

# DINAMICA NO LINEAL EN SISTEMAS OPTICOS REALIMENTADOS: ANALISIS TEORICO DE UN SISTEMA DISCRETO CON MULTUESTABILIDAD Y CAOS

**E. Izaguirre\*, C. Ferro Fontan\*\***

*Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad de Buenos Aires  
Ciudad Universitaria, Pabellón 1, 1428 Buenos Aires*

**H. Mancini**

*Centro Investigaciones Laser y Aplicaciones, CITEFA-CONICET, y Universidad de San Luis  
Zufriategui y Varela, 1603 Villa Martelli, Buenos Aires  
Facultad de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales, Universidad de San Luis  
Ejército de los Andes 850, 5700 San Luis*

Se analiza el comportamiento de una ecuación de iteraciones del tipo armónico con parámetros dentro del argumento. Se observa que este mapa tiene varios atractores y competencia entre los mismos. Se calculan los coeficientes de Liapunov para cada zona de atracción.

## INTRODUCCION

En la bibliografía se encuentran analizados los mapas unidimensionales armónicos en los cuales el parámetro que multiplica la variable se encuentra fuera del argumento (1). Nosotros analizamos en este trabajo el comportamiento cuando este parámetro, que llamaremos R, está dentro del argumento de la función armónica. Para ello tomamos la función:

$$f(x_n) \equiv x_{n+1} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - A + C \cos [2\pi(Rx_n + B)] \right\}$$

donde A, C son constantes arbitrarias que son elegidas de la forma

$$A = \text{sen } 2\alpha \text{ sen } 2\beta$$

$$C = \text{cos } 2\alpha \text{ cos } 2\beta$$

y B es otro parámetro que también variaremos para observar el comportamiento de las iteraciones.

La dinámica del proceso recurrente de una ecuación de este tipo se describe geoméricamente mediante la representación por medio de la bisectriz del gráfico de la función. Para el caso en que el parámetro esté fuera del argumento, ésta tiene un solo máximo en el intervalo de normalización. Pero cuando se tiene el parámetro dentro del argumento, al pasar del umbral dado por:

$$R + B \geq 1$$

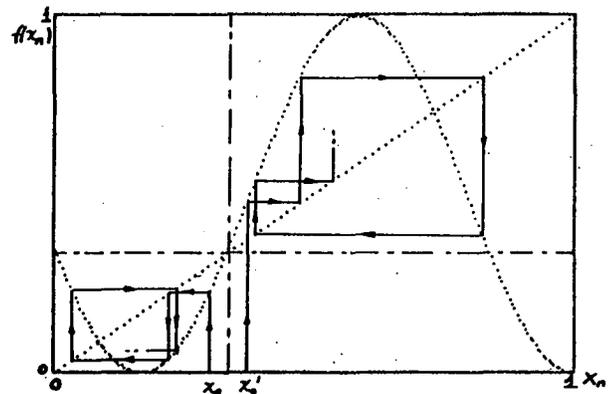
\* Becario UBA

\*\* Investigador CONICET

se tienen dos extremos que tienen su zona de atracción definida por el punto:

$$f'(x_n) > 1 \quad ; \quad x_n^* = f(x_n^*)$$

que divide el intervalo unidad (Figura 1). Si se continúa incrementando el parámetro R, se observa que se pierde la separación entre las dos zonas de atracción. En estas circunstancias el sistema se independiza de las condiciones iniciales en lo que respecta a las regiones de atracción y puede pasar de una región a otra.



**Figura 1: Separación en dos regiones de atracción para dos condiciones iniciales  $X_0$  y  $Y_0$ .**

## VARIACION DEL PARAMETRO MULTIPLICATIVO R

Al incrementarse el parámetro R se observa que el comportamiento asintótico del mapa es tal que tiene, al igual que los mapas unidimensionales con

parámetro fuera del argumento, una secuencia de bifurcaciones, pero en este caso independiente para cada rama de atracción (Figura 2)

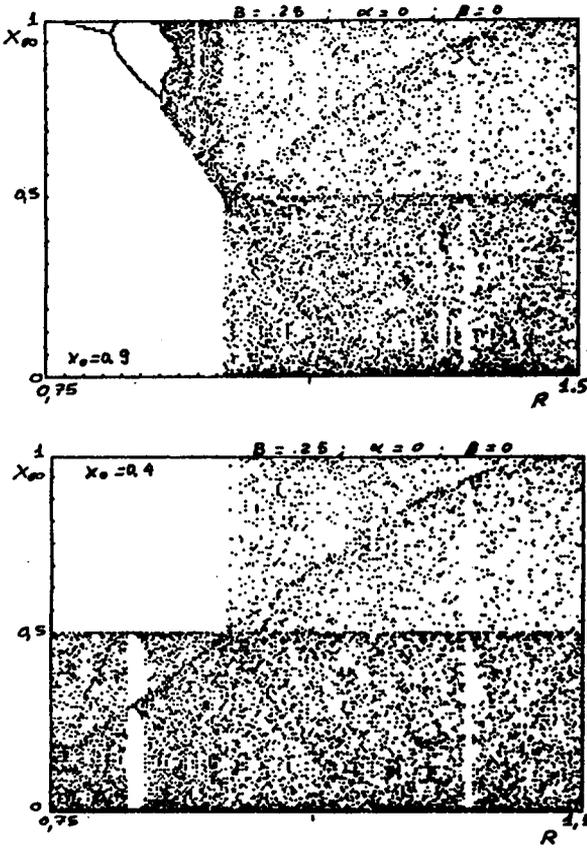


Figura 2: Diagrama de bifurcaciones (asintótico) para cada rama de atracción en función del parámetro de control R, manteniendo fijo el parámetro aditivo B. Arriba  $X_0 = 0.4$ .

Si se calculan los coeficientes de Liapunov para el caso en que coexistan dos atractores, puede observarse que dependen del parámetro R y también de las condiciones iniciales. Según sean las condiciones iniciales el sistema evolucionará a una zona u otra y sus coeficientes de Liapunov se modificarán según el comportamiento que puede observarse en la figura 3.

### COMPORTAMIENTO AL VARIAR EL PARAMETRO ADITIVO B

Si bien la variación de este parámetro representa solamente un corrimiento en el origen de la variable  $x_n$ , se tiene que el valor de la pendiente en el punto  $x_{n+1} = f(x_n)$  cambia su valor, inestabilizando las soluciones. Puede verse un gráfico asintótico de este comportamiento y sus respectivos coeficientes

de Liapunov en la figura 4. En ella puede observarse que se producen bifurcaciones en un sentido y en otro frente a un incremento monótono del parámetro aditivo B.

### INTERMITENCIA TIPO I

En los mapas unidimensionales, se tiene que al pasar de una región caótica a otra de  $2^n$  puntos estables, el comportamiento temporal del sistema es intermitente (tipo I), pues siempre ocurre una bifurcación tangente.

Este fenómeno se visualiza en las figuras 5 y 6. En la primera se muestra el canal de estrangulamiento al efectuarse la bifurcación y en la siguiente, la evolución de los pulsos en función del número de iteraciones n, (evolución temporal del sistema).

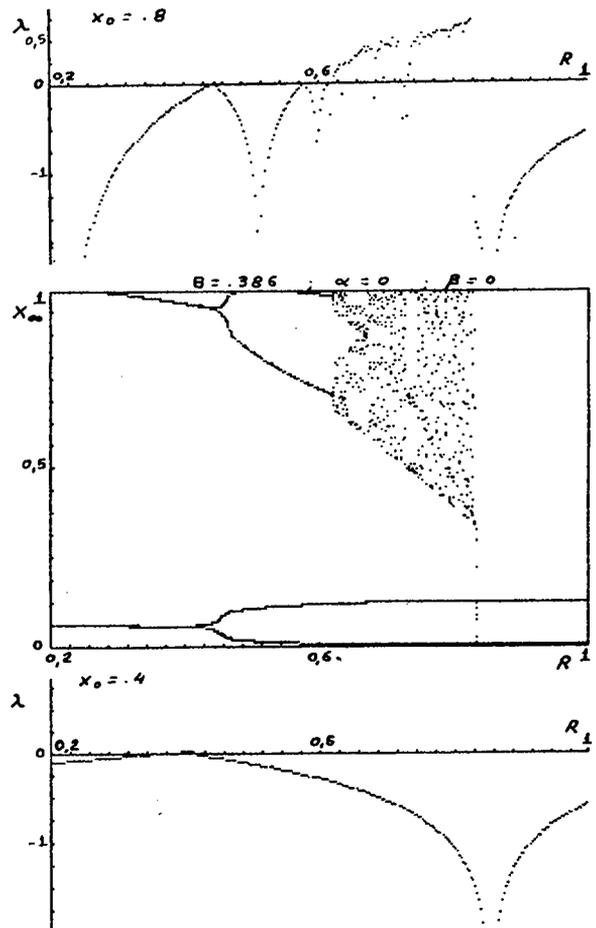


Figura 3: Diagrama asintótico en función de R para el caso de coexistencia de dos atractores, y sus correspondientes coeficientes de Liapunov.

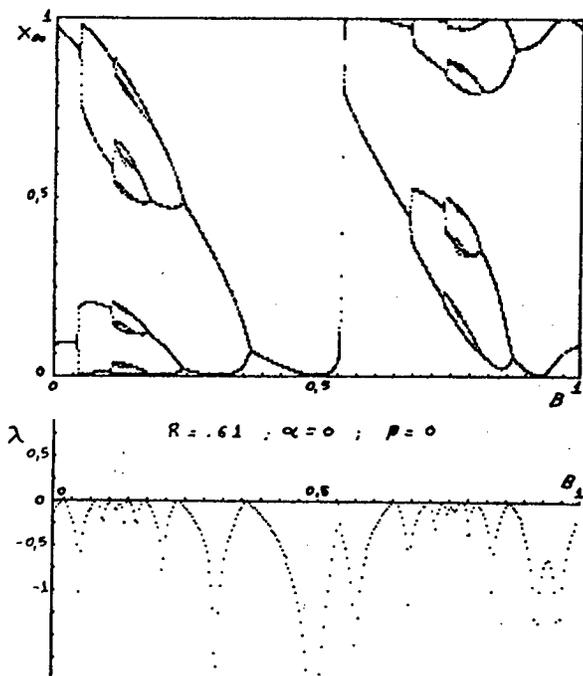


Figura 4: Diagrama asintótico en función del parámetro aditivo B para R fijo, y coeficientes de Liapunov correspondientes

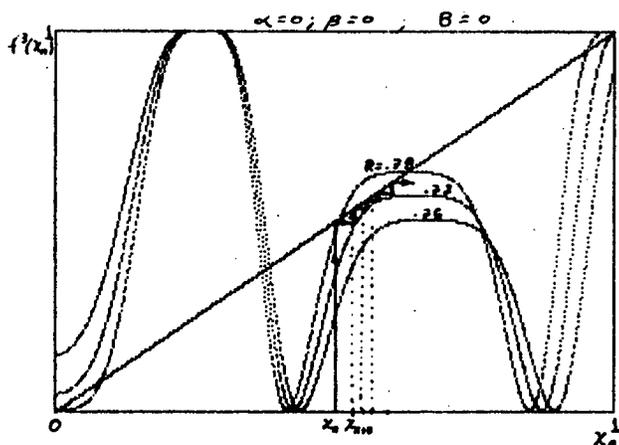


Figura 5: Función de recurrencia iterada 3 veces para tres valores del parámetro R mostrando el canal de intermitencia.

## CONCLUSIONES

Se ha mostrado mediante el análisis numérico que este tipo de mapas tiene competencia entre atractores, con sus respectivas cuencas de atracción, a pesar de ser unidimensional. La aparición de nuevos máximos en el intervalo al incrementarse el parámetro de control, da lugar a ramas de bifurcación independientes que luego se unifican a partir de un valor umbral. Una vez superado dicho valor, el comportamiento intermitente al efectuar-

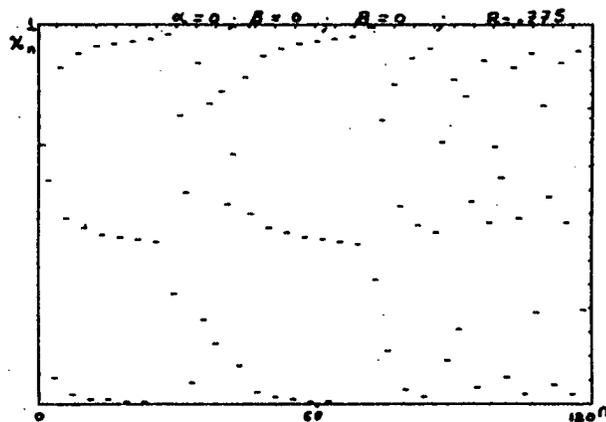


Figura 6: Comportamiento temporal de la solución (en función de n) mostrando regiones de laminaridad para tres estados estables.

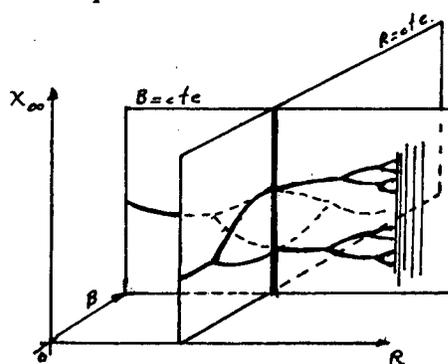


Figura 7: Esquema mostrando la doble dependencia en R y B, cortando las soluciones asintóticas con planos de  $R = cte$ , y  $B = cte$ .

se una bifurcación tangente no es tan regular como en el otro tipo de mapas.

Al analizar la manera de retornar desde una región caótica a otra región de estabilidad, se vió que si el parámetro que se modifica es R, se producirán bifurcaciones tangentes que dan lugar a intermitencias. En cambio al variar el parámetro B, aparecerá además otro mecanismo estabilizador dado por la posibilidad de tener una bifurcación inversa. Una visualización tridimensional de este comportamiento puede verse en la figura 7.

## BIBLIOGRAFIA

1. Chaos, Hao Bai Ling. Ed. World Scientific. (1985). Este libro contiene los artículos mas importantes del tema. También la bibliografía citada en la parte experimental del presente trabajo.  
Order Within Chaos. Berge, Pomeau, Manneville. J. Wiley (1975) Deterministic chaos, an Introduction. Phys. Verlag. (1984).