

# CORRIENTES DE GRAVEDAD CON CAUDAL VARIABLE II: CORRIENTES PLANAS

**J. Gratton y C. Vigo**

*INFIP-CONICET, Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,  
Universidad de Buenos Aires Pabellón I, Ciudad Universitaria, 1428 Buenos Aires, Argentina.*

Se usa la teoría desarrollada en el trabajo anterior para estudiar las corrientes de gravedad planas autosemejantes. Hay cuatro tipos de soluciones: (I) continuas subcríticas, (II) continuas con transición crítica, (III) discontinuas, y (IV) discontinuas con transición crítica. La corriente es siempre subcrítica cerca del frente, pero cerca de la fuente es subcrítica para corrientes Tipo I, y supercrítica en el resto. Las corrientes Tipo I eran conocidas, pero los tipos, II, III y IV son novedosos. Se determinan los intervalos de parámetros donde hay soluciones y se discuten sus propiedades.

## I. INTRODUCCION

Usamos la teoría del trabajo anterior<sup>1</sup> para estudiar las corrientes de gravedad autosemejantes planas con volumen  $Q \sim q_\alpha t^\alpha$ ; la fuente está en el origen y se caracteriza por su caudal  $\dot{Q}$  y número de Froude  $\mathcal{F}_0$ . En el frente se cumple la condición  $\beta^2 h_f = u_f^2$ , que da cuenta de la resistencia ofrecida por el fluido ambiente en cuyo seno fluye la corriente ( $h$  y  $u$  dan la profundidad del fluido y  $\beta$  es un parámetro constante). Indicamos con ' los conjugados por salto hidráulico y con  $J$  los saltos;  $C_F \equiv C_F(\mathcal{F}_0)$  es una curva integral que sale del nodo  $F(V_F = \infty, Z_F = \infty)$  que representa la fuente  $C_p \equiv C_p(\beta)$  es la curva que llega al punto  $P(V_p = 1, Z_p = \beta^{-2})$  que representa el frente. Para estudiar los varios tipos de corrientes tratamos por separado los casos  $\alpha < 1^2$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $\alpha = 0$  y  $\alpha = 1$ ; en los dos primeros las soluciones son numéricas, en los dos otros son analíticas.

## II. FLUJOS CON CAUDAL CRECIENTE

La Fig. 1 muestra el plano de la fase para  $\alpha > 1$ .  $C_3$  es el nodo; hay dos curvas integrales con  $\mathcal{F}_0 = 1$ :  $L$  y  $M$ . Integrando la ecuación autónoma desde  $F$  con la condición  $\mathcal{F}_0 = 1$  se determina la intersección  $P_c$  de  $L$  con  $V=1$  y luego  $\beta_c$ .

### Soluciones continuas(Tipo I)

Si  $0 < \beta \leq \beta_c$  no cruza a  $P_c$  llega a  $F$  sin pasar por

singularidades y coincide con una  $C_p$ , con  $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_\beta < 1$ . Estas son las soluciones continuas conocidas<sup>3</sup>, para las que  $\beta$  determina un único  $\mathcal{F}_\beta$ . Todo el flujo es subcrítico: la resistencia del fluido ambiente influye la corriente hasta la fuente y  $\mathcal{F}_0 \beta$  deben ser compatibles.

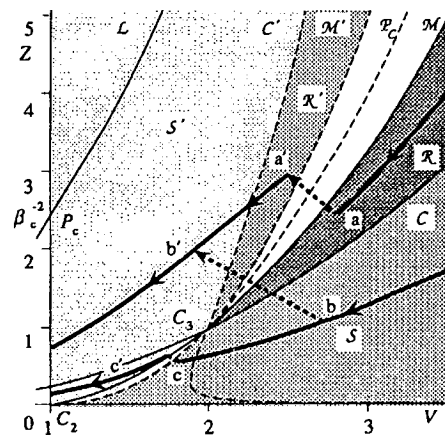


Fig. 1: Plano de fase para  $\alpha = 5/2$ ; a a', b b', c c' son trayectorias integrales de soluciones Tipo III.

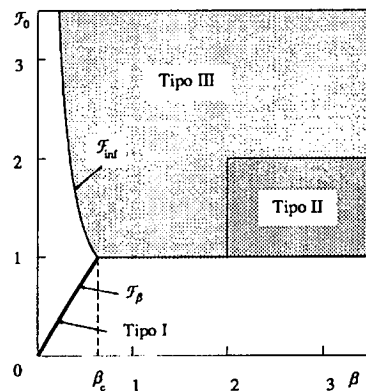


Fig.2: Caso  $\alpha > 1$ : intervalos de parámetros en que hay corriente de los diversos tipos; las curvas son para  $\alpha = 5/2$ .

\* Investigador del CONICET.

**Soluciones con una transición crítica (tipo III)**

Si  $\beta \geq 2$ ,  $C_p$  cruza la  $\mathcal{P}_c$  en  $C_3$  y la solución puede continuar hasta  $F$  de infinitas maneras: todas las  $C_F$  con a  $1 < \mathcal{F}_0 < 2$  llegan a  $C_3$ . Esas curvas yacen en la región  $\mathcal{R}$ , entre  $\mathcal{M}$  y la curva integral  $C(Z_c = V^2/4)$ . La corriente es supercrítica en el tramo  $FC_3$  y subcrítica en  $C_3P$ . Ahora  $\beta$  no determina  $\mathcal{F}_0$  porque la corriente supercrítica cerca de la fuente depende sólo de  $\mathcal{F}_0$ : la resistencia del fluido ambiente no lo afecta.

$\beta_{lim} (< \beta_c)$  sale de pedir que  $C_p(\beta_{lim})$  cruce  $C'$  en  $F^5$ . Si  $\beta < \beta_{lim}$ ,  $C_p$  no entra en  $\mathcal{R}$ ; si  $\beta > 2$  llega a  $C_3$  y da una corriente Tipo II. Además si  $\beta_{lim} < \beta < \beta_c$  hay corrientes Tipo III si  $\mathcal{F}_{inf} < \mathcal{F}_0 < 2$ , donde  $\mathcal{F}_{inf}(\beta)$  es el  $\mathcal{F}_0$  de la  $C_F$  que cruza en  $F$  a la  $C'_p$  para nuestro  $\beta$ ; si  $\beta_c < \beta < 2$  hay soluciones Tipo III si  $1 < \mathcal{F}_0 < 2$ .

(b) Si  $\mathcal{F}_0 > 2$ ,  $C_F$  está en la región  $\mathcal{S}$  (limitada por  $\mathcal{P}_c$ ,  $C$  y  $Z=0$ ) y cruza la  $\mathcal{P}_c$  antes de llegar a  $C_3$ . Siempre hay partes de  $C_p$  en  $\mathcal{S}'$  (limitada por  $V=1$ ,  $\mathcal{P}_c$  y  $C'$ ), luego hay soluciones discontinuas para todo  $\beta$  (ver las trayectorias b b', c c' de la Fig. 1): si  $\beta > \beta_{lim}$  hay soluciones para  $\mathcal{F}_0 > 2$ ; si  $\beta < \beta_{lim}$  las hay para  $\mathcal{F}_0 > \mathcal{F}_{inf}$ .

En las soluciones Tipo III la región  $FJ$  es supercrítica, detrás del salto (tramo  $J'P$ ) el flujo es subcrítico;  $\beta$  no determina  $\mathcal{F}_0$  porque los efectos de la resistencia del fluido ambiente no se propagan hasta la fuente ( $\beta$  determina la corriente sólo en la parte subcrítica  $J'P$ , mientras el resto depende sólo de  $\mathcal{F}_0$ ).

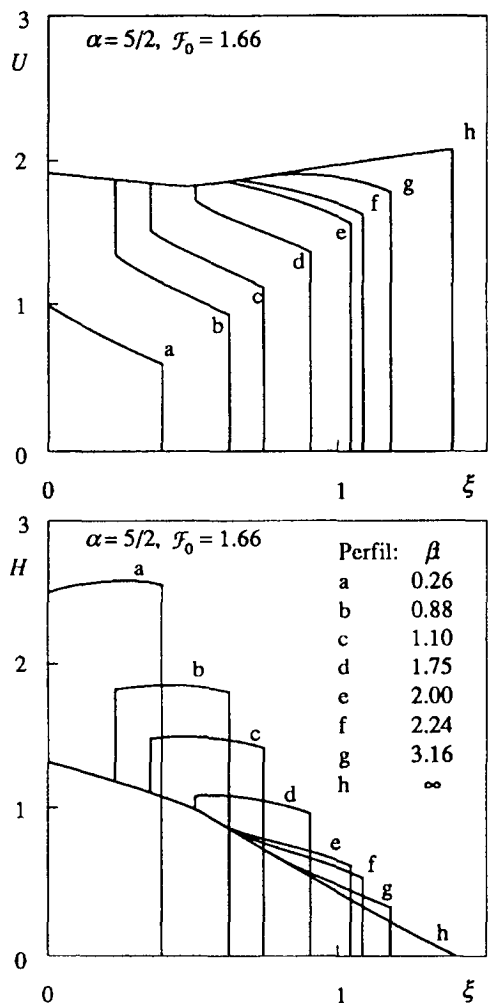


Fig. 3: Perfiles de corrientes con  $\alpha = 5/2$ ,  $\mathcal{F}_0 = 1.66$ . La solución a tiene un salto hidráulico en  $x = 0$ .

**Soluciones discontinuas (Tipo III)**

(a) Si  $1 < \mathcal{F}_0 < 2$ ,  $C_p$  está en  $\mathcal{R}$ , y  $C'_p$  está en  $\mathcal{R}'$  (entre  $C'$  y  $\mathcal{M}'$ ). Toda  $C_p$  que entra en  $\mathcal{R}'$  se conecta salto mediante<sup>4</sup> con alguna  $C_F$  (trayectoria integral a a' de Fig. 1). Pero  $C_p$  entra en  $\mathcal{R}'$  sólo si  $\beta_{lim} < \beta < 2$ , donde

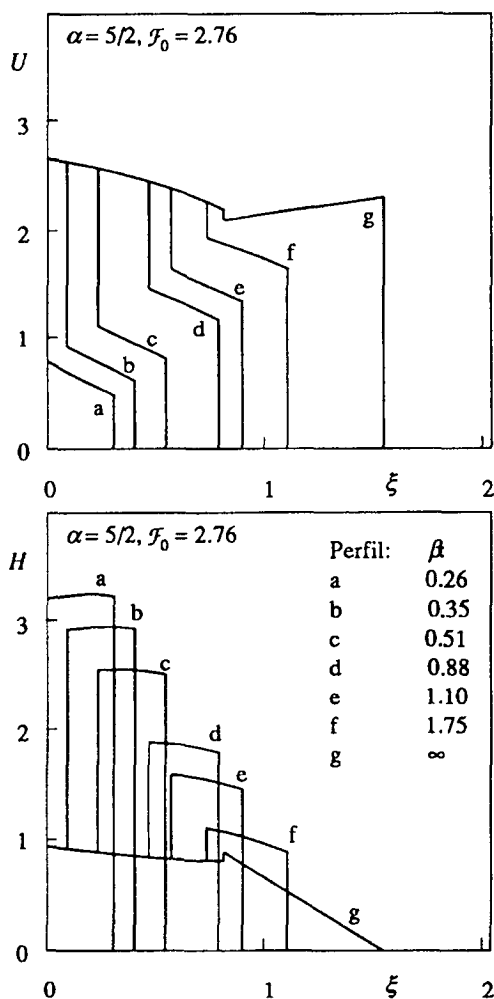


Fig. 4: Perfiles de corrientes con  $\alpha = 5/2$ ,  $\mathcal{F}_0 = 2.76$ . La solución a tiene un salto hidráulico en  $x = 0$ .

Los intervalos de  $\beta$  y  $\mathcal{F}_0$  para los diferentes tipos de corrientes se ven en la Fig. 2<sup>7</sup>. Las Fig. 3, 4 muestran algunos perfiles adimensionales de profundidad  $H = \delta^2 \xi^2 Z$  y velocidad  $U = \delta \xi V$ . Se ve que si  $0 < \beta \leq \beta_c$  hay para el mismo  $\beta$  (y diferentes  $\mathcal{F}_0$ ) una solución continua (con  $\mathcal{F}_0 < 1$ ). Todas coinciden cerca del frente y difieren cerca de la fuente. Además las soluciones discontinuas difieren entre sí en la posición del salto:  $J$  está muy cerca de la fuente cuando  $\mathcal{F}_0$  es próximo a  $\mathcal{F}_{inf}$ , y se desplaza hacia el frente a medida que crece  $\mathcal{F}_0$ . Cuando  $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{inf}$ ,  $J$  y  $F$  coinciden y no hay diferencia entre la solución "discontinua" y la solución Tipo I con el mismo  $\beta$  ( $\mathcal{F}_\beta$  es conjugado<sup>6</sup> de  $\mathcal{F}_{inf}$ ): las soluciones Tipo I se obtienen de las Tipo III cuando el salto llega a la fuente y la ahoga.

### III. FLUJOS CON CAUDAL DECRECIENTE

Cuando  $\alpha < 1$  (Fig. 5),  $C_3$  es una silla por donde pasan dos curvas integrales que cruzan la  $\mathcal{P}_c:C$  (que representa una solución continua especial para  $\beta = 2$ ) y  $\mathcal{K}$  que va de  $C_3$  a  $F$  sobre la  $\mathcal{P}_c$  y corresponde a  $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_\chi$  ( $\mathcal{F}_\chi \equiv \mathcal{F}_\chi(\alpha) < 1$  se determina por integración numérica). Su conjugada  $\mathcal{K}'$  permite definir  $\mathcal{F}'_\chi = (1 < \mathcal{F}'_\chi < 2)^8$ .

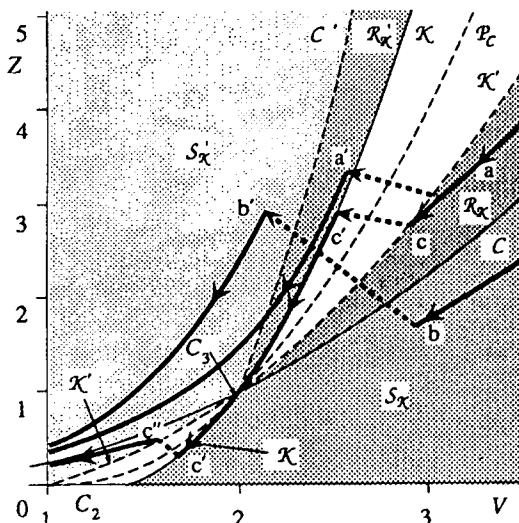


Fig. 5: Plano de fase para  $\alpha=1/4$ ; a a', b b' son trayectorias Tipo III, c c' c'' representa una solución Tipo IV.

#### Soluciones Continuas (Tipo I)

Cuando  $\beta < 2$ ,  $C_p$  llega a  $F$  sin cruzar la  $\mathcal{P}_c$  y vale lo dicho para  $\alpha > 1$ . Estas soluciones ya se conocían<sup>3</sup>; para ellas  $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_\beta < \mathcal{F}_\chi < 1$ .

#### Soluciones discontinuas (Tipo III)

(a) Si  $\mathcal{F}'_\chi < \mathcal{F}_0 < 2$ ,  $C_F$  está en  $\mathcal{R}$  y cruza la  $\mathcal{P}_c$  arriba de  $C_3$ . Su conjugada  $C'_F$  está en  $\mathcal{R}'$ . Sólo las  $C_p$  que entran en la subregión  $\mathcal{R}'_\chi$  (entre  $\mathcal{K}$  y  $C'$ ) se conectan salto mediante con las  $C_F$  que entran en  $\mathcal{R}_\chi$  (entre  $\mathcal{K}$  y  $C$ , trayectoria a a' de Fig. 5). Pero  $C_p$  entra en  $\mathcal{R}'_\chi$  sólo si  $\beta_{lim} < \beta < 2$  y entonces se puede conectar con las  $C_F$  con  $\mathcal{F}_0 \mathcal{F}_{inf} \geq \mathcal{F}'_\chi$ ; si  $\beta < \beta_{lim}$ ,  $C_p$  no entra en  $\mathcal{R}'_\chi$ ; si  $\beta > 2$ , cruza la  $\mathcal{P}_c$  debajo de  $C_3$ .

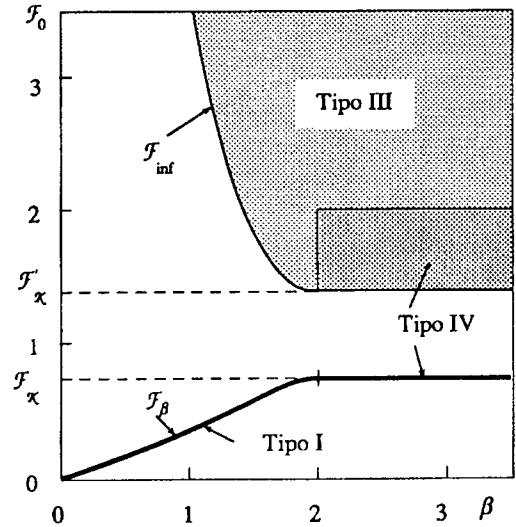


Fig. 6. Caso  $\alpha > 1$ : intervalos de parámetros en los que hay corrientes de los diversos tipos; las curvas son para  $\alpha=1/4$ .

(b) Cuando  $\mathcal{F}_0 > 2$  las  $C_F$  están  $S_\chi$  (limitada por  $C$ ,  $\mathcal{K}$  y  $Z=0$ ) y van de  $F$  a  $C_1$ . Siempre hay partes de  $C_p$  en  $S'_\chi$  y hay soluciones Tipo III<sup>4</sup> si  $\mathcal{F}_0 > \mathcal{F}_{inf}$  (trayectoria b b' en la Fig. 5). Las propiedades de estas corrientes análogas al caso  $\alpha > 1$ . Si  $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{inf}$  el salto está en  $\xi=0$ ; esta solución discontinua coincide con la solución Tipo I del mismo  $\beta$ .

#### Soluciones discontinuas con una transición crítica (Tipo IV)

Cuando  $\mathcal{F}'_\chi < \mathcal{F}_0 < 2$ ,  $C'_F$  cruza  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{K}'$  (luego de cruzar la  $\mathcal{P}_c$  en  $C_3$ ) interseca todas las  $C_p$  con  $\beta > 2$ . Hay pues soluciones Tipo IV<sup>4</sup> (trayectoria c c' c'', Fig. 5). Cuando el primer salto está en  $x=0$  las trayectorias constan de tramos  $FJ_2$  de  $\mathcal{K}$  y  $J_2P$  de  $C_p$  ( $\beta > 2$ ) y tienen  $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_\chi$ . Los intervalos  $\beta$  y  $\mathcal{F}_0$  para las corrientes con  $\alpha < 1$  se ven en la Fig. 6. En las Fig. 7, 8 se representan perfiles de  $H$  y  $U$ . Igual que para  $\alpha > 1$  si  $0 < \beta \leq 2$  hay para el mismo  $\beta$  (pero diferentes  $\mathcal{F}_0$ ) una solución continua (con  $\mathcal{F}_0 < 1$ ) e infinitas soluciones

discontinuas (con  $\mathcal{F}_0 > 2$  si y  $0 < \beta \leq \beta_{lim}$ , y  $\mathcal{F}_0 > \mathcal{F}_\alpha'$  si  $\beta_{lim} < \beta < 2$ ), todas idénticas cerca del frente, pero diferentes en la región fuente; las soluciones discontinuas difieren entre sí porque el salto se desplaza hacia el frente al aumentar  $\mathcal{F}_0$ . A diferencia del caso  $\alpha > 1$ , ahora no hay soluciones para  $\beta = \infty$ . Para todo  $\beta$  finito hay soluciones, pero no ocurre lo mismo para  $\mathcal{F}_0$ : no hay corrientes con  $\mathcal{F}_\alpha < \mathcal{F}_0 < \mathcal{F}_\alpha'$ .

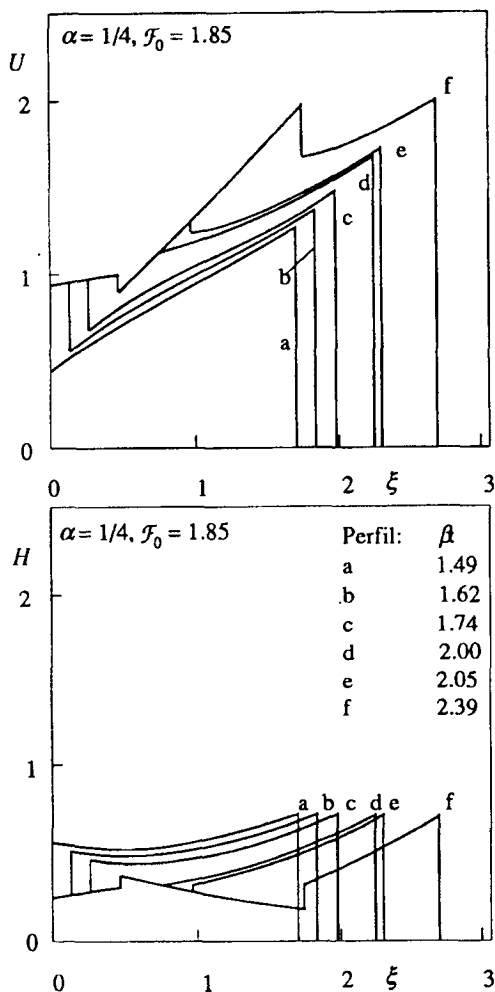


Fig. 7: Perfiles de corrientes con  $\alpha=1/4, \mathcal{F}_0=1.85$ . La solución a tiene un salto hidráulico en  $x=0$

#### IV. FLUJOS CON VOLUMEN CONSTANTE

Las corrientes con  $\alpha=0, \beta < 2$  ya se conocían<sup>9</sup>; además hay soluciones para  $\beta \geq 2$ .

Cuando  $\alpha=0$  la curva integral que interesa es  $V=1$ , donde hay 3 puntos singulares<sup>10</sup>:  $E(V_E=1, Z_E=\infty$  y  $\xi=0, h=h_0$  finito,  $u=0)$ ,  $B(V_B=1, Z_B=1/4, \xi, u, h=\infty)$  y  $C_2(V_{C_2}=1, Z_{C_2}=0, \xi=\xi_0, h=0, u$  finito). Sobre  $V=1$ ,

$\xi = K \left| Z - \frac{1}{4} \right|^{-1/2}$ ,  $K = \text{cte.}$ . Por lo tanto las soluciones con  $Z > 1/4$  son de la forma  $V=1, Z=1/4+(K/\xi)^2$  y las con  $Z < 1/4$  son  $V=1, Z=1/4-(K/\xi)^2$ . Entonces:

(a) si  $\beta < 2$  tomamos el segmento  $EP$ ; con  $K=(\xi_f/2) \sqrt{4/\beta^2-1}$ ,  $\xi_f=[27\beta^2/(12-2\beta^2)]^{1/3}$  sale  $u=2x/3t, h=(x/3t)^2[1+(4/\beta^2-1)(\xi_f/\xi)^2]$ ;  $h_0$  es menor que  $h_f$ . Si  $\beta \rightarrow 2, \xi_f \rightarrow 3$  y  $h_0 \rightarrow 0$ .

(b) Cuando  $\beta=2$  la corriente se obtiene de la solución especial aislada ( $V_B, Z_B, \xi_f=3$ ):  $u=2x/3t, h=(x/3t)^2, x < x_f$ . La profundidad se anula en  $x=0$ .

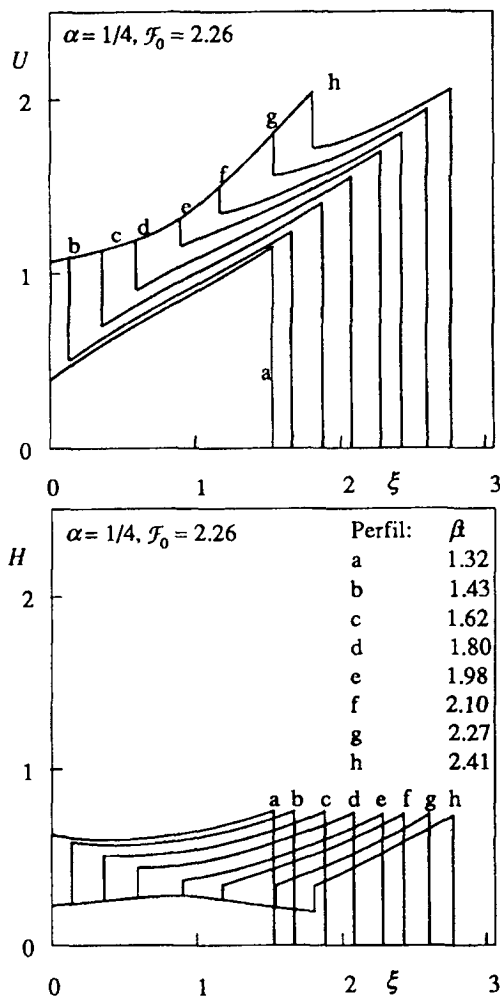


Fig. 8: Perfiles de corrientes con  $\alpha=1/4, \mathcal{F}_0=2.26$ . La solución a tiene un salto hidráulico en  $x=0$ .

(c) Si  $\beta > 2$  no podemos llegar  $E$ : usamos el segmento  $C_2P$ ; con  $\xi_0 = \xi_f \sqrt{(1-4/\beta^2)}$ ,  $\xi_f = [27\beta^2 / \{12 - 2\beta^2[1 - (1-4/\beta^2)^{3/2}]\}]^{1/3}$ ,  $K = \xi_0 / 2$

sale  $u=2x/3t$ ,  $h=(x/3t)^2[1-(\xi_0/\xi)^2]$ ,  $\xi_0 \leq \xi \leq \xi_f$ ;  $h$  es nulo para  $0 < \xi < \xi_0$ .

Los perfiles de profundidad de corrientes con  $\alpha=0$  se muestran en la Fig. 9. Notar que no hay soluciones con  $\beta = \infty$ .<sup>11</sup>

## V. FLUJOS CON CAUDAL CONSTANTE

Cuando  $\alpha=1$  las curvas integrales son parábolas  $Z=(V/\mathcal{F}_0)^2$  con vértice en el origen del plano fase<sup>12</sup> y  $\xi=\mathcal{F}_0^{2/3}/V$ . Representan flujos uniformes con  $u=\mathcal{F}_0^{-2/3}$ ;  $\xi$  no es extremo sobre la  $\mathcal{P}_c$  que se puede cruzar siguiendo dichas curvas. Además la  $\mathcal{P}_c$  es una curva integral especial con  $Z=(V-1)^2$ ,  $\xi=K|V-2/3|^{-1}$ ,  $K=\text{cte.}$ , que representa transiciones críticas ( $\mathcal{F}=1$ ) entre regiones de diferentes profundidad y velocidad, análogas a las ondas autosemejantes de expansión o compresión de un gas<sup>13</sup>:  $\xi$  crece yendo de  $F$  a  $B$  ( $V_B=2/3$ ,  $Z_B=1/9$ ,  $\xi_B = \infty$ ) sobre la  $\mathcal{P}_c$ .

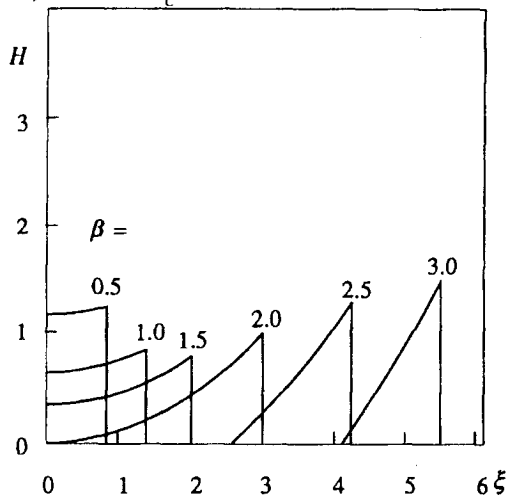


Fig. 9: Perfiles de corrientes con  $\alpha=0$

Las soluciones comprenden los flujos uniformes ya conocidos<sup>3</sup> y corrientes que constan de regiones flujo uniforme, de acuerdo con las condiciones de contorno, conectadas con saltos hidráulicos y transiciones críticas.

### Corrientes uniformes

Resulta  $\mathcal{F}_0=\beta$ ,  $\xi_f = \beta^{2/3}$ , y las soluciones son  $u=(q_1\beta^2)^{1/3}$ ,  $h=(q_1/\beta)^{2/3}$ ,  $x_f=\beta^{2/3}$  para todo  $\beta$  incluyendo  $\beta=\mathcal{F}_0 > 1$  pues se puede cruzar la  $\mathcal{P}_c$ <sup>14</sup>. Estas soluciones son del Tipo I.

### Corrientes con transiciones críticas

Si  $C_F$  tiene  $\mathcal{F}_0 > 1$  y cruza la  $\mathcal{P}_c$  en  $T$ , hay una familia de trayectorias integrales que constan del tramo  $FT$ , más un arco  $TT'$  de la  $\mathcal{P}_c$  (con  $T'$  entre  $T$  y  $B$ , pues  $\xi$  debe crecer) y un tramo  $T'P$  de una corriente uniforme con  $\mathcal{F}_0' > \mathcal{F}_0$ . Luego si  $FTP$  representa una corriente uniforme por un dado  $\beta$ , hay infinitas soluciones con transiciones críticas que tienen el tramo  $FT$  en común con ella, pero difieren cerca del frente, donde son corrientes uniformes con otros discontinuas que tienen en común con ella partes de  $\beta' > \beta$ . Entre las partes uniformes hay una región intermedia crítica dada por el arco  $TT'$ . Un caso especial  $\beta = \infty$  consta del arco  $FC_2$  de  $\mathcal{P}_c$  sin partes uniformes: es la solución del problema clásico de la rotura de un dique<sup>15</sup>. Estas corrientes tienen analogías con las corrientes de caudal variable Tipo II y IV.

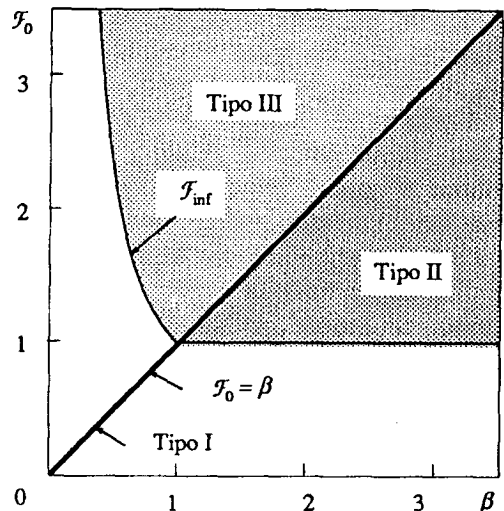


Fig. 10: Corrientes con caudal constante: intervalos de  $\mathcal{F}_0$  y  $\beta$  en que aparecen las diferentes corrientes.

### Corrientes discontinuas

Si  $C_F$  tiene  $\mathcal{F}_0 > 1$  hay una familia de soluciones discontinuas representadas por tramos  $FJ$  de  $C_F$  que van de  $F$  a puntos  $J$  debajo de la  $\mathcal{P}_c$  donde hay saltos hidráulicos, y tramos  $J'P$  de otras corrientes uniformes con  $\mathcal{F}_0' < \mathcal{F}_0$ . Luego, si  $FTP$  representa una corriente uniforme para un dado  $\beta$ , hay infinitas soluciones discontinuas que tienen en común con ella partes de  $C_F$ , pero cerca del frente son corrientes uniformes con otros  $\beta' < \beta$ . Las partes uniformes empalman mediante un salto. Cuando  $\beta > 1$  hay soluciones de este tipo si  $\mathcal{F}_0 > \beta$ . Para  $\beta < 1$  las hay si  $\mathcal{F}_0 > \mathcal{F}_{inf} = \beta[2/\phi(\beta)]^{3/2}$ .

En la Fig. 10 mostramos los intervalos de  $\beta$  y  $\mathcal{F}_0$  para las diferentes corrientes con  $\alpha=1$  y en la Fig. 11 damos algunos perfiles.

## VI. COMENTARIOS FINALES

¿Qué sentido físico tienen las autosemejanzas (a.s.) obtenidas aquí? Las a.s. son soluciones exactas de problemas “degenerados”;<sup>16</sup> su interés reside en que revelan la asintótica intermedia<sup>17</sup> de problemas reales no degenerados. Cuando las soluciones se construyen directamente (y no a partir de un problema de valores iniciales y siguiendo su evolución hasta su asintótica intermedia) no queda claro que problemas no degenerados corresponden, pues por sí ofrecen pocos indicios de ello; en realidad, ni siquiera podemos asegurar de antemano que el problema original corresponda a un experimento real. Por suerte las a.s. obtenidas con el método del plano de fase tienen siempre sentido físico (no nos constan excepciones), aunque a veces corresponden a condiciones iniciales y de contorno algo bizarras<sup>18</sup>; igualmente, hasta encontrar el problema de valores iniciales cuya asintótica intermedia intermedia representan, no podemos asegurar que tengan sentido físico. Un análisis completo y riguroso de este tema excede el presente trabajo, pero igualmente diremos unas palabras al respecto.

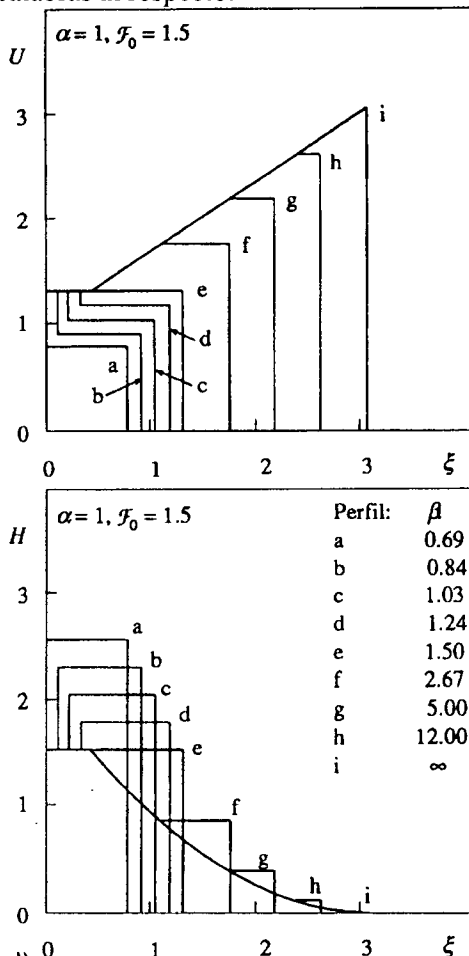


Fig. 11: Perfiles de corrientes con  $\alpha=1, \mathcal{F}_0=1.5$ ; la solución a tiene un salto hidráulico en  $x=0$ .

Las corrientes autosemejantes con caudal creciente son regulares en  $t \rightarrow 0$ . No hay dificultad en imaginar un problema no degenerado en que  $Q = q_\alpha t^\alpha$  para  $t \geq 0$  y ciertamente hay problemas de valores iniciales cuya asintótica intermedia está dada por nuestras soluciones. Por razones físicas esperamos que el tipo de corriente dependerá del carácter (discontinuo o no) del empalme entre las partes determinadas por la fuente y por el frente. Dicho empalme dependerá de la extensión de la región de influencia del frente, que para  $\beta$  (o  $\mathcal{F}_0$ ) suficientemente pequeño ahoga la fuente dando corrientes Tipo I. Cuando la fuente no está ahogada,  $\beta$  y  $\mathcal{F}_0$  se pueden elegir independientemente (Tipos II y III). Estos es justamente lo que se encuentra. Comentarios semejantes se pueden hacer para corrientes con caudal y volumen constante.

Cuando  $\alpha < 1$  el problema se complica porque en un caso real no podemos cumplir  $Q = q_\alpha t^\alpha$  en  $t=0$  ( $\dot{Q}$  es singular). Al formular el problema de valores iniciales no degenerado hay que imaginar que cuando la fuente comienza la ley de potencias, hay una corriente preexistente (la fuente se debe haber abierto previamente) con un volumen  $Q_0 \neq 0$  y ciertos perfiles de  $u$  y  $h$  (que dependen de la historia previa) que por supuesto no serán autosemejantes; entonces en  $t=t_0$  comenzamos a cerrar la fuente, de modo que  $Q(t)=Q_0(t/t_0)^\alpha$  para  $t > t_0$ . Esperamos que nuestras soluciones describan la asintótica intermedia de este problema para  $t > t_0$ .<sup>19</sup> Es lógico que ahora el empalme entre las partes de la corriente determinadas por la fuente y por el frente sea más complicado que antes, porque en la transición a la asintótica intermedia quedan ciertos efectos de las condiciones iniciales (mientras la mayoría de los detalles del flujo preexistente pierden relevancia) que se manifiestan en la solución autosemejante. Consideremos, por caso, la región intermedia de las corrientes Tipo IV: formalmente es necesaria porque las partes del frente y de la fuente no se pueden empalmar directamente como en las corrientes Tipo II y III, pero físicamente su causa no es obvia. La región intermedia es muy peculiar: está siempre dada por la misma curva  $\mathcal{K}$ ; el flujo intermedio no depende ni de las propiedades de la fuente ni de las del frente (que sólo determinan la posición de los saltos sobre  $\mathcal{K}$ ). En otras palabras no depende de las condiciones de contorno. Es lógico inferir que la región intermedia es consecuencia de las condiciones iniciales.

Resumimos ahora nuestras conclusiones.

Para evitar ambigüedades (las soluciones “no únicas” según otros autores<sup>3</sup>) hay que caracterizar la

frente dando  $\mathcal{F}_0$  además del caudal. Para obtener las autosemejanzas es también necesario también considerar soluciones con saltos hidráulicos. Hay entonces soluciones para toda combinación (compatible) de condiciones de contorno en la fuente y en el frente.

Hay 4 tipos de corrientes autosemejantes: continuas (Tipo I), con una transición crítica (Tipo II), discontinuas (Tipo III), y discontinuas con una transición crítica (Tipo IV). Cerca del frente la corriente es siempre subcrítica, pero cerca de la fuente es subcrítica en el Tipo I y supercrítica en los demás. Las soluciones Tipo I ya se conocían<sup>3</sup>, pero los Tipos II, III y IV son novedosos.

Hay corrientes Tipo I sólo en ciertos intervalos de  $\beta$ , y además  $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_\beta$ , porque al región de influencia del frente llega hasta la fuente. Hay una estrecha relación entre las corrientes de Tipo I y III: cuando el salto hidráulico de una corriente Tipo III se acerca a la fuente y la ahoga, se obtiene una corriente Tipo I.

Hay corrientes Tipo II si  $\alpha > 1, \beta > 2$ , y  $1 < \mathcal{F}_0 < 2$ . Se caracterizan porque la transición entre el flujo fuente y el flujo frente es continua. La fuente está fuera del dominio de influencia del frente y  $\beta$  no determina  $\mathcal{F}_0$ .

Las corrientes Tipo III ocurren para  $\alpha, \beta$  cualesquiera si  $\mathcal{F}_0$  es suficientemente grande y si no estamos en el rango de  $\alpha, \beta, \mathcal{F}_0$  de los Tipos II y IV. Estas soluciones tienen una discontinuidad, la fuente está fuera del dominio de dependencia del frente y  $\beta$  no determina  $\mathcal{F}_0$ .

Hay corrientes Tipo IV si  $\alpha < 1, \beta > 2, 1 < \mathcal{F}_0 < 2$ . Tienen una compleja transición entre el flujo fuente y el flujo frente: primero, un salto hidráulico conecta la parte fuente con un flujo intermedio subcrítico, luego hay una transición a una región intermedia supercrítica, finalmente un segundo salto hidráulico conecta la región intermedia con la del frente. Igual que en los Tipos II y III, la fuente está fuera del dominio de influencia del frente y  $\beta$  no determina  $\mathcal{F}_0$ .

Cuando el volumen es constante hay corrientes Tipo I para todo  $\beta$  finito; además de las ya conocidas<sup>3</sup> con  $\beta < 2$  hay corrientes con  $\beta \geq 2$ , con una región seca cerca del origen.

Para caudal constante además de corrientes uniformes<sup>3</sup>, hay para todo  $\beta$  corrientes discontinuas o con transiciones críticas si  $\mathcal{F}_0 > 1$ .

En resumen, para cualquier  $\beta$  hay una familia de soluciones autosemejantes que describen las corrien-

tes producidas por fuentes con diferentes combinaciones de  $\alpha$  y  $\mathcal{F}_0$ . Solo cuando la corriente es toda subcrítica (Tipo I)  $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_\beta$ . En los otros casos se pueden elegir  $\beta$  y  $\mathcal{F}_0$  independientemente.

## REFERENCIAS

1. J. Gratton, C. Vigo, Anales AFA, este volumen.
2. basta considerar  $1 < \alpha < 4$  (la teoría vale sólo si  $\alpha < 4$ ).
3. R. E. Grundy, J. W. Rottman, J. Fluid Mech. **169**, 337 (1986).
4. la manera de construir la trayectoria se describe en el trabajo anterior.
5.  $C_p(\beta_{lim})$  tiene  $\mathcal{F}_0 = 2^{5/2} [\sqrt{33-1}]^{-3/2}$
6.  $\mathcal{F}_{inf} = \mathcal{F}_\beta [2 / \phi(\mathcal{F}_\beta)]^{3/2}$ ,  $\phi(x) = \sqrt{(1+8x^2)-1}$ , ver el trabajo anterior.
7. Si  $\beta = \infty$  (corrientes en el vacío) la región del frente está dada por la curva integral que une  $C_2$  y  $C_3$ .
8. resulta  $\mathcal{F}'_x = \mathcal{F}_x [2 / \phi(\mathcal{F}_x)]^{3/2}$ .
9. fueron halladas por T. K. Fannelop, G. D. Waldman, G. D., AIAA J. **10**, 506 (1972) y D. P. Hoult, Ann. Rev. Fluid Mech. **4**, 341 (1972) y vueltas a obtener con el método del plano de fase por R. E. Grundy, J. W. Rottman, J. Fluid Mech. **169**, 337 (1986).
10. ver la Tabla 1 del trabajo anterior
11. el derrame en un vacío de un volumen constante de un líquido no tiene una asintótica intermedia autosimilar (J. Gratton, *Corrientes de gravedad autosimilares*, notas inéditas (1988)); el problema es análogo a la expansión libre de la masa finita de un gas (ver K. P. Stayukovich, *Unsteady Motion of Continuous Media*. Pergamon, London, 1960).
12. si  $\alpha = 1, \Delta_1 = -V\Delta, \Delta_2 = -2Z\Delta$  y las ecuaciones se integran dando  $Z = (V/\mathcal{F}_0)^2$  y  $\xi = \mathcal{F}_0^{2/3} / V$ , que no es extremo sobre la  $\mathcal{P}_c$ .
13. el problema equivalente de la dinámica de gases se discute en J. Gratton, Found. Cosmic Phys. **15**, 1 (1991).
14. en este caso hay una transición crítica, y la fuente está fuera de la región de influencia del frente.
15. ver G. B. Witham, *Linear and Nonlinear Waves*. Willey, New York, 1974.
16. G. I. Barenblatt, *Similarity, Self-Similarity, and Intermediate Asymptotics*. Consultants Bureau, New York & London, (1979).
17. cuando el sistema ha evolucionado hasta alguno de los parámetros constantes no es más relevante.

18. ver por ejemplo J. Gratton, F. Minotti, J. Fluid Mech. **210**, 155, (1990).  
19. mucho después que la características  $C_+$  que emanó

de la fuente en  $t=t_0$  ha llegado al frente de la corriente, cuando  $Q(t) \gg Q_0$  y los detalles de los perfiles en  $t=t_0$  ya son relevantes.

CEILAP  
CITEFA - CONICET  
ZUFRIATEGUI Y VARELA  
1603 - VILLA MARTELLI  
REPUBLICA ARGENTINA