

COMPORTAMIENTO ASINTOTICO DEL APRENDIZAJE EN REDES NEURONALES

E. Ferrán y R. Perazzo

*Departamento de Física (TANDAR), Comisión Nacional de Energía Atómica,
Av. Libertador 8250, 1429 Buenos Aires*

Ha sido sugerido recientemente que la curva de aprendizaje de los autómatas booleanos es universal, en el sentido de que la misma casi no varía al considerarse autómatas constituidos por diferentes cantidades de compuertas booleanas. En la presente comunicación mostramos que dicho comportamiento universal no se produce en redes homogéneas de procesamiento neuronal continuo impar, conectadas son retroalimentación. En dichas redes, en cambio, se observa un comportamiento asintótico hacia curvas "límites" de aprendizaje. Presentamos resultados de simulaciones numéricas que muestran dicho efecto para redes con un número creciente de capas (cantidad de neuronas por capa constante) y con un número creciente de neuronas en una dada capa intermedia (cantidad de capas constante).

En su trabajo sobre la termodinámica del aprendizaje de autómatas booleanos, Carnevali y Patarnello¹ sugieren que las curvas de aprendizaje de los mismos son universales. Dicha sugerencia está basada en la poca variabilidad que estos investigadores hallan al determinar tres valores de cociente $H[L(F_k)]/H[J]$ para una dada función booleana, en autómatas constituidos por 2, 3 y 4 procesadores, donde $H[L(F_k)]$ es la cantidad de autómatas que representan la función booleana F_k y $H[J]$ es la cantidad de autómatas existentes. Este comportamiento universal no se produce en redes homogéneas de procesamiento neuronal continuo impar, conectadas sin retroalimentación. Ello se visualiza claramente al trazar las curvas de aprendizaje de todas las familias booleanas que son representadas por redes con distintas cantidades de neuronas. El agrupamiento de funciones booleanas en familias se debe a las simetrías de las entradas y salidas de la red y fue analizando en trabajos anteriores^{2,3}.

La figura 1, por ejemplo, representa las curvas de aprendizaje para redes conectadas en cascada con un número creciente de capas de neuronas, dos neuronas por capa, dos señales exteriores de entrada y dos de salida. En dicha figura se observa claramente que las curvas de aprendizaje van cambiando al cambiar la cantidad de capas. Estas curvas de aprendizaje se obtienen a partir de conteos exhaustivos o estadísticos (mediante un proceso Monte Carlo) en el espacio fásico sináptico. Hemos considerado solamente valores $\{-1, 0, +1\}$ para las eficacias sinápticas. Además, hemos considerado que la función de activación de cada neurona está dada por una función impar de tipo sigmoideal. Los tres primeros gráficos de la figura 1 fueron obtenidos mediante un conteo exhaustivo del espacio de

todas las matrices sinápticas. En cambio, los tres últimos lo fueron mediante un conteo Monte Carlo, en el cual se promediaron los valores de $H[L(F_k)]$ correspondientes a las funciones booleanas de una dada familia. En este último caso, llevamos a cabo simulaciones numéricas generando al azar 50.000, 100.000 y 500.000 matrices sinápticas y comprobamos que las curvas de aprendizaje correspondientes a dichas matrices varían muy poco.

Aun cuando el comportamiento "universal" sugerido por Carnevali y Patarnello no ocurre para redes neuronales como las aquí estudiadas, el conjunto completo de curvas de la figura 1 muestra un comportamiento asintótico hacia curvas "límites".

El mismo comportamiento asintótico se observa al variar la cantidad de neuronas de una dada capa, como en las curvas de la fig. 2. Dichas curvas corresponden a una red homogénea con tres capas conectadas en cascada. Los sucesivos gráficos muestran las curvas de aprendizaje para redes que tienen siempre dos neuronas en la primera y en la última capa, pero con 1 a 6 neuronas en la segunda capa. Salvo la notable diferencia entre los dos primeros gráficos de la figura 2, vemos otra vez que las curvas de aprendizaje parecen tender a estabilizarse.

Una forma de cuantificar este comportamiento asintótico consiste en evaluar la "distancia" existente entre las curvas de aprendizaje correspondientes a una misma familia para dos casos "sucesivos" de los previamente graficados. Promediando dichas distancias (utilizando todos los puntos $\Pi_\alpha^{(n)}$; $n = 0, 1, 2, 3, 4$ y todas las familias) obtenemos el parámetro d_{ab} .

$$d_{ab} = \frac{1}{34} \sum_{\alpha} \frac{1}{5} \sum_{n=0}^5 |\Pi_{\alpha}^{(n)}(R_a) - \Pi_{\alpha}^{(n)}(R_b)| \quad (1)$$

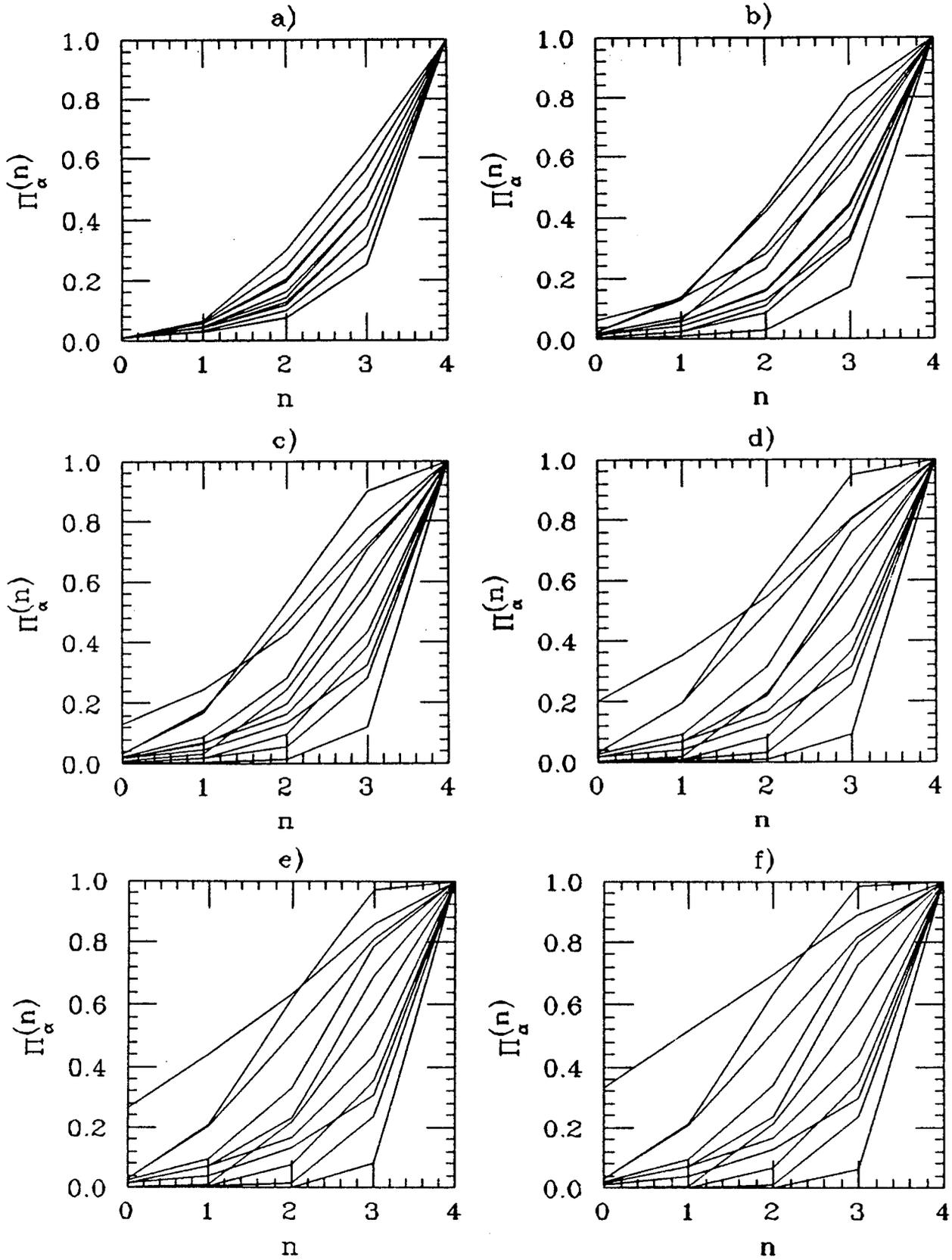


Figura 1: Curvas de aprendizaje de las familias de funciones booleanas prepresentadas por redes con a) 1, b) 2, ... y f) 6 capas de dos neuronas cada una (conectadas en cascada), dos señales exteriores de entrada y dos de salida. $\Pi_\alpha^{(n)}$ es la probabilidad de generación promedio de aprender una función de la α -ésima familia cuando ya se han memorizado n ejemplos.

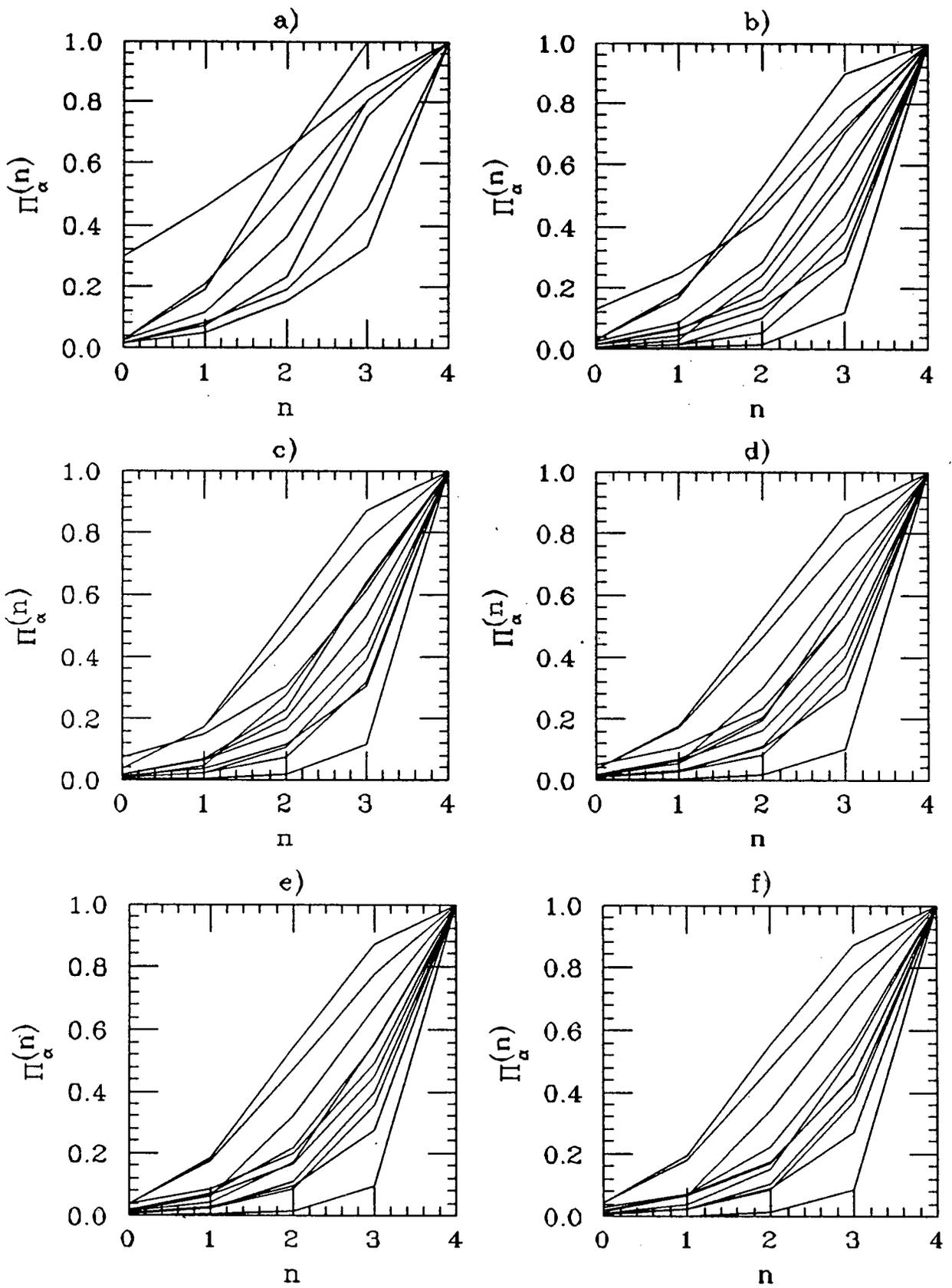


Figura 2: Idem figura 1 para redes de tres capas conectadas en cascada con dos neuronas en la primera capa, dos en la última y a) 1, b)2, ... y f) 6 neuronas en la segunda capa.

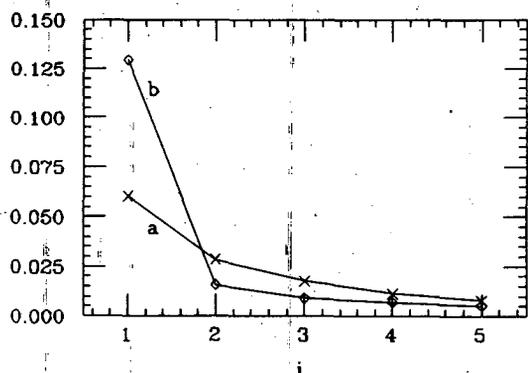


Fig. 3: $d_{i,i-1}$ para las redes de la figura a) 1 y b) 2.

donde R_a y R_b corresponden a dos redes de gráficos "sucesivos" de las figuras 1 y 2. En (1), el valor 34 del denominador corresponde al número total de familias distintas de funciones booleanas que mapean dos entradas binarias en dos salidas. La figura 3 muestra como decrece d_{ab} para todos los casos

analizados en esta sección.

En conclusión, las simulaciones realizadas sugieren que las curvas de aprendizaje de las redes neuronales tienen un comportamiento universal sólo de manera asintótica.

Una demostración rigurosa de esta afirmación requiere un análisis teórico detallado y/o una mayor cantidad de simulaciones numéricas como las que presentamos en esta comunicación.

REFERENCIAS

1. Carnevali y Patarnello, Exhaustive thermodynamical analysis of boolean learning networks, *Europhys. Lett* 4, 1199-1204, 1987.
2. Ferrán y Perazzo, Representabilidad de funciones booleanas mediante redes neuronales, Comunicación a la 73ava Reunión de la AFA, 1988.
3. Ferrán y Perzzo, Symmetry properties of feed-forward neural networks, CNEA Preprint, 1989.