

REGLA DE APRENDIZAJE LOCAL EN REDES NEURONALES

E. Vergini y M. Blatt

Departamento de Física (TANDAR) Comisión Nacional de Energía Atómica
Av. Libertador 8250, 1429 Buenos Aires.

En este trabajo se presenta una regla de aprendizaje local capaz de almacenar memorias correlacionadas. Esta regla converge exponencialmente a la regla no local de Personnaz, Guyon y Dreyfus. Se muestran simulaciones numéricas.

En los últimos años se ha renovado el interés por los modelos de Redes Neuronales^{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}. En muchos de estos modelos la red consiste en un conjunto de espines (*neuronas*) altamente interconectados, cuyas conexiones internas (*sinapsis*), son modificadas mediante una regla de aprendizaje con el objeto de almacenar y recobrar información. Los estados memorizados deben ser atractores fijos de la dinámica. A partir de un estado inicial, el sistema evolucionará rápidamente al atractor más próximo.

Sea una red compuesta por N neuronas. Un estado del sistema queda definido por un vector ξ de componentes $\xi_i = \pm 1$, $i = 1, \dots, N$. El campo sobre la neurona i es:

$$h_i = \sum_{j=1}^N J_{ij} \xi_j \quad (1)$$

donde J_{ij} es la matriz sináptica. La dinámica del sistema es definida por un algoritmo asincrónico tipo Monte Carlo a temperatura cero, cuya regla de evolución es:

$$\xi_i(t + \Delta t) = \begin{cases} 1 & \text{si } h_i \xi_i > 0 \\ -1 & \text{si } h_i \xi_i < 0 \end{cases}$$

Se puede definir la energía del sistema como:

$$E_i = \sum_{ij=1}^N J_{ij} \xi_i \xi_j \quad (2)$$

En el caso particular en el que $J_{ij} = J_{ji}$, E es una función monotonamente decreciente¹; luego el sistema evoluciona hacia un punto fijo.

Una regla de aprendizaje es local si el cambio en la sinapsis J_{ij} , al memorizar un vector ξ , sólo depende de^{7, 9, 10} ξ_i, ξ_j, h_i, h_j . La regla de Coöpeer¹¹ es un ejemplo, en la cual el cambio en la matriz sináptica está dado por $\Delta J_{ij} = \xi_i \frac{d}{dN}$. Esta regla es capaz de almacenar sin error vectores no correlacionados⁹. Sin embargo, cuando se quiere trabajar con

vectores correlacionados, es necesario recurrir a otras reglas⁷. Tal es el caso de las reglas iterativas^{9, 12}, que son esencialmente del tipo de perceptrón¹³, en las que los vectores son presentados cíclicamente hasta que todos satisfacen simultáneamente una determinada condición de encaje. Estos métodos tienen el inconveniente de converger lentamente a su forma final. Por otro lado, si se tienen p vectores ya memorizados y se quiere almacenar uno nuevo, es necesario "recordar" todos los anteriores.

Una regla no local de aprendizaje, capaz de almacenar y recuperar memorias correlacionadas, es la de Personnaz, Guyon y Dreyfus^{5, 7, 8}. La matriz J_{ij} es el proyector ortogonal sobre el subespacio generado por los vectores a memorizar.

Basados en esta idea, hemos construido una regla de aprendizaje local que converge a la anterior. Cada uno de los vectores a memorizar es almacenado en un evento. Cada evento consiste en una o más presentaciones de dicho vector a la red. Para explicar cómo funciona la regla propuesta en este trabajo, tomemos el caso en que $\{\xi_1, \dots, \xi_p\}$ fueron ya memorizados y la matriz sináptica correspondiente es $J_{ij}^{(p)}$. Se quiere ahora almacenar al vector ξ . Esto es realizado en N presentaciones. La nueva matriz sináptica será:

$$J_{ij}^{(p+1)} = J_{ij}^{(p)} + \sum_{m=1}^n \Delta J_{ij}^{(m)} \quad (3)$$

con

$$\Delta J_{ij}^{(m)} = \frac{k^{m-1}}{N} (\xi_i - h_i) (\xi_j - h_j) \quad (4)$$

$\Delta J_{ij}^{(m)}$ es el cambio producido en la matriz sináptica en la presentación m -ésima y h_i el campo local de la neurona i en el paso anterior. El parámetro k es un número real perteneciente al intervalo^{1, 4}, al que llamaremos *coeficiente* de memoria.

Se demuestra que, partiendo de una *tabula rasa*¹⁴, J_{ij} toma la forma:

Correlacion 0.00 K=4

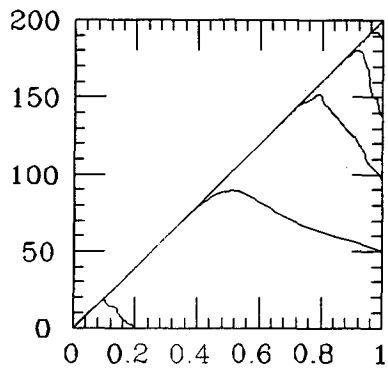


Fig1

Correlacion 0.30 K=4

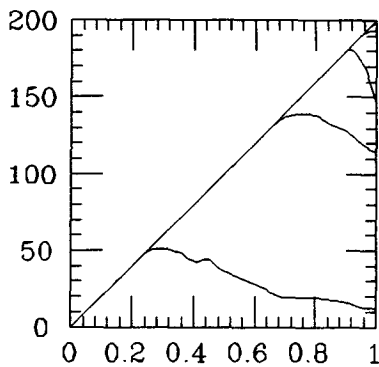


Fig2

Correlacion 0.60 K=4

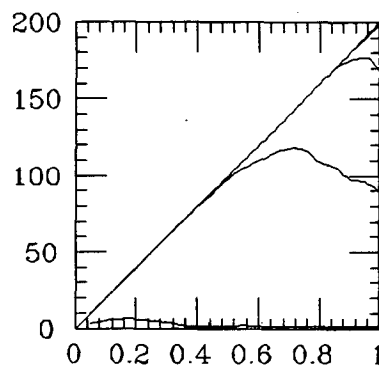


Fig3

Correlacion 0.00 K=2

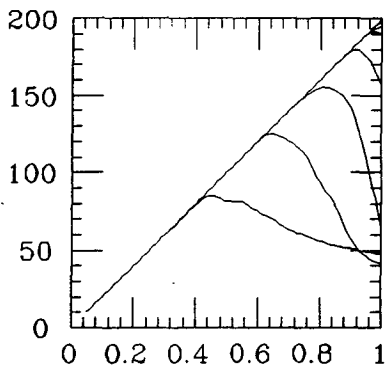


Fig4

Correlacion 0.30 K=2

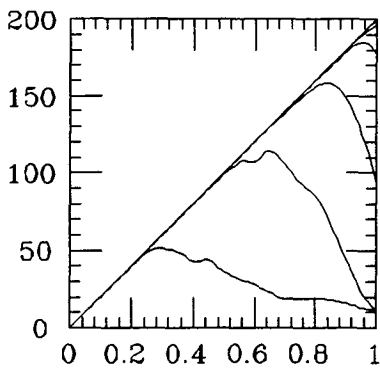


Fig5

Correlacion 0.60 K=2

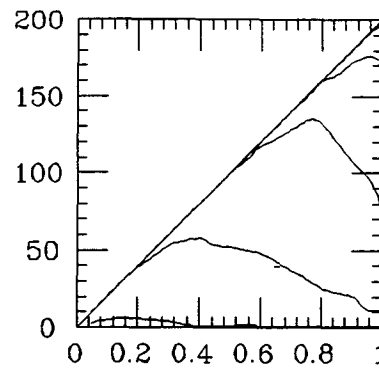


Fig6

LEYENDA DE LAS FIGURAS

Fig 1: Número de memorias estables N vs. α , los patrones están correlacionados y $K=4$. El parámetro n es el mismo para todas las memorias, se muestra como aumenta el número de patrones estables con n . Cuando $n=5$ todos los vectores almacenados son estables. Se compara con la regla de aprendizaje de Cooper.

Fig 2: Número de memorias estables N vs. α , los patrones tienen correlación 0.30 y $K=4$. El parámetro n es el mismo para todas las memorias, se muestra como aumenta el número de patrones estables con n . Cuando $n=5$ todos los vectores almacenados son estables.

Fig 3: Número de memorias estables N vs. α , los patrones tienen correlación 0.60 y $K=4$. El parámetro n es el mismo para todas las memorias, se muestra como aumenta el número de patrones estables con n . Cuando $n=5$ todos los vectores almacenados son estables.

Fig 4: Número de memorias estables N vs. α , los patrones están descorrelacionados y $K=2$. El parámetro n es el mismo para todas las memorias, se muestra como aumenta el número de patrones estables con n . Cuando $n=7$ todos los vectores almacenados son estables.

Fig 5: Número de memorias estables N vs. α , los patrones tienen correlación 0.30 y $K=2$. El parámetro n es el mismo para todas las memorias, se muestra como aumenta el número de patrones estables con n . Cuando $n=7$ todos los vectores almacenados son estables.

Fig 6: Número de memorias estables N vs. α , los patrones tienen correlación 0.60 y $K=2$. El parámetro n es el mismo para todas las memorias, se muestra como aumenta el número de patrones estables con n . Cuando $n=6$ todos los vectores almacenados son estables.

$$h_i \xi_i > 0 \quad (7)$$

$$J_{ij} = \sum_{\mu=1}^r \gamma^\mu \frac{\xi_1^\mu \xi_j^\mu}{\|\xi_1^\mu\|^2} \quad \gamma^\mu = 1, \quad 0 < \gamma^\mu \leq 1 \quad \mu = 2, \dots, r \quad (5)$$

donde los ξ_1^μ son los vectores de norma no nula obtenida al ortogonalizar $\{\xi_1, \dots, \xi_p\}$ mediante el método de Schmidt; r es el rango de los p vectores a memorizar.

Si $\tau^1 = \dots = \tau_{u-1}$ entonces [14]:

$$1 - \frac{N}{\|\xi_1^\mu\|^2} k^n \leq \gamma^\mu \leq 1 \quad (6)$$

El caso $\|\xi_1^\mu\| = 0$ no está contemplado en (6), ya que significa que el nuevo vector pertenece al subespacio generado por los vectores ya memorizados. Por lo tanto, la forma asintótica de J_{ij} coincide con un proyector ortogonal en el subespacio generado por los vectores memorizados. Hemos estudiado la estabilidad de los vectores almacenados en función de $\alpha = P/N$, de su correlación, del número de presentaciones y del coeficiente de memoria. El análisis numérico fue hecho de la siguiente manera: los vectores (correlacionados o no) son generados al azar, luego memorizados usando la regla de aprendizaje (3) y posteriormente se analiza la estabilidad de los vectores almacenados. Un vector es estable si es un punto del sistema, para ello basta con que se satisfaga:

En las figuras 1-6 se grafican el número de vectores memorizados que son puntos fijos vs. α . Es importante destacar que, aún para memorias muy correlacionadas y α grande, son necesarias pocas presentaciones (a lo sumo 5) de cada vector a la red.

REFERENCIAS

1. J. J. Hopfield, Proc. Natl. Acad. Sci. USA. **79**, 2554 (1982).
2. W. A. Little y G. L. Shaw, Math. Biosci. **39**, 281 (1978).
3. P. Peretto, Biol. Cybernet. **50**, 51 (1984).
4. W. Kinzel, Z. Phys. **B 60**, 205 (1985).
5. L. Personnaz, I. Guyon, y G. Dreyfus, J. Phys. (Paris) Lett. **46**, L 359 (1985).
6. D. J. Amit, H. Gutfreund y H. Sompolinsky, Phys. Rev. Lett **55**, 1530 (1985).
7. I. Kanter y H. Sompolinsky, Phys. Rev. **A 35**, 380 (1987).
8. L. Personnaz, I. Guyon, y G. Dreyfus, Phys. Rev. **A 34** 4218 (1986)
9. S. Diederich y M. Opper, Phys. Rev. Lett **59** 949 (1987).
10. L. Personnaz, I. Guyon, G. Dreyfus y G. Toulouse, J. Stat. Phys. **43**, 411 (1986).
11. L. N. Cooper, F. Liberman, y E. oja, Biol. Cybern. **33**, 9 (1979).
12. G. Poppel y U. Krey.
13. F. Resenblatt, Principles of Neurodynamics and Theory of Brain Mechanisms (Spartan, Washington, D. C., 1962).
14. M. Blatt y E. Vergini, no publicado aún.

CEILAP
CITEFA - CONICET
ZUFRIATEGUI Y VARELA
1603 VILLA MARTELLI
REPUBLICA ARGENTINA