ONDAS DE SUPERFICIE EN LIQUIDOS

Roberto Delellis y Fernando Minotti
Laboratorio de Física del Plasma, FCEN, UBA
Pabellón 1, Ciudad Universitaria
1428, Buenos Aires

Presentamos aquí una deducción de la teoría de ondas largas de superficie en líquidos (viscosos o no) muy profundos. El enfoque utilizado consiste en reducir al mínimo la introducción de funciones auxiliares tales como potenciales o funciones de corriente para hacer que esta teoría sea comprensible a los alumnos de asignaturas elementales de grado. Se ha utilizado el análisis dimensional con el objeto de orientar los cálculos y se ha tratado, en lo posible, de darle un sentido físico a las ecuaciones.

INTRODUCCION

En muchas ramas de la física se estudia la propagación de perturbaciones ondulatorias en medios dispersivos y disipativos.

El estudio de las ondas de superficie en líquidos ilustra muchos de los aspectos cualitativamente relevantes y muchas de las dificultades matemáticas que suelen aparecer en estos fenómenos.

Es por estas razones que se consideró interesante extender el acostumbrado estudio de las ondas de superficie en líquidos ideales al caso viscoso.

Simultáneamente con esto, se advirtió la posibilidad de realizar este tipo de cálculos sin recurrir al uso de funciones escalares auxiliares tales como funciones corriente o potenciales.

Hemos llevado adelante el cálculo utilizando formalismos similares para el caso ideal y para el caso viscoso, destacando en su momento las semejanzas y las diferencias. La notación que se usa es la acostumbrada en la literatura.

CALCULO DE LAS RELACIONES DE DISPERSION

La hipótesis de incompresibilidad conduce a que el campo de velocidades de un líquido (viscoso o no) satisface la ecuación:

$$\nabla \bullet v = 0 \tag{1}$$

Propondremos, como es usual en el estudio de procesos ondulatorios, que el campo de velocidades se escribe:

$$v = V(Z)\, e^{i\phi}, \text{ con: } V = w\, e_z + u\, e_x,\ \phi = kx - \omega t \tag{2}$$

donde z es la coordenada vertical (con sentido contrario a la gravedad g) y x la horizontal.

De (1) y (2) obtenemos la relación:

$$u = \frac{i}{k}\frac{dw}{dz} \tag{3}$$

A partir de este punto, la descripción difiere según se trate de líquidos ideales o viscosos.

A) Líquidos ideales

La dinámica se rige por la ecuación de Euler:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho} + g \tag{4}$$

donde se ha despreciado el término de la derivada convectiva, por ser cuadrática en cantidades pequeñas.

Las condiciones de contorno que se deben satisfacer son las siguientes:

La fuerza por unidad de superficie que el líquido aplica a la atmósfera debe ser igual a la que ésta aplica sobre aquél:

$$p[z_{sup}(x, y, t), x, y, t] = p_0 \tag{5}$$

donde se ha supuesto despreciable la densidad de la atmósfera.

La velocidad normal del líquido en contacto con el fondo debe ser nula:

$$w(z \rightarrow -\infty) = 0 \tag{6}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones y usando que la amplitud de las oscilaciones es arbitraria (si bien pequeña), se obtiene la relación de dispersión:

$$\omega^2 = gk \qquad (7)$$

B) Líquidos viscosos

La dinámica se rige por la ecuación de Navier-Stokes para fluidos incompresibles:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho} + g + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2 v \qquad (8)$$

donde, como en el caso ideal, se ha despreciado el término de la derivada convectiva.

Las condiciones de contorno son:

Al igual que en el caso anterior, la fuerza por unidad de superficie que el líquido aplica a la atmósfera debe ser igual a la que ésta aplica sobre aquél; pero ahora debemos considerar tanto la fuerza normal como la fuerza tangencial (esfuerzo de corte):

$$\left[-p + 2\mu\frac{\partial v_z}{\partial_z}\right]_{sup} = -p_0$$

$$\left[\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial_x}\right)\right]_{sup} = 0 \qquad (9)$$

donde se han supuesto despreciables la densidad y la viscosidad de la atmósfera.

En contacto con el fondo debemos imponer ahora que la velocidad sea nula tanto en su componente normal como en la tangencial:

$$w\,(z \to -\infty) = 0$$

$$u\,(z \to -\infty) = 0 \qquad (10)$$

Este sistema se resuelve de manera similar al caso anterior, obteniéndose la relación de dispersión correspondiente:

$$4\,\nu^2k^4 - 4(k^2 - i\omega/\nu)^{1/2}\,\nu^2k^3 - 4i\omega\nu k^2 + gk - \omega^2 = 0,$$

$$(\nu = \mu/\rho) \qquad (11)$$

que también puede escribirse:

$$\left(2 - \frac{i\omega}{\nu k^2}\right)^2 + \frac{g}{\nu^2k^3} = 4\sqrt{1 - \frac{i\omega}{\nu k^2}} \qquad (12)$$

ANALISIS DE LAS RELACIONES DE DISPERSION

La fórmula del caso ideal ilustra el fenómeno bien conocido de ondas dispersivas no disipativas y su análisis es trivial.

El análisis de la correspondiente al caso viscoso requiere más esfuerzo, ya que no sólo se trata de una relación mucho más complicada (implícita) sino que, en este caso, ω es un número complejo cuya parte imaginaria representa la tasa de decaimiento de las ondas. Esta última puede estimarse para el límite de baja viscosidad observando que las combinaciones más simples con unidades de frecuencia son $(gk)^{1/2}$, νk^2 y $g/\nu k$, y sólo la segunda de ellas tiende a cero con ν. Luego, $\mathrm{Im}(\omega) = \mathrm{const.}\ \nu k^2$, la constante será negativa debido a que el proceso es disipativo.

Una manera de proceder al estudio del caso general consiste en realizar la adimensionalización de la fórmula (11). Existen varias maneras de hacerlo, sin embargo, la más conveniente es aquélla en la que aparezcan separadamente la función ω y su variable k. Si se realiza, además, algo de álgebra para eliminar el exponente fraccionario, la relación se reduce a:

$$-K^2 + iW + \left(\frac{1}{4K^2} + K - \frac{iW}{K} - \frac{W^2}{4K^3}\right)^2 = 0 \qquad (13)$$

con:

$$W = \frac{\omega\nu^{1/3}}{g^{2/3}}\ ;\ K = \frac{k\nu^{2/3}}{g^{1/3}} \qquad (14)$$

Para interpretar físicamente la ecuación (13), deberá pensarse que las variaciones de K representan variaciones de k, manteniendo ν y g constantes o variaciones de ν manteniendo g y k constantes, etc; entiéndase, por ejemplo, "K grande = alta viscosidad".

Aunque se puede realizar todavía algo más *via* análisis dimensional, para abreviar este resumen se muestran en la Fig. 1 los resultados obtenidos mediante la evaluación numérica de (13), de la que se ha eliminado un resultado espurio proveniente

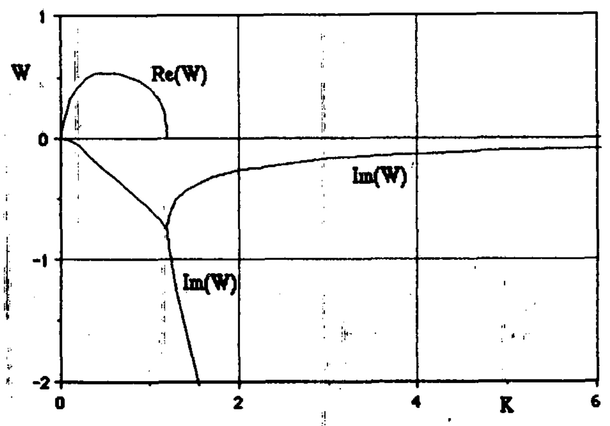

Figura 1: Relación de dispersión para las variables adimensionales obtenida por la resolución numérica de la ecuación (13).

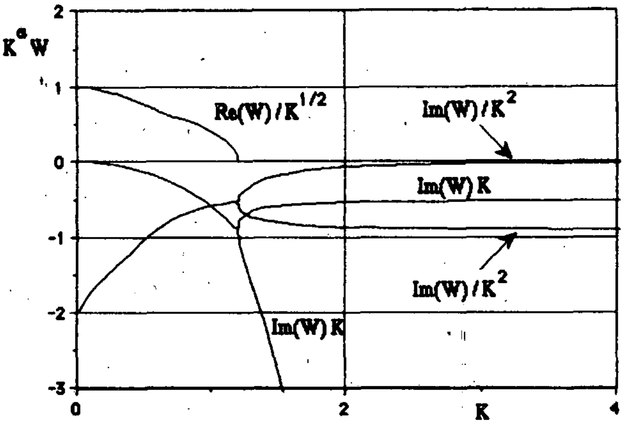

Figura 2: Gráfico de las funciones tipo $K^2 W$ para el estudio de las dependencias asintóticas de la relación de dispersión.

del manejo algebraico previo. Es interesante notar el corte que aparece en Re(W) y el desdoblamiento consecuente de Im(W). En la Fig. 2 se muestran los gráficos de las funciones tipo K^αIm(W) o K^αRe(W), que permiten determinar las dependencias asintóticas.

CEILAP
CITEFA - CONICET
ZUFRIATEGUI Y VARELA
1603 - VILLA MARTELLI
REPUBLICA ARGENTINA