GENERALIZACION DEL ARGUMENTO DE EPR: LOS GRADOS DE LIBERTAD NO SON LIBRES

A. C. de la Torre
Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad Nacional de Mar del Plata
Funes 3350, 7600 Mar del Plata

Se demuestra el siguiente teorema: En un contexto Realista, suponiendo la validez de la Lógica Clásica y del Formalismo de la Mecánica Cuántica, si la Mecánica Cuántica es una teoría completa entonces los observables asociados a los grados de libertad no son físicamente independientes. Esto significa que no existe ningún experimento para medir o alterar a un grado de libertad que no altere a los demás grados de libertad. Se analizan dos casos especiales del teorema. Uno es el argumento de EPR que demuestra que la completitud de la Mecánica Cuántica implica la no separabilidad. En el otro caso la completitud implica que Ra no es una representación adecuada del espacio físico.

El argumento de Einstein-Podolsky-Rosen (EPR)[1], que se presenta aquí en su versión más simple y clara[2], relaciona los cinco ingredientes siguientes:

REALISMO DEBIL (RD)

Este es un postulado filosófico que nos permite definir la existencia de los Elementos de la Realidad Física (ERF) de la siguiente manera: "Si puedo predecir con exactitud el valor de un observable sin modificar en forma alguna el estado del sistema, entonces existe un ERF asociado al mismo". Es interesante notar que dicho postulado realista es más débil que el postulado realista que consiste en afirmar la existencia objetiva del mundo externo independientemente de la observación, ya que en la definición de ERF se hace alusión a la posibilidad de predecir. El realismo implica al RD pero no viceversa, lo que significa que una violación de RD obligatoriamente nos lleva a un positivismo extremo.

COMPLETITUD DE LA MECANICA CUANTICA (COM)

La Mecánica Cuántica (MQ) es una teoría completa si su formalismo, definido más adelante, permite asignar un valor preciso a todos los ERF.

SEPARABILIDAD (SEP)

Un sistema físico compuesto por dos subsistemas S_1 y S_2 no interactuantes ubicados a una distancia D es separable si para distancias D suficientemente grandes ninguna acción en uno de ellos modifica en forma alguna al otro.

FORMALISMO DE LA MQ (FMQ)

Conjunto de recetas matemáticas para hacer predicciones sobre los sistemas físicos. Dicho formalismo se encuentra definido en los textos estandard de MQ.

LOGICA CLASICA (LC)

Reglas de inferencia con la estructura de un reticulado Booleano.

El argumento de EPR puede expresarse en forma de teorema utilizando la notación lógica usual

$$FMQ \wedge LC \wedge RD \wedge SEP \rightarrow \neg COM \qquad (1)$$

Para demostrar este teorema consideremos un sistema formado por dos partículas en una dimensión, siendo X_1 y X_2 sus coordenadas y P_1 y P_2 sus impulsos correspondientes. Los operadores asociados a las cantidades $D = X_1 - X_2$ y $P = P_1 + P_2$ conmutan, siendo posible, según el FMQ, preparar al sistema de forma tal que estas cantidades sean exactamente conocidas. En cuatro pasos se demuestra el teorema. 1. Midiendo X_2 puedo predecir con exactitud $X_1 = D + X_2$. Si SEP es válida, esto no modifica en forma alguna a la partícula 1 existiendo por lo tanto un ERF asociado a X_1 denominado ERF (X_1). 2. Midiendo P_2 puedo predecir con exactitud $P_1 = P + P_2$ y la SEP implica ERF (P_1). 3. Está claro que ambas mediciones no pueden hacerse simultáneamente. Sin embargo SEP implica que la decisión de medir X_2 o P_2 no debe alterar de manera alguna la existencia de un ERF de la partícula 1. Por lo tanto ambas cantidades X_1 y P_1 son ERF. 4. El FMQ impide asignar valores precisos a X_1 y P_1 porque estos no conmutan resultando entonces la negación de COM. Queda asi demostrado el teorema que se puede expresar en forma más equilibrada:

$$\neg LC \vee \neg FMQ \vee \neg RD \vee \neg COM \vee \neg SEP \quad (2)$$

Es asombroso que todas las alternativas que surgen de este teorema implican un violento cambio en nuestros esquemas de pensamiento. Se han estudiado sistemas lógicos alternativos a la LC con una estructura de reticulado modular ortocomplementado[3]. Sin embargo esta alternativa no parece ser posible, ya que el desarrollo de estas lógicas cuánticas utilizan a la LC que se pretende reemplazar. Que el FMQ sea falso es extremadamente difícil, dado el extraordinario éxito de este formalismo en sus predicciones. Negar RD fue la respuesta de Bohr[4] a EPR. Esta alternativa es indeseable por sus inevitables implicaciones subjetivas y, más aún solipsistas. La no COM fue propuesta por EPR, generando intensa actividad en las teorías con variables ocultas. Investigaciones ulteriores han resultado sin embargo, en que esta alternativa sola no es suficiente, ya que la violación experimental[5] de las desigualdades de Bell[6] derivadas con variables ocultas indica que éstas deben ser no locales introduciendo "por otra puerta" a la no SEP. Queda por lo tanto la violación de SEP como alternativa asombrosa pero quizás inevitable.

En un trabajo reciente se ha demostrado que la misma estructura lógica del argumento de EPR puede ser aplicada a otro sistema físico obteniendo de esta manera otra conclusión asombrosa: El espacio físico, o sea aquel espacio de la posición, de la ubicación de una partícula, no es adecuadamente representado por R_a. Para demostrar esto haremos tres definiciones.

1. El observable A es Físicamente Independiente (FI) del observable B (A.FI.B.), si para todo par de valores (a,b) tales que a es un posible valor del observable A y b lo es de B, existe un experimento para medir o alterar la propiedad A = a que no modifique en forma alguna a la propiedad B = b. Notemos que la relación FI es simétrica, no reflexiva y no transitiva. Además de esto se debe notar que la relación FI no es equivalente a la relación de conmutación. A.FI.B $\rightarrow [A,B] = 0$, pero lo opuesto no es válido. (En esta expresión se designa con el mismo símbolo, A y B al observable y a su operador asociado. Imprecisión que no debe crear confusión).

2. Un observable vectorial $V = (V_1, V_2, V_3)$ es Ra-Local si $V \in Ra$ (o sea transforma como un vector) y V_i.FI.V_j $\forall\, i \neq j$ (o sea sus componentes son FI). En forma similar se define Rz - Loc.

3. Si puedo predecir con exactitud el valor de un observable A midiendo o alterando únicamente a observables FI de A, entonces existe un ERF asociado al mismo. Esta definición de ERF se diferencia de la dada por EPR, en el sentido que estos requieren no alterar en nada al sistema mientras que aquí se tolera la alteración de observables FI al observable en cuestión. A igual que la definición de EPR, esta definición está sustentada por el postulado filosófico RD, ya que supone la existencia de cosas sin una observación directa de ellas.

Con estas definiciones podemos aplicar el esqueleto lógico del argumento de EPR a un sistema físico diferente. Notemos que, en lo que respecta a la descripción matemática, el sistema formado por una partícula en dos dimensiones. Ambos sistemas están descriptos por $X_1X_2P_1P_2$. En el primer caso X_1 y X_2 son las posiciones de dos partículas diferentes y en el segundo son las coordenadas ortogonales de una partícula. Los cuatro pasos del argumento de EPR pueden repetirse ahora aplicados al sistema de una partícula en un plano cuyas coordenadas ortogonales son X_1X_2 y cuyas componentes del impulso son P_1 y P_2. Debido a que las cantidades $D = X_1 - X_2$ y $P = P_1 + P_2$ conmutan (corresponden aquí a una coordenada girada y al impulso ortogonal a la misma), se prepara al sistema con un conocimiento preciso de ambas. 1. Midiendo X_2 y suponiendo X_1.F$_1$.X_2, puedo predecir con exactitud $X_1 = D + X_2$ siendo por lo tanto ERF(X_1). 2. Similarmente se obtiene ERF (P_1). 3. Rz - Loc y FI implican que la decisión de medir X_2 o P_2 no debe alterar los ERF en la dirección 1, o sea ERF (X_1,P_1). 4. FMQ no puede asignar valores precisos a X_1 y P_1 simultaneamente siendo por lo tanto no completa. Escribiendo este resultado en forma simétrica se obtiene:

$$\neg LC \vee \neg FMQ \vee \neg RD \vee \neg COM \vee \neg Rz\text{-}Loc. \quad (3)$$

La última alternativa significa que las coordenadas de la posición y del impulso no pueden ser FI entre sí aunque sean elegidas ortogonales poniendo en cuestión si Ra es una representación adecuada para el espacio físico.

El argumento del EPR y el resultado anterior son dos casos especiales del teorema que se demuestra a continuación.

TEOREMA

En una postura RD, suponiendo la validez de la LC y del FMQ, si ésta es COM entonces los grados de libertad del sistema no son FI.

DEMOSTRACION

Sean Q_k y P_k k=1,2,... N los observables asociados a N grados de libertad y sus impulsos canónicos correspondientes. El FMQ postula las relaciones de conmutación usuales $[Q_k, P_k] = ih\delta_{kr}$. Nuevamente usamos el mismo signo para observables y operadores. Designemos por GFI al postulado que los grados de libertad sean FI. Esto es, Q_k.FI.Q_r P_k.FI.P_r Q_k.FI.P_r P_k.FI.Q_r V $k \neq r$ y que R.FI.S y R.FI.T $\rightarrow$ R.FI.(S + T) siendo R, S, T coordenadas o impulsos. Sean (A_k) y (B_k) dos conjuntos de N números tales que

$$\sum_{k=1}^{N} A_k B_k = 0$$

y que existe al menos un s tal que $A_s \neq 0$ y $B_s \neq 0$. Con estos números definimos dos observables $A = \Sigma A_k Q_k$ y $B = \Sigma B_r P_r$. Debido a que [A,B] = 0, es posible preparar al sistema con valores precisos para A y B. Repitamos ahora los cuatro pasos: 1. Midiendo Q_s puedo predecir con exactitud la cantidad $\alpha = A - A_s Q_s$. GFI implica Q_s.FI.α entonces es ERF(α). 2. Midiendo P_s puedo predecir con exactitud $\beta = B - B_s P_s$ y similarmente GFI implica ERF(β) 3. GFI implica ERF(α,β). 4. FMQ no puede asignar valores precisos a α y β ya que $[\alpha,\beta] = ihA_s B_s$ implicando su no completitud. Queda asi demostrado el teorema, que escrito en forma simétrica es:

$$\neg LC \vee \neg FMQ \vee \neg RD \vee \neg COM \vee \neg GFI \qquad (4)$$

La conclusión que los grados de libertad no son físicamente independientes significa no poder aislar propiedades independientes del resto en un sistema. Todas las propiedades de un sistema formarían un conjunto inseparable y ligado por interacciones desconocidas. Esta conclusión es difícil de aceptar, pero es necesaria si no se aceptan las otras alternativas o si no se encuentra un error en el argumento de EPR.

REFERENCIAS

1. A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen. Phys. Rev. 47,777, 1935.
2. K. Popper. Quantum Theory and the Schism in Physics. 1956.
3. ver p. ej. M. Jammer. The Philosophy of Quantum Mechanics. J. Wiley NY, 1974.
4. N. Bohr. Phys. Rev. 48, 696, 1935.
5. J. F. Clauser A. Shimony. Rep. Prog. in Phys. 41, 1881, 1978.
6. J. S. Bell. Physics 1,195, 1964.
7. A. C. de la Torre. Mar del Plata Preprint. Sept. 88.