SOLUCION GENERAL DE LA ECUACION DE LAPLACE EN RECINTOS PLANOS SIMPLEMENTE CONEXOS LIMITADOS POR CURVAS SIMPLES ARBITRARIAS

F. Minotti* y C. Moreno*
Departamento de Física (Laboratorio de Física del Plasma)
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires
Pabellón I, Ciudad Universitaria, 1428 Buenos Aires

Se presenta un método que permite resolver la ecuación de Laplace en regiones simplemente conexas limitadas por curvas simples arbitrarias. El mismo está basado en la existencia de una transformación conforme que reduce el problema original a uno de solución conocida. La ventaja principal del método es que no requiere el conocimiento explícito de tal transformación, de manera que es aplicable aún en aquellos casos en que no se conoce ninguna transformación apropiada. Tanto la solución como sus derivadas de orden superior resultan expresadas en términos de cuadraturas explícitas que pueden evaluarse numericamente, o incluso analiticamente, en forma sencilla.

I. INTRODUCCION

Para resolver la ecuación de Laplace existen esencialmente dos técnicas diferentes: la separación de variables y el método de las funciones de Green[1,2,3]. En los problemas bidimensionales planos puede emplearse además el formalismo complejo y las técnicas de transformación conforme. Ninguno de estos métodos es de aplicación general dado que su éxito depende del problema específico: por ejemplo, las condiciones de contorno pueden impedir la separación de variables y, a su vez, no siempre es posible obtener la función de Green o la transformación conforme apropiada para el problema de interés. En estos casos debe recurrirse a diversas técnicas numéricas[4,5,6]. A continuación proponemos un método alternativo y de uso general para tratar problemas planos que está basado en técnicas de transformación conforme.

II.METODO

a) Condiciones de Dirichlet

Para desarrollar el formalismo emplearemos las siguientes funciones holomorfas: $f = \psi + i\,\phi$; $g = F + i\,G$; donde ψ y Φ son las funciones armónicas conjugadas del potencial ϕ, y de la función de Green G, correspondientes a las condiciones de Dirichlet, respectivamente. En términos de estas funciones se pueden dar dos expresiones formales de la solución:

a)
$$\phi(x',y') = \int_{\partial(R)} \phi(x,y)\frac{dg}{dZ}\,dZ \tag{1}$$

a partir de la función de Green, y:

b)
$$\phi(x',y') = \mathrm{Im}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial(R)} \frac{f(Z)}{Z-Z'}\,dZ\right\} \tag{2}$$

a partir de la fórmula de Cauchy, donde $\partial(R)$ denota el contorno del dominio de interés R. Sea $\zeta(Z)$ la transformación conforme que aplica la región R en el semiplano superior R' de coordenadas ξ, η . De (1), la solución formal resulta:

$$\phi\left[x'(\xi',\eta'), y'(\xi',\eta')\right] = \frac{i}{2\pi}\int_{\partial(R')}\left(\frac{1}{\zeta-\zeta'^*}-\frac{1}{\zeta-\zeta'}\right)\phi\left[Z(\zeta)\right]d\zeta \tag{3}$$

A su vez, desarrollando (2), obtenemos:

$$\phi(x',y') = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial(R)} \frac{\phi\cos\alpha - \psi\sin\alpha}{r}\,dl \tag{4}$$

donde α es el ángulo formado por la normal exterior a R y el vector con origen en el punto campo (x', y') y extremo en un punto fuente arbitrario ubicado sobre el contorno y r es el módulo de dicho vector.

---

* Becario CONICET

Evidentemente la integración de (3) o (4) requiere conocer $\zeta(Z)$ o ψ respectivamente. La esencia de este trabajo es mostrar cómo puede obtenerse ψ sin recurrir a $\zeta(Z)$.

Teniendo en cuenta las condiciones de Cauchy-Riemann para f, derivando (3) y evaluando sobre el contorno resulta:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi'}\right)_{\partial(R')} = \frac{1}{\pi}\, Vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(\xi)-\phi(\xi')}{(\xi-\xi')^2}\, d\xi \qquad (5)$$

donde Vp indica el valor principal de Cauchy. Integrando (5) respecto de ξ' se obtiene $\psi(\xi')$ y luego con (4) el potencial en todo punto interior a R. Para evaluar (5) sólo se requiere el valor del potencial en el contorno transformado, en consecuencia basta conocer la tranformación restringida a $\partial(R')$; lo cual es sencillo expresando el contorno en forma paramétrica: $x = X(s)$; $y = Y(s)$, donde s es un parámetro real que, cuando varía desde $-\infty$ a ∞, describe $\partial(R)$ en sentido positivo. La transformación restringida es entonces $\zeta(\xi) = X(\xi) + i\, Y(\xi)$ y el potencial sobre $\partial(R')$ resulta: $\phi(\xi) = \phi[X(\xi),Y(\xi)]$. De este modo, los términos que aparecen en el integrando de la Ec. (4) se expresan mediante funciones conocidas.

B) CONDICIONES DE NEUMANN

Con argumentos análogos al caso de Dirichlet puede obtenerse en el caso de condiciones de Neumann:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi'}\right)_{\partial(R')} = -\frac{1}{\pi}\, Vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\xi-\xi'}\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\, d\xi \qquad (6)$$

De manera que por integración de (6) se obtiene ϕ sobre el contorno; además, de las relaciones de Cauchy-Riemman, es $\partial\psi / \partial\xi = \partial\phi / \partial\eta$, lo que permite obtener el valor de y sobre $\partial(R')$. El potencial ϕ se calcula entonces mediante (4).

Debe destacarse que otras magnitudes de interés como la energía total del sistema y las derivadas de orden superior del potencial pueden obtenerse fácilmente a partir del formalismo desarrollado. Para obtener más detalles sobre este tema ver la referencia [7].

III. APLICACIONES

El método presentado en la Sec. II es especialmente apropiado para las situaciones en las que el potencial f sobre el contorno es constante a trozos, debido a que en estos casos la evaluación de (5) y su subsecuente integración puede realizarse analiticamente. Los resultados generales son:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)_{\partial(R')} = \frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{N} (\phi_{j+1} - \phi_{i+1}) \left[\frac{1-\delta_{j,0}}{\xi_j-\xi} - \frac{1-\delta_{j,N}}{\xi_{j+1}-\xi}\right] \qquad (7)$$

$$(\psi)_{\partial(R')} = \frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{N} \{(\phi_{j+1} - \phi_{i+1})\ [(1-\delta_{j,N})\ \ln|\xi_{j+1}-\xi| - (1-\delta_{j,0})\ \ln|\xi_j-\xi|\,]\,\} \qquad (8)$$

donde se han empleado las notaciones de la Fig. 1 y, además, se considera que $\xi_i < \xi < \xi_{i+1}$.

Como ejemplo consideremos un círculo unitario con condiciones de contorno tipo Neumann dadas por $\partial\phi/\partial\rho = \cos(\theta)$ sobre $\rho = 1$; donde (ρ, θ) son coordenadas polares. Las condiciones de Cauchy-Riemann permiten obtener inmediatamente la ex-

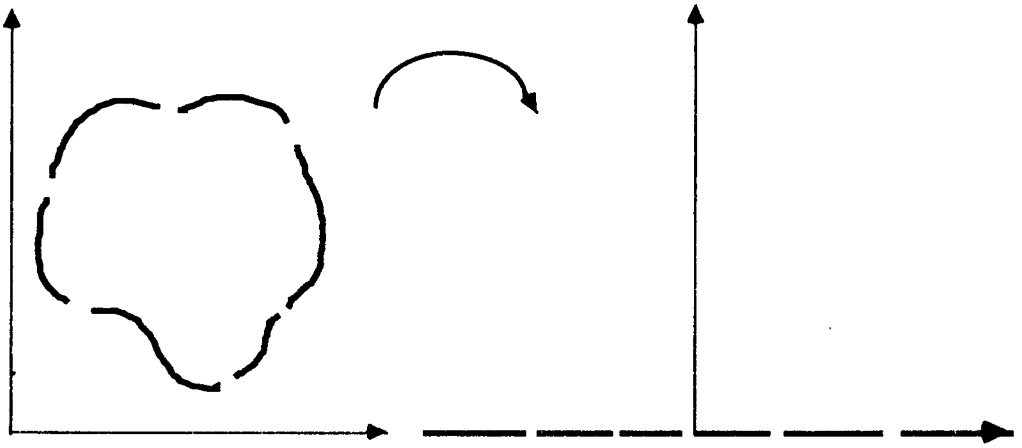

Figura 1: Representación del problema y definición de notaciones.

presión de ψ sobre el contorno: $\psi = - \sin(\theta) + const.$ Empleando la transformación: $\xi = - \cot(\theta/2)$, la Ec. (6) conduce a:

$$\left[\frac{\partial\phi}{\partial\theta'}\right]_{\rho=1} = -\frac{1}{2\pi}\csc^2(\theta'/2)\,\mathrm{Vp}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(\theta)}{\cot(\theta/2)-\cot(\theta'/2)}d\theta \qquad (9)$$

cuya integración da por resultado: $\partial\phi/\partial\theta' = - \sin(\theta')$ sobre el contorno; de donde se obtiene: $\phi = \cos(\theta') + const.$ Con estas expresiones de ϕ y ψ, la Ec. (4) conduce a $\phi = \rho' \cos(\theta') + const$, que concuerda con el resultado obtenido con los métodos clásicos.

IV. CONCLUSIONES

El método desarrollado presenta la ventaja de ser aplicable con igual sencillez a cualquier recinto plano simplemente conexo. En ciertos casos la solución es completamente analítica, y en aquellos casos en que debe recurrirse al cálculo numérico, éste se reduce a la evaluación de simples cuadraturas con las consiguientes ventajas sobre los métodos numéricos tradicionales de grillado o de transformaciones conformes numéricas.

REFERENCIAS

1. P. M. Morse and H. Feshbach, "Methods of Theoretical Physics" (McGraw-Hill Book Co, New York, 1953).
2. H. F. Weinberger, "Introduction to Partial Differential Equations with Methods of ComplexVariables and Integral Transforms" (Blaisdell Pub. Co, New York, 1965).
3. J. H. Jeans, "Mathematical Theory of Electricity and Magnetism" (5º ed., Cambridge University Press, 1958).
4. R. Menikoff and C. Zemach, J. Comput. Phys. **36** (1980), 366.
5. D. I. Meiron, S. A. Ország, and M. Israeli, J. Comput. Phys. **40** (1981), 345.
6. R. Hostens and G. De Mey, Computer Physics Communications 16 (1978), 5.
7. F. Minotti and C. Moreno, "Solution of Laplace's Equation in Single-Connected Regions Bounded by Arbitrary Single Curves", J. Math. Phys. (en prensa).