

# CRECIMIENTO DE RAICES DE CULTIVOS CON COMPETENCIA PARA IONES MOVILES A TRAVES DEL METODO DEL BALANCE INTEGRAL

**J.C.Reginato,**

*Departamento de Química-Física, Facultad de Ciencias Exactas Físico-Químico y Naturales, Universidad Nacional de Río Cuarto, Enlace rutas 8 y 36, km. 603, 5800 Río Cuarto.*

**D.A.Tarzia**

*Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Empresariales, Programa Matemáticas Rosario (CONICET) Universidad Austral, Moreno 1056, 2000 Rosario.*

**M.A.Dzioba**

*Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químico y Naturales, Universidad Nacional de Río Cuarto, enlace rutas 8 y 36, km 603, 5800 Río Cuarto.*

Se estudia un modelo de crecimiento de raíces con competencia de raíces a través de un problema de frontera libre. Son estudiados los efectos resultantes de diferencias en disponibilidad y transporte de nutrientes móviles entre la superficie de la raíz y el borde rizosférico producidos por una absorción activa tipo Michaelis-Menten para bajas y altas concentraciones. Las ecuaciones del modelo son resueltas mediante el método del balance integral y las soluciones numéricas son usadas para estimar el crecimiento radial de la raíz así como para calcular la concentración de nutriente en la interfase raíz-suelo. Gráficos de radio raíz vs. tiempo y concentración interfase vs. radio raíz son presentados en función de algunos parámetros característicos del sistema suelo-planta. Los resultados muestran similitud con los resultados para iones poco móviles aunque el efecto de ciertos parámetros como el poder de absorción difiere notablemente con una implicancia importante en el manejo nutricional de cultivos.

## INTRODUCCION

Uno de los métodos para estudiar la toma de nutrientes por raíces de plantas, el cual puede ser un método satisfactorio para modelar el sistema suelo-planta, es aquel que hace uso de ecuaciones diferenciales parciales para los flujos difusivo y convectivo hacia la raíz [1,2,3] y en artículos recientes un método para calcular el crecimiento radial de raíces ha sido propuesto [4,5]. El objetivo del presente trabajo es estimar el mismo por el método del balance integral [7] para iones móviles a bajas y altas concentraciones.

## ANALISIS

Debido al complicado escenario del sistema suelo-planta fue elegido un idealizado modelo unidimensional de difusión-convección para este estudio. Se supone una raíz cilíndrica vertical sumergida en un suelo homogéneo e isótropo. Las condiciones de humedad, temperatura y luz son constantes. La toma de nutrientes ocurre en la zona de absorción de la raíz y es descripta por una cinética tipo Michaelis-Menten. Pelos radicales no

son considerados. El transporte de nutriente ocurre vía convección y difusión radial unicamente. El influjo máximo ( $J_m$ ) y la constante de Michaelis-Menten ( $K_m$ ) son independientes de la velocidad de solución suelo sobre la raíz ( $v_0$ ). El coeficiente de difusión ( $D$ ) y el poder *buffer* ( $b$ ) son independientes de la concentración. La producción o depleción de microorganismos es considerada nula y todo el nutriente que arriba a la raíz es asimilado para el crecimiento. Para poder calcular  $C(s(t),t)$  como una función explícita de  $s(t)$  y  $t$  así como  $s(t)$  para un rango general de concentraciones, las ecuaciones que gobiernan el transporte masal y difusivo de nutriente hacia la raíz [3] y las ecuaciones que controlan el crecimiento son dadas en el siguiente problema de frontera libre (en coordenadas cilíndricas) por:

$$\begin{aligned}
 & \text{i) } DC_r + D(1+\epsilon) C_r/r = C_t & , s(t) < r < R_1, 0 \leq t \leq T, \\
 & \text{ii) } C(r,0) = \Phi(r) & , s_0 \leq r \leq R_1, \\
 & \text{iii) } -DbC_r(R_1,t) + v_0C(R_1,t) = 0 & , 0 \leq t \leq T, \\
 & \text{iv) } DbC_r(s(t),t) + v_0C(s(t),t) = \frac{kC(s(t),t) \cdot E}{1+kC(s(t),t)/J_m} = aC(s(t),t)s(t), & , 0 < t < T, \\
 & \text{v) } s(0) = s_0 & , 0 < s_0 < R_1
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

donde  $C_r = \partial C / \partial r$ ,  $C_{rr} = \partial^2 C / \partial r^2$ ,  $C_t = \partial C / \partial t$ ,  $r$  es la coordenada posición,  $t$  el tiempo,  $T$  es el tiempo para el cual existe solución, i) es la ecuación de Cushman, la cual es una simple aplicación del principio de conservación de masa en suelo, ii) es la concentración inicial, y iii) es la condición de contorno sobre el radio rizósferico teniendo en cuenta la competencia entre raíces (puede entrar agua pero no iones extras), iv) son las condiciones sobre la interfase raíz-suelo representando el balance de masa, y v) es la condición inicial para la frontera libre  $s(t)$  (interfase raíz-suelo o radio raíz).  $\dot{s}(t) = ds(t)/dt$  es la velocidad de la interfase,  $a$  es un coeficiente estequiométrico,  $R_1$  es el radio rizósferico, y  $s_0$  es el radio inicial. El parámetro  $\epsilon$  está dado por  $\epsilon = v_0 s_0 / Db > 0$ .  $\Phi(r)$  es el perfil inicial de concentraciones (dado por la ecuación (11) abajo). Las dos condiciones (1-iv) pueden ser escritas como:

$$C_r(s(t), t) = g(C(s(t), t)) \quad (2)$$

$$\dot{s}(t) = f(C(s(t), t)), \quad t > 0 \quad (3)$$

donde las funciones  $g$  y  $f$  están dadas por:

$$g(C) = \frac{1}{Db} \left[ \frac{kC}{1 + kC/J_m} - E - v_0 C \right] \quad (4)$$

$$f(C) = \frac{1}{a} \left[ \frac{k}{1 + kC/J_m} - \frac{E}{C} \right] \quad (5)$$

las cuales satisfacen las siguientes propiedades:

$$g(C) > 0 \Leftrightarrow C_m^- = \frac{-J_m + \delta^2(J_m - E) - d}{2k} < C < C_m^+ = \frac{-J_m + \delta^2(J_m - E) + d}{2k} \quad (6)$$

donde

$$d = \sqrt{[-J_m + \delta^2(J_m - E)]^2 - 4\delta^2 J_m E}$$

con la hipótesis:

$$\delta^2 = \frac{k}{v_0} > 0, \quad \frac{E}{J_m} < \left(1 - \frac{1}{\delta^2}\right)$$

y:

$$f(C) > 0 \Leftrightarrow C > C_p = \frac{E}{k[1 - E/J_m]} \quad (7)$$

con la hipótesis:  $(E/J_m) < 1$ .

Para resolver (1) esto es, calcular  $C = C(r, t)$ , y en particular,  $C = C(s(t), t)$  y la frontera libre  $r = s(t)$  (desconocida a priori) aplicamos el método del balance integral [6,7,8] al presente caso de crecimiento de raíces. La solución se encuentra integrando la ecuación diferencial parcial (1-i) en  $r$  sobre el dominio  $(s(t), R)$ . Así resulta:

$$\int_{s(t)}^{R_1} C_t(r, t) dr = D \int_{s(t)}^{R_1} C_{rr}(r, t) dr + D(1 + \epsilon) \int_{s(t)}^{R_1} \frac{C_r(r, t)}{r} dr \quad (8)$$

y proponemos:

$$C(r, t) = \Phi(r) [1 + \beta(t) (R_1 - r)^2] \quad (9)$$

la cual depende de los parámetros del sistema y satisface las condiciones iniciales y de contorno 1-i) and 1-iii), esto es:

$$C(r, 0) = \Phi(r) \Leftrightarrow \beta(0) = 0 \quad (10)$$

$$C(R_1, t) = \Phi(R_1) \Leftrightarrow \Phi(R_1) = \frac{Db}{v_0} C_r(R_1, t) \quad (11)$$

Definiendo  $\alpha = \alpha(t)$  por:

$$\alpha(t) = C(s(t), t) = \Phi(s(t)) [1 + \beta(t) (R_1 - s(t))^2] \quad (12)$$

la cual depende de los parámetros del sistema a través de  $s(t)$ ,  $\Phi(s(t))$  y  $\beta(t)$ , y reemplazando (12) en la Ec.(8), después de manipulaciones elementales, el problema (1) se reduce a:

$$\int_{s(t)}^{R_1} C_r(r,t) dr = D [ C_r(R_1,t) - s(\alpha(t)) ] + D(1+\varepsilon) \left[ \frac{C(R_1,t)}{R_1} - \frac{\alpha(T)}{s(t)} + \int_{s(t)}^{R_1} \frac{C(r,t)}{r^2} dr \right], \quad (13)$$

con  $t > 0$ , y

$$t > 0$$

$$\dot{s}(t) = f(\alpha(t)),$$

$$s(0) = s_0.$$

Reemplazando (9) en la Ec.(13) y haciendo la aproximación de bajas concentraciones ( $J=kC$ ), después de manipulaciones elementales obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias fuertemente acopladas (válidas para los casos  $\varepsilon \neq 1, 2, 3$ ):

$$\frac{d\beta(t)}{dt} = \frac{(F_1 + F_2 + D(1+\varepsilon)(F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_7 + F_8))}{F_9 + F_{10} + F_{11}},$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = \frac{1}{a} \left[ \frac{k}{1 + (k/J_m)\Phi(s(t))[1 + \beta(t)(R_1 - s(t))^2]} - \frac{E}{\Phi(s(t))[1 + \beta(t)(R_1 - s(t))^2]} \right], \quad (14)$$

$$\beta(0) = 0 \quad s(0) = s_0$$

$$\Phi(r) = BA - \frac{A}{r^\varepsilon}, \quad (15)$$

$$B = \frac{1}{R_1^\varepsilon} \left[ 1 + \frac{s_0}{R_1} \right], \quad A = \frac{E}{(k - v_0)B - (k/s_0^\varepsilon)} \quad (16)$$

El perfil inicial de concentraciones  $\Phi(r)$  dado por la Ec. (15) ha sido calculado mediante el método cuasiestacionario [4] para bajas concentraciones y queda determinado por el sistema. Las funciones  $F_i$

están dadas por:

$$F_1 = \left[ \frac{v_0}{b} + \frac{D(1+\varepsilon)}{R_1} \right] \frac{As_0}{R_1^{\varepsilon+1}},$$

$$F_2 = -\frac{1}{b} \left[ \frac{k\Phi(s(t))[1 + \beta(t)(R_1 - s(t))^2]}{1 + (k/J_m)\Phi(s(t))[1 + \beta(t)(R_1 - s(t))^2]} - E - v_0\Phi(s(t)) [1 + \beta(t)(R_1 - s(t))^2] \right],$$

$$F_3 = -\frac{\Phi(s(t)) [1 + \beta(t)(R_1 - s(t))^2]}{s(t)},$$

$$F_4 = B[1 + \beta(t) R_1^2] \left[ \frac{1}{s^\varepsilon(t)} - \frac{1}{R_1^\varepsilon} \right],$$

$$F_5 = 2B\beta(t)R_1 \ln \left[ \frac{R_1}{s(t)} \right] + B\beta(t)[R_1 - s(t)],$$

$$F_6 = \frac{-A[1 + \beta(t)R_1^2]}{(\varepsilon + 1)} \left[ \frac{1}{s^{(\varepsilon+1)}(t)} - \frac{1}{R_1^{(\varepsilon+1)}} \right],$$

$$F_7 = \frac{2}{\varepsilon} A\beta(t) R_1 \left[ \frac{1}{s^\varepsilon(t)} - \frac{1}{R_1^\varepsilon} \right],$$

$$F_8 = \frac{A\beta(t)}{(1-\varepsilon)} \left[ \frac{1}{s^{(\varepsilon-1)}(t)} - \frac{1}{R_1^{(\varepsilon-1)}} \right],$$

$$F_9 = BR_1^2[R_1 - s(t)] - \frac{AR_1^2}{(1-\varepsilon)} [R_1^{(1-\varepsilon)} - s^{(1-\varepsilon)}(t)],$$

$$F_{10} = -BR_1[R_1^2 - s^2(t)] + \frac{2AR_1}{(2-\varepsilon)} [R_1^{(2-\varepsilon)} - s^{2-\varepsilon}(t)],$$

$$F_{11} = \frac{B}{3} [R_1^3 - s^3(t)] - \frac{A}{(3-\varepsilon)} [R_1^{(3-\varepsilon)} - s^{(3-\varepsilon)}(t)].$$

Remarcamos que para los casos particulares  $\varepsilon = 1, 2$  y  $3$ , puede obtenerse un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias similar a (14).

La solución del sistema (14) se obtiene numéricamente a través del método de Runge-Kutta para un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Las figuras 1 y 2 representan resultados teóricos para la concentración de la interfase raíz-

suelo  $C(s(t),t)$  vs.  $s$  y posición de la interfase  $s(t)$  vs.  $t$  en función del poder de absorción  $k$ .

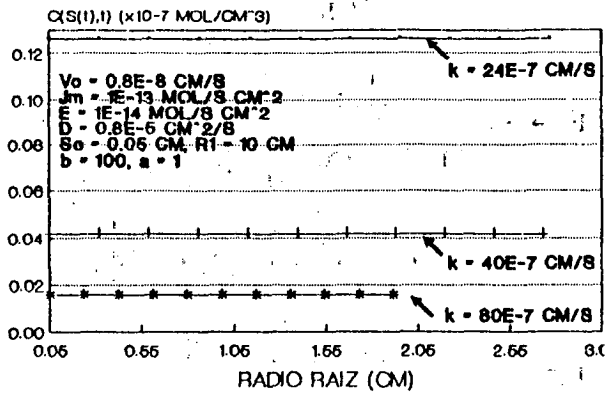


Figura 1

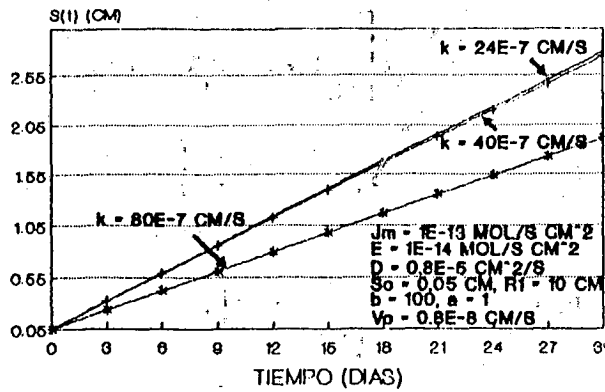


Figura 2

Para altas concentraciones obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales totalmente similar al del perfil de concentraciones inicial calculado por el método cuasiestacionario para altas concentraciones, que está dado por:

$$\Phi(r) = BA - \frac{A}{r^2}$$

donde:

$$B = \frac{1}{R_1^2} \left( 1 + \frac{S_0}{R_1} \right)$$

(17)

## CONCLUSIONES

Del análisis de los resultados obtenidos, concluimos que para bajas concentraciones:  $s = s(t)$  aumentó linealmente cuando la velocidad de flujo  $v_0$  aumenta o el radio  $R_1$  aumenta (la densidad de raíz  $w = 1/\pi R_1^2$  disminuye); que  $s = s(t)$  aumenta significativamente poco cuando el poder buffer  $b$  disminuye; que  $s = s(t)$  es máximo para un valor óptimo de  $k$ ; que  $s = s(t)$  aumenta linealmente

$$A = \frac{J_m - E}{\frac{V_0}{R_1^2} \left( 1 + \frac{S_0}{R_1} \right)}$$

Las Figuras 3 y 4 representan resultados teóricos para  $C(s(t),t)$  vs.  $s$  y  $s(t)$  vs.  $t$  respectivamente en función de la velocidad de flujo convectivo  $v_0$  respectivamente.

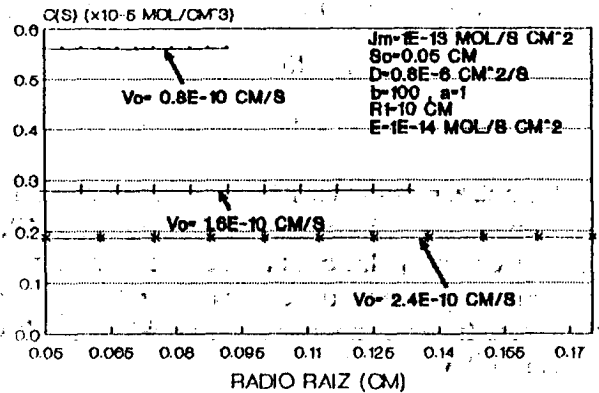


Figura 3

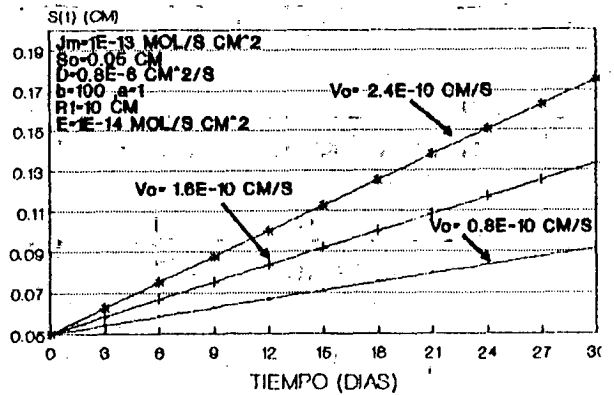


Figura 4

cuando la tasa de eflujo  $E$  disminuye; que  $s = s(t)$  aumenta linealmente cuando el influjo máximo  $J_m$  aumenta; que  $s = s(t)$  no varía en función del coeficiente de difusión  $D$  para una variación en un ancho orden de magnitudes de (1 en  $10^5$ ). Para **altas concentraciones**:  $s = s(t)$  no varía en función de  $k$ ;  $s = s(t)$  aumenta linealmente cuando  $v_0$  o  $R_1$  aumentan;  $s = s(t)$  aumenta linealmente cuando  $b$  disminuye;  $s = s(t)$  no varía en función de  $D$ ,  $E$  y  $J_m$ . Por otro lado, comparando los resultados obtenidos por el método cuasiestacionario [4] y el balance integral, concluimos que: primero, el comportamiento cualitativo de los resultados es totalmente similar por ambos métodos y segundo, el método del balance integral provee una información teórica más detallada, por ejemplo, para bajas concentraciones, y para valores particulares del resto de los parámetros la variación de  $s(t)$  vs.  $t$  con respecto al parámetro  $k$  es despreciable mediante el método cuasiestacionario, mientras que el balance integral da lugar a un cambio apreciable (Fig.2). En este ejemplo,  $s(t)$  aumenta cuando  $k$  disminuye, aunque este efecto ocurre debido a que el gradiente en la interfase raíz-suelo (como una función de  $k$  y  $C(s)$ ) disminuye. Un análisis más detallado de los resultados muestra que existe un valor óptimo de  $k$  para el crecimiento. Además, la concentración de la interfase es aproximadamente constante, de acuerdo con los resultados de Willigen [9] para el caso particular de la toma de nitratos.

Recalamos que este es un trabajo de naturaleza teórica y representa una aproximación cualitativa para el crecimiento de raíces debido a la incorporación de un único ion móvil. Por comparación entre los resultados del presente modelo y el modelo para iones que son relativamente inmóviles para bajas y altas concentraciones, concluimos que la cinética de absorción ( $J = kC$  o  $J = J_m$ , respectivamente) es más eficiente para bajas concentraciones a través de ambos métodos.

## REFERENCIAS

1. Claascen N., S.A.Barber, Agron.J. 68 (1966), 961-964.
2. Nyc P.H., F.C.Marriot, Plant Soil, 33 (1969), 359-472.
3. J.H.Cushmann, Soil Science Society of America J., 46,4 (1982), 704-709.
4. J.C.Reginato, D.A.Tarzia, A.Cantero, Soil Science, 150 (4) (1990), 722-729.
5. J.C.Reginato, D.A.Tarzia, A.Cantero, Soil Science, 152, 2, (1991), 63-71.
6. Crank J., "Free and moving Boundary Problems", Clarendon Press, Oxford (1984).
7. T.R.Goodman, Transf. of the ASME, 80 (1958), 335-342.
8. J.C.Reginato, D.A.Tarzia, Int.J. of Engineering Science (1991) (A aparecer).
9. P.de Willigen, Inst. Bodemvruchtbaarheid, Rapp. 6-81, 56.