (3) no especifica por completo la fuente pues hay infinitas elecciones de u, h cerca de $x=0$ que la satisfacen. Para elegir una de ellas hace falta un dato más, que se puede dar de muchas maneras pero en general introduce un nuevo parámetro que estropea la autosemejanza del problema. Para preservar la autosemejanza nuestro dato adicional será el número de Froude de la fuente, \mathcal{F}_0 . Pediremos entonces que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} h^{-1/2} u = \lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \quad (5)$$

Esta elección distingue las fuentes que producen un flujo subcrítico ($\mathcal{F}_0 < 1$) de las que producen una corriente supercrítica ($\mathcal{F}_0 > 1$), que como veremos dan soluciones de diferente carácter. En⁸ no se usó la condición (5), y no se obtuvieron correctamente las soluciones con ($\mathcal{F}_0 > 1$).

Para describir la resistencia del fluido ambiente al avance de la intrusión usamos en el frente la condición de contorno:

$$\beta^2 h(x_f, t) = u^2(x_f, t) = x_f^2, \quad (6)$$

donde x_f es la velocidad del frente y β un parámetro adimensional constante. La (6) expresa un balance cuasiestacionario entre las fuerzas que impulsan la corriente (gradiente de presión y empuje de Arquímedes) y el arrastre debido a la aceleración del fluido ambiente¹; β se determina experimentalmente y si ρ y ρ_a no difieren mucho es cercano a 1; una corriente en el vacío ($\rho_a = 0$) tiene $\beta = \infty$, o sea $h(x_f, t) = 0$.

La analogía formal¹⁰ entre la teoría de aguas poco profundas y la dinámica de un gas con exponente adiabático $\gamma=2$ permite usar el método plano de fase¹³ para estudiar sistemáticamente las autosemejanzas¹⁴.

Las corrientes de gravedad que cumplen (3) son autosemejantes en la variable

$$\xi = x/(bt^\delta) \quad (7)$$

con $\delta = 1/\mu = (2+\alpha)/(3+n), b = q_\alpha^{1/(3+n)}$, y se tiene

$$-bt^{\delta-1} \delta \xi V(\xi), h = b^2 t^{2\delta-2} \delta^2 \xi^2 Z(\xi). \quad (8)$$

Como $\alpha \geq 0$ será $\delta \geq 2/(3+n)$.

Sustituyendo (7), (8) en (1) se obtiene un sistema de ecuaciones análogo al de la dinámica de gases¹³.

$$\frac{dZ}{dV} = \frac{\Delta_2(V, Z)}{\Delta_1(V, Z)}, \quad (9)$$

$$\frac{d(\ln \xi)}{dV} = \frac{\Delta(V, Z)}{\Delta_1(V, Z)}, \frac{d(\ln \xi)}{dZ} = \frac{\Delta(V, Z)}{\Delta_2(V, Z)} \quad (10)$$

con $\Delta_1 = V(V-\mu)(1-V) + Z[n+1)V + 2(1-\mu)], \Delta_2 = Z[(1-V)/2(V-\mu) + (n+1)V] + V(V-\mu) + 2Z]$ y

$$\Delta=(1-V)^2-Z.$$

Nótese que ξ es una variable autónoma en (9), (10). en términos de las variables de fase (V,Z) las condiciones de salto (2) quedan expresadas como:

$$V' = 1 + 2(V - 1)/\phi, Z' = Z\phi/2, \quad (11)$$

con $\mathcal{F}=(V-J)Z^{-1/2}$. De (11) sale la relación entre los números de Froude a uno y otro lado de un salto:

$$\mathcal{F}' = \mathcal{F}(2/\phi)^{3/2} \quad (12)$$

Las condiciones de contorno en la fuente quedan en la forma:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} (2\pi\xi)^n \delta^3 \xi^3 VZ = \alpha, \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} VZ^{-1/2} = F_0, \quad (13)$$

la condición integral de volumen es:

$$1 = (2\pi)^n \delta^2 \int_0^{\xi_f} \xi^{2+n} Z(\xi) d\xi \quad (14)$$

y la condición en el frente es:

$$V(\xi_f) = 1, \quad Z(\xi_f) = \beta^{-2}, \quad (15)$$

donde ξ_f es la coordenada autosemejante del frente.

Para encontrar las autosemejanzas basta en esencia integrar la ecuación autónoma (9) y obtener $Z(V)$; luego una simple cuadratura da $\xi(V)$. La (9) es una única ecuación diferencial ordinaria de primer orden que vincula las variables fase V,Z , sus soluciones se representan en el plano de fase¹⁵ mediante curvas integrales. Por cada punto regular del plano pasa una única curva integral. La solución de un dado problema físico está representada por una trayectoria integral, formada por uno o más trozos de curvas integrales adecuadas¹⁶; para encontrarlas hay que saber como comportan en el entorno de los puntos singulares de la (9).

Al construir las soluciones debe tenerse en cuenta que $\xi(V)$ es extremo en los puntos regulares de la parábola crítica P_c dada por $Z=(1-V)^2$, donde $\Delta=0$ y $\mathcal{F}=1$. Los puntos por debajo de la P_c representan flujos supercríticos ($\mathcal{F}>1$) y aquellos por encima representan flujos subcríticos ($\mathcal{F}<1$). Si una curva integral cruza la P_c $V(\xi_f)$ y $Z(\xi_f)$ son multi-

valuadas cerca del cruce, cosa inadmisibles en un problema físico. Por lo tanto la curva que representa la solución de un problema real no puede cruzar la P_c (excepto por un punto singular). Análogamente a la dinámica de gases, puede haber soluciones discontinuas, por ejemplo cuando la curva integral que representa el flujo en algún intervalo de ξ cruza la P_c por un punto regular. Entonces esa curva integral debe dejar de representar a la solución en algún punto J antes del cruce. Allí la trayectoria tiene una discontinuidad, y la solución más allá de la misma debe estar representada por una porción de otra curva integral situada del otro lado de la P_c , a partir de punto J' ; las variables de fase a uno y otro lado de la discontinuidad (los puntos J y J') se relacionan mediante las condiciones de salto hidráulico (11). Un salto en una corriente autosemejante ocurre para un valor fijo $\xi_f = \xi_{f'}$ de la coordenada de autosemejanza. Como en un salto se pasa de un flujo supercrítico a uno subcrítico, la transición va de puntos debajo de la P_c a puntos por encima. Luego veremos cómo se determinan los puntos conjugados J y J' que definen el salto.

III. CORRIENTES PLANAS

De aquí en más consideraremos corrientes planas ($n=0$, $\delta=(2+\alpha)/3$). Si $n=0$ la (9) tiene 8 puntos singulares, de los cuales 3 al infinito. Sus posiciones y propiedades (que determinan el significado físico de las soluciones) dependen en general de α y se dan en la Tabla 1. En las Figs. 1 y 2 se muestran las curvas integrales para $\alpha=5/2$ y $1/4$, respectivamente. Se pueden apreciar las dos diferentes topologías del plano de la fase para $\alpha>1$ y $\alpha<1$.

condiciones de contorno (13), (15), requieren que las corrientes autosemejantes sean representadas por trayectorias que salen del nodo F ($V_F=\infty$, $Z_F=\infty$, F representan una fuente en $x=0$, ver la Tabla I) y llegan al punto regular P ($V_P=1$, $Z_P=\beta^{-2}$) que representa el frente.

Mostraremos que para todo β hay soluciones únicas, y que éstas se pueden clasificar usando criterios físicos. Se obtiene así una familia completa y variada de corrientes de gravedad autosemejantes, sin las omisiones y ambigüedades que plagaban los resultados previamente obtenidos por otros⁸.

La curva C_f que representa la solución cerca de la fuente debe comenzar en F ; veremos que depende de \mathcal{F}_0 . Sabemos que la trayectoria integral debe terminar en P (cuya posición depende de β), pero

puede ser discontinua. Mostraremos que la fuente determina una solución única en el entorno de $x=0$. Integrando (9), (10) derecha de F y usando (5) obtenemos:

$$Z = (V/F_0)^2, \xi = K/V, K = \text{const.} \quad (16)$$

Usando (3) sale $K^3 = \mu^2(3-2\mu)\mathcal{F}_0^2$, de donde vemos que las condiciones de contorno (13) determinan C_F y K y por lo tanto la solución¹⁷.

| Punto | (V_s, Z_s) | α | tipo | propiedades | | |
|-------|---------------------|----------|-----------|-------------|----------|----------|
| | | | | $\xi =$ | $u =$ | $h =$ |
| O | (0, 0) | > 1 | nodo | ∞ | 0 | 0 |
| | | < 1 | nodo | ∞ | f | 0 |
| B | $(2\mu/3, \mu^2/9)$ | > 1 | silla | 0/ ∞ | 0 | 0 |
| | | < 1 | nodo | ∞ | ∞ | ∞ |
| C_1 | $(\mu, 0)$ | > 1 | nodo log. | 0 | 0 | 0 |
| | | < 1 | nodo log. | ∞ | ∞ | 0 |
| C_2 | $(1, 0)$ | todo | silla | f | f | 0 |
| C_3 | $(2, 1)$ | > 1 | nodo | f | f | f |
| | | < 1 | silla | f | f | f |
| D | $(\infty, 0)$ | todo | silla | 0 | 0 | f |
| E | $(1, \infty)$ | todo | silla | 0 | 0 | f |
| F | (∞, ∞) | todo | nodo | 0 | f | f |

Tabla 1. Puntos singulares

Posición y propiedades de los puntos singulares de la ecuación autónoma para $n = 0$. Con f indicamos una cantidad finita.

De acuerdo a la relación entre C_F y C_P , hay distintas maneras de construir la solución y en consecuencia soluciones de carácter diferente.

Soluciones continuas regulares (Tipo I)

Lo más simple es que C_F coincida con C_P (y que todos sus puntos salvo F sean regulares). Entonces la solución está representada por la curva integral continua FP . Para cada β puede haber sólo una (o ninguna) solución Tipo I, que corresponderá a un único \mathcal{F}_0 . Viceversa, para cada \mathcal{F}_0 habrá sólo una (o ninguna) solución Tipo I, correspondiente a un único β . Las soluciones Tipo I se caracterizan porque las propiedades de la fuente (\mathcal{F}_0) y del frente (β) no son independientes, sino que deben ser compatibles, o sea $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0(\beta)$. Cabe observar que siendo C_P siempre subcrítica, la condición necesaria (¡pero no suficiente!) para la existencia de soluciones Tipo I es que C_F sea subcrítica.¹⁹

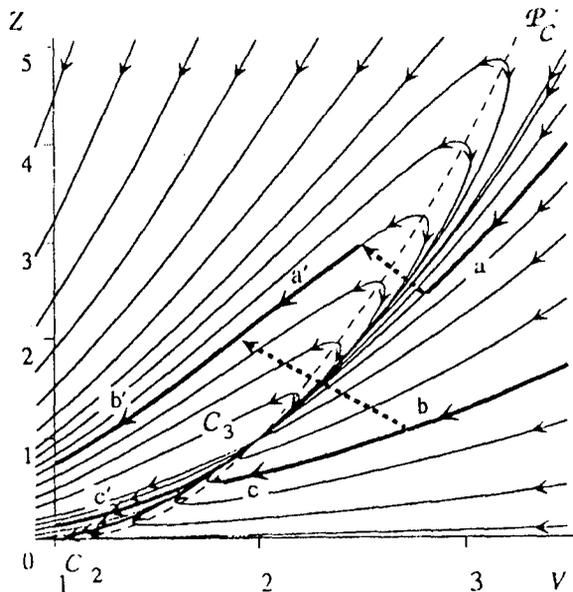


Fig. 1: Curvas integrales para $\alpha=5/2$, las flechas indican ξ creciente; a a', b b', c c' son soluciones Tipo III.

Soluciones con transición crítica (Tipo II)

Puede ocurrir que C_F y C_P se junten en un punto singular. Esto sucede para $\alpha > 1$, cuando ambas llegan a C_3 (ver Fig. 1). Entonces la solución será continua como antes, pero ahora para cada β hay infinitas soluciones de este tipo porque hay un rango de valores de \mathcal{F}_0 para los cuales C_F llega a C_3 (antes de cruzar la P_c). Cada uno de estos \mathcal{F}_0 da lugar a una solución continua que consiste del tramo FC_3 (que depende de \mathcal{F}_0) unido en C_3 con el tramo C_3P (que depende de β). Fijando un β , habrá pues infinitas soluciones Tipo II, que describen corrientes cuyos frentes tienen las mismas propiedades, pero que son producidas por fuentes con diferente \mathcal{F}_0 . Recíprocamente, para un dado \mathcal{F}_0 tal que C_F llegue a C_3 , habrá infinitas soluciones Tipo II, que describen corrientes producidas por la misma fuente, pero cuyos frentes tienen propiedades diferentes. Ahora, en contraste con el caso anterior, \mathcal{F}_0 no está determinado unívocamente por β . Las soluciones "no únicas" según otros autores⁸ pertenecen a esta clase.

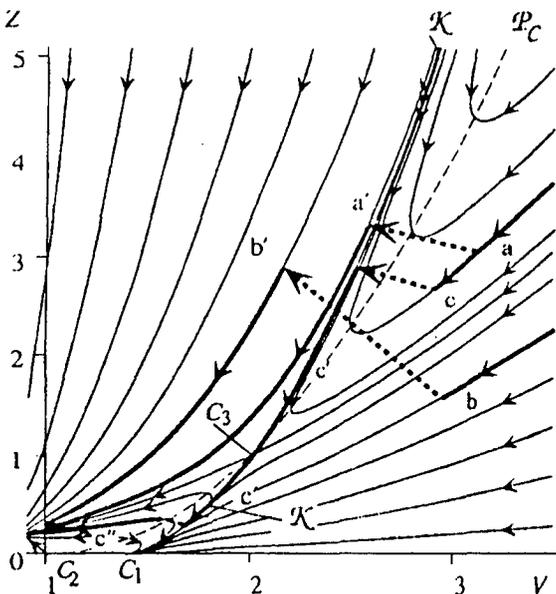


Fig. 2: Curvas integrales para $\alpha = 1/4$, las flechas muestran ξ creciente; a a', b b' son soluciones Tipo III, c c' c'' es una solución Tipo IV.

Soluciones discontinuas (Tipo III)

Puede ocurrir que C_f y C_p no tengan puntos en común. Igualmente es posible construir soluciones, que ahora serán discontinuas. Una posibilidad es que un salto hidráulico conecte C_f con C_p (luego veremos otra posibilidad menos obvia). Para eso C_f debe ser supercrítica.

Para estudiar estas soluciones conviene usar una notación compacta para indicar los conjugados por salto en el plano de fase: si X es un punto, indicaremos con $X' = \mathcal{X}(X)$ a su conjunto obtenido aplicando las relaciones de salto (11) a X . Análogamente indicaremos las conjugadas de curvas y regiones del plano fase, por ejemplo, tendremos que

Para construir una solución discontinua procederemos así: sea C_f la curva apropiada cerca de la fuente, y C_p la que representa la solución en la región del frente. La intersección J de C_f y C_p' (si existe) representa las variables antes del salto y la intersección J' de C_p y C_f' representa las variables después del salto (pues $J' = \mathcal{X}(J)$). Luego la trayectoria integral consta de dos partes discontinuas: FJ y $J'P$. Observemos que la posición de J sobre C_f depende de β ; recíprocamente, la posición de J' sobre C_p depende de \mathcal{F}_0 .

Para un dado β hay infinitas soluciones con salto, porque hay un intervalo de \mathcal{F}_0 para el cual las C_f se pueden conectar con un salto con C_p , dando lugar a soluciones Tipo III, que describen corrientes cuyos frentes tienen las mismas propiedades, pero son producidas por fuentes con diferente \mathcal{F}_0 . En las

corrientes Tipo III, β no determina unívocamente a \mathcal{F}_0 . Esto no significa que la solución no es única, sino que estamos en presencia de familias de corrientes producidas por fuentes de diferentes características, pero cuyos frentes tienen las mismas propiedades (o viceversa).

Soluciones discontinuas con una transición crítica (Tipo IV)

Cuando C_f y C_p no tienen puntos en común y además C_f y C_p' (o, lo que es equivalente, C_p y C_f') no tienen intersección, puede aún haber soluciones. Para eso es necesario que exista una curva integral especial \mathcal{K} , que interseque tanto a C_f' como a C_p' en sendos puntos J_1, J_2 . En tal caso hay una solución representada por una trayectoria integral que consta de tres partes discontinuas: el tramo FJ_1 de C_f , el tramo J_1J_2 de \mathcal{K} y el tramo J_2P de C_p . Puesto que \mathcal{K} es fija la posición de J_1 sobre C_f depende solo de β . Como C_f' y C_p' están en lados opuestos de la \mathcal{P}_c , la curva \mathcal{K} debe cruzarla en un punto singular para que pueda haber soluciones Tipo IV (esto justamente sucede para $\alpha < 1$ con la curva \mathcal{K} que cruza la \mathcal{P}_c en la silla C_3 , ver la Figura 2). En conclusión, las corrientes de Tipo IV tienen una región fuente supercrítica y una región fuente subcrítica, separadas por una región intermedia (representada por el tramo J_1J_2 de \mathcal{K}) donde hay una transición crítica continua: en C_3 el flujo pasa de subcrítico a supercrítico sin salto. sendos saltos hidráulicos empujan la región intermedia de la corriente con las regiones de la fuente y del frente.

Tal como ocurre para los Tipos II y III, dado un β tal que C_p se pueda conectar con \mathcal{K} mediante un salto, hay infinitas soluciones Tipo IV, porque hay un rango de \mathcal{F}_0 para el cual C_f se puede conectar con \mathcal{K} mediante un salto. Estas soluciones describen corrientes cuyos frentes tienen las mismas propiedades, pero que se originan en fuentes con diferentes \mathcal{F}_0 . Nuevamente \mathcal{F}_0 en está determinado por β , y tendremos familias de soluciones que describen corrientes producidas por fuentes diferentes, pero frentes con iguales propiedades.

Todas las corrientes Tipos (I-IV) son subcríticas cerca del frente. Pero cerca de la fuente pueden ser tanto subcríticas como supercríticas, según el valor de \mathcal{F}_0 . En la segunda parte del trabajo se determinan los intervalos de β y \mathcal{F}_0 en que se presentan los diferentes tipos de corriente, se estudiarán sus propiedades y se dará la interpretación física.

APENDICE

Resumimos las condiciones de validez de la teoría²⁰. Consideremos en primer lugar los efectos de la viscosidad (ν). La razón entre las fuerzas de inercia F_i y las fuerzas viscosas F_ν se puede estimar

como $F_i/F_\nu \approx (t/t_{tr})^{(4\alpha-7-5n)/(3+n)}$; el tiempo característico t_{tr} para el cual se hacen comparables es :

$$t_{tr} = \left(\frac{V^{n+3} g^{2n+2}}{q^4} \right)^{\frac{1}{4\alpha-7-5n}} ; \quad (A1)$$

el valor crítico $\alpha_c = (7+5n)/4$ determina cuándo domina la inercia y cuándo la viscosidad. El régimen inercial corresponde a:

$$t \gg t_{tr}, (\alpha > \alpha_c); t \ll t_{tr}, (\alpha < \alpha_c). \quad (A2)$$

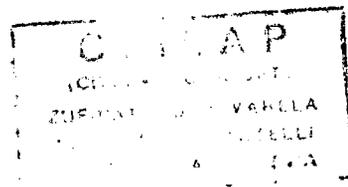
La aproximación de aguas poco profundas vale cuándo el espesor de la corriente es mucho menor que su longitud. Pero $h/x = t^{\delta-2}$, y será acotado si $\delta < 2$, lo que requiere

$$\alpha < 4 + 2n \quad (A3)$$

La misma condición garantiza la consistencia de la condición de contorno en el frente: la hipótesis de balance cuasiestático se viola si la aceleración del frente no se mantiene acotada. De $x_f(t) = bt^\delta \xi_f$ resulta $\ddot{x}_f(t) = \delta(\delta-1)bt^{\delta-2} \xi_f$. Luego como antes se requiere $\delta < 2$.

REFERENCIAS

1. T. Von Kármán, Bull. Am. Math. Soc. **46**, 615 (1940).
2. J.E. Simpson, Ann. Rev. Fluid Mech. **14**, 213 (1982).
3. J.E. Simpson, R.E. Britter, J. Fluid Mech. **94**, 477 (1979); H.E. Huppert, J.E. Simpson, J. Fluid Mech. **90**, 785 (1980); J.W. Rottman, J.E. Simpson, Fluid Mech. **135**, 95 (1983); J.W. Rottman, J.E. Simpson, Proc. IUTAM Symp. on Atmospheric Dispersion of Heavy Gases and Small Particles. Delft, The Netherlands (1984).
4. T. Maxworthy, J. Fluid Meth. **128**, 247 (1983).
5. H. Lamb, Hydrodynamics. Dover, New York (1945).
6. R.E. Britter, Atmos. Environ. **13**, 1241 (1979).
7. H.E. Huppert, J.E. Simpson, J. Fluid Mech. **90**, 785 (1980).
8. R.E. Grundy, J.W. Rottman, J. Fluid Mech. **169**, 337 (1986).
9. W.G. Penney, C.K. Thornhill, Phil. Trans. R. Soc. Lond. **A244**, 285 (1952).
10. ver por ejemplo L.D. Landau, E.M. Lifschitz, Fluid Mechanics. Pergamon Press, New York (1959).
11. C.S. Yih, C.R. Guha, Tellus **7**, 358 (1955).
12. C.S. Yih, Dynamics of Nonhomogeneous Fluids. Macmillan, New York (1965).
13. L.I. Sedov, Similarity and Dimensional Methods in Mechanics. Academic Press, New York (1959); R. Courant, K.O. Friedrichs, Supersonic Flow and Shock Waves. Interscience, New York (1948).
14. la analogía no vale para soluciones discontinuas pues las condiciones de salto hidráulico difieren de las condiciones de Rankine-Hugoniot para las ondas de choque en un gas.
15. sólo el semiplano $Z > 0$ tiene sentido físico.
16. además, para toda singularidad S , los valores $V=V_S, Z=Z_S$ representan una solución exacta aislada de las ecuaciones de la teoría de aguas poco profundas.
17. la constante K fija la escala de ξ y aparece porque (9), (10) dependen logarítmicamente de ξ .
18. la única que pasa por P .
19. el caso $\alpha=1$ no cumple esta regla, ver el trabajo siguiente.
20. H.E. Huppert, J. Fluid Mech. **121**, 43 (1982).



Recibido 05/06/96