

RESOLUCION DE LA ECUACION DE TRANSFERENCIA DE CALOR DE UN CILINDRO EXPUESTO A UN FLUJO DE GOTAS SOBREENFRIADAS

N.E. Castellano* y O.B. Nasello**

Facultad de Matemáticas, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba, Laprida 854, 5000 Córdoba

En el presente trabajo se resuelve la ecuación de transferencia de calor para un cilindro infinito expuesto a un flujo de aire que transporta una densidad homogénea de gotas de agua sobreenfriadas. Se supone que el flujo de aire es de tipo "potencial" y que todas las gotas que impactan sobre el cilindro congelan. Además, se tienen en cuenta todas las variaciones, a lo largo de la superficie del colector, de las fuentes y sumideros de calor, sean debidas a la inercia de las gotas como a los cambios producidos en la capa límite.

Las condiciones de contorno se expresan en forma matricial y la solución del problema se encuentra invirtiendo la matriz correspondiente.

Los resultados obtenidos se utilizan para analizar las posibles variaciones que puede sufrir la temperatura de la superficie de una acreción (granizo artificial), durante su crecimiento en el Laboratorio.

INTRODUCCION

Las experiencias de simulación de crecimiento de granizos se realizan en túneles de viento a los que se le inyecta un flujo de gotas. Las diferentes condiciones atmosféricas reales se obtienen variando la temperatura $[T_a]$, el contenido de agua líquida $[w]$ y la velocidad de la corriente de aire que circula por el túnel $[u]$. En general, las acreciones se obtienen sobre cilindros y las experiencias se realizan modificando los parámetros antes mencionados. La temperatura media de la superficie de la acreción $[T_s]$ se determina midiendo la temperatura en el eje del cilindro, o empleando la expresión analítica encontrada por Macklin¹(1962). De esta manera es posible estudiar acreciones con igual T_s , y distintas distribuciones superficiales, no obstante, que las características de las mismas podrían depender de esta distribución.

En el presente trabajo se presenta la solución de la ecuación de conducción del calor para un cilindro infinito expuesto a un flujo de gotas sobreenfriadas y se muestra la dependencia de la temperatura de la superficie con los parámetros que simulan las condiciones reales.

DESARROLLO TEORICO

Se considera un cilindro de hielo infinito, de radio a , inmerso en una corriente de aire con veloci-

dad u y temperatura T_a lejos del hidrometeoro. Esta corriente transporta gotitas de agua de radio b que impactan y congelan sobre el blanco, dando lugar a la formación de una acreción. La ecuación de transmisión de calor que se resuelve es

$$\nabla^2 T = c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

donde c es la constante de difusividad del hielo y T es una función de las variables polares (r, θ) del cilindro. Debido a que el cilindro permanece en reposo, en régimen estacionario, la ecuación a resolver es la de Laplace, cuya solución es de la forma

$$T(r, \theta) = \sum_0^{\infty} A_m r^m \cos(m\theta) \quad (2)$$

La condición de contorno que simula las condiciones atmosféricas existentes durante la experiencia, es la del balance de calor en la superficie del blanco y según Lozowski² viene dada por

$$\begin{aligned} & H \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=a} \quad (3) \\ & = h(\theta)(T_a - T(r, \theta)) + h(\theta) b p (e(T_a) - e(T(r, \theta))) + \\ & + \frac{h(\theta) r c(\theta) u^2}{2c_p} + \frac{R_w(\theta) u^2}{2} + c_w R_w(\theta)(T_a - T_0) + \\ & + R_w(\theta) l f(T_0) + c_i R_w(\theta)(T_0 - T(r, \theta)) \end{aligned}$$

donde la interpretación física de cada uno de los términos es la siguiente:

1. Conducción en el cilindro mismo; H = conductividad térmica del hielo.
2. Conducción y convección a través de la capa lí-

*Becario del CONICET

**Investigador del CONICET

mite del cilindro. El coeficiente de transferencia del calor, $h(\theta)$, puede ser escrito en función del número de Nusselt, $Nu(\theta)$, como

$$h(\theta) = K \frac{Nu(\theta)}{2a} \quad (4)$$

donde K es la conductividad térmica del aire. Experimentalmente se ha encontrado que $Nu(0)$ es función del número de Reynolds del cilindro $Re = 2ua/v$ (v = viscosidad cinemática del aire), y del nivel de turbulencia de la corriente.

3. Transferencia de calor latente debido a la sublimación del hielo en la superficie. En este término se aproxima la presión de saturación de vapor de agua, $e(t)$, hasta el término lineal. La constante bp toma en cuenta parámetros característicos del aire.

4. Calentamiento aerodinámico debido a la compresión adiabática del aire y al trabajo realizado por la viscosidad, en la capa límite. c_p = capacidad calorífica del aire y $rc(\theta)$ = factor de recuperación.

5. Energía cinética de las gotas que impactan, $R_w(\theta)$ = flujo de masa de gotas, definido como

$$R_w(\theta) = \beta(\theta) w u \quad (5)$$

con $\beta(\theta)$ = eficiencia de colección local sobre el cilindro de gotas de radio b . Este último parámetro toma en cuenta el hecho que, debido a su inercia, las gotas no siguen las líneas de corriente.

6. Calentamiento del agua acrecida. T_0 = temperatura de equilibrio agua-hielo a presión atmosférica y c_w = capacidad calorífica del agua.

7. Calor latente de congelamiento, suponiendo que todo el agua que llega al cilindro congela.

8. Enfriamiento de las gotas congeladas de T_0 a la temperatura de la superficie; c_i = capacidad calorífica del hielo.

Escribiendo las funciones $rc(\theta)$, $Nu(\theta)$ y $\beta(\theta)$ en serie de Fourier en $\cos(\theta)$ con coeficientes r_n , n_n y b_n respectivamente y utilizando la ortogonalidad de estas funciones, la condición de contorno toma la forma matricial

$$M \vec{A} = \vec{C} \quad (6)$$

donde el vector \vec{A} representa los coeficientes del desarrollo de la función temperatura dada en 2. M es tal que

$$M_{ij} = \delta_{ij} \left\{ a_i^{-1} H(1 - \delta_{i0}) + \frac{1}{2} a_i [n_i(N+M) + P b_{i0}] (1 + \delta_{i0}) \right\} + \frac{1}{2} a_i \left\{ (N+M) (n_{i+j} + n_{|i-j|}) + P (b_{j+i} + b_{|i-j|}) \right\}$$

donde $M + N = K / 2a (1 + bp)$ y $P = u w c_i$; y los elementos del vector \vec{C} son

$$C_i = [Ta(N+M) n_i + b_i Q] 2^{i0} + \frac{1}{2} r_i n_i (1 + \delta_{i0}) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} r_i (n_{n+i} + n_{|n-i|}) \quad (8)$$

donde $Q = w u (u^2/2 + c_w (Ta - T_0) + l_f (T_0) + c_i T_0)$. Para encontrar \vec{A} se aproxima la matriz M y el vector \vec{C} por, respectivamente, la matriz M_n de dimensión $n * n$ finita y con términos $M_{nij} = M_{ij}$ por el vector \vec{C}_n de dimensión n y términos $C_{nij} = C_j$. La incógnita \vec{A} se obtiene invirtiendo la matriz M_n . El valor de n se elige de acuerdo con la precisión deseada en la determinación de la función $T(a, \theta)$.

RESULTADOS Y DISCUSION

La resolución numérica de la ecuación 2 se realiza utilizando expresiones de las funciones $\beta(\theta)$, $Nu(\theta)$ y $rc(\theta)$ correspondientes a números de Reynolds menores que 10^5 y rugosidad del blanco nula. De acuerdo con Lozowski, la expresión para $\beta(\theta)$ utilizada, viene dada por:

$$(9)$$

$$\beta(\theta) = \beta_0 \cos\left(\frac{\pi\theta}{2\theta_m}\right) + \frac{\pi^3}{\theta_m^3(\pi^2-4)} \left(E - \frac{2\theta_m\beta_0}{\pi}\right) \theta^2 \sin\left(\frac{\pi\theta}{\theta_m}\right)$$

para $\theta < \theta_m$ y $\beta = 0$ para $\theta > \theta_m$, donde los parámetros β_0 (eficiencia de colección local), E (eficiencia de colección total) y θ_m (máximo ángulo de colección) caracterizan la colección de gotas por el hidrometeoro y dependen de u , a y b .

En la Figura 1 se presenta un gráfico típico de $\beta(\theta)$ y se muestran los gráficos de las funciones $Nu(\theta)$ y $rc(\theta)$ empleadas, los cuales corresponden a las expresiones reportadas por Acenbach³ y Seban⁴ respectivamente.

Los resultados obtenidos muestran que la distribución de temperaturas del cilindro depende marcadamente del radio de las gotas y de la velocidad del aire.

En general, se observa que la diferencia entre la temperatura máxima y mínima, medidas en la superficie del colector, (δT) aumenta con el número de Reynolds, siendo por ejemplo para $Ta = -10^\circ C$, $\delta T \sim 0.1^\circ C$, para $Re \sim 2$ y $\delta T \sim 5^\circ C$ para $Re \sim 19$. En la figura 2 se muestran una serie de curvas características de la distribución de temperaturas de la superficie correspondiente a $Ta = -10^\circ C$, $u = 10m/s$ y $w = 1g/m^3$ para distintos tamaños de gotitas de agua.

Finalmente, se realizaron los cálculos en las

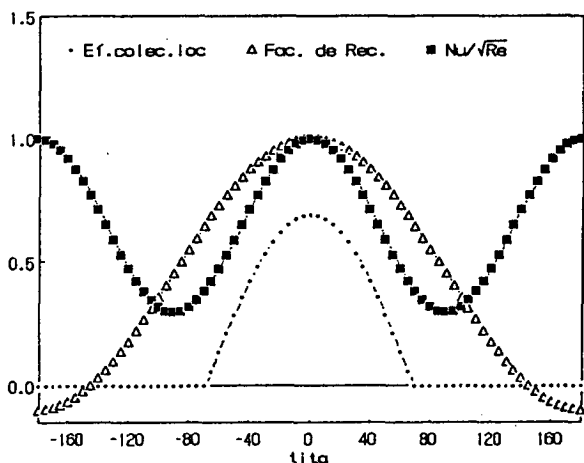


Figura 1. Gráfico típico de $b(\theta)$ y gráficos de las funciones $Nu(\theta)$ y $rc(\theta)$ empleadas.

mismas condiciones atmosféricas ($T_a = -22^\circ\text{C}$, $u = 10\text{m/s}$, $b = 18\mu\text{m}$, $a = 0.75\text{cm}$ y $w = 4.8$ y 2.2g/m^3) en las que Prodi, Levi y Levezani⁵ obtuvieron acreciones en el laboratorio. Los resultados obtenidos, predicen un régimen de crecimiento húmedo para $w = 4.8\text{g/m}^3$ y seco para $w = 2.2\text{g/m}^3$, lo cual concuerda con lo observado por los autores antes mencionados en forma experimental.

Por el contrario, si se considera, tal como lo suponen Personne⁶, Lozowski², Brunet⁷, etc en los modelos de simulación de acreción en desarrollo, que la conductividad térmica del hielo es nula, se obtienen en ambos casos crecimientos húmedos. Esto muestra la importancia de la conductividad del colector en la determinación de la temperatura de la superficie del mismo. Es por esto que es necesario revisar los resultados obtenidos por otros autores en la simulación de crecimientos de granizos en las que consideraron al colector como aislador, ya que la diferencia entre los resultados con una y otra hipótesis es notable.

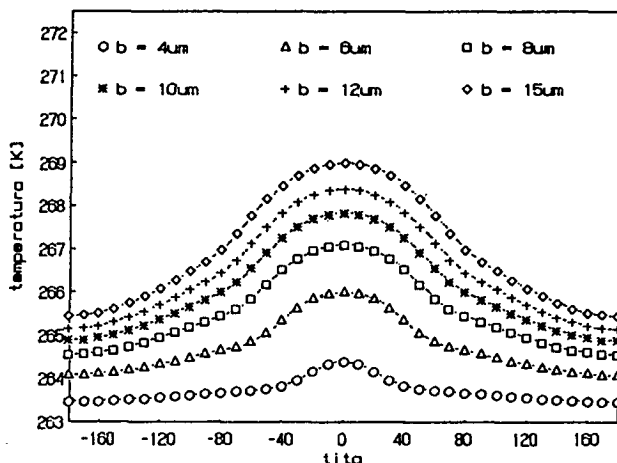


Figura 2. Curvas de la temperatura de superficie para distintos tamaños de gotitas de agua.

REFERENCIAS

1. Macklin W.C. Quart. J.R. Met. Soc., Vol.88, 1962.
2. Lozowski, "The icing of unheated non-rotating cylinder in liquid water droplet-ice crystal clouds". National Research Council Canada, Report LTR-LT-96, 1979.
3. Achenbach E., "Heat transfer from smooth and rough surfaced circular cylinders in a cross flow", Proceedings of the 5th International Heat Transfer Conference, Tokyo, 1974.
4. Seban R. A., Journal of Heat Transfer, Vol 82, 1960.
5. Prodi F., Levi L. And Levizzani V., Quart. J. R. Met. Soc., Vol 112, 1986.
6. Personne P. et Gayet J.F., J. Rech. Atmos., Vol. 18, 1984.
7. Brunet L., "Conception et discussion d'un modele de formation du grive sur des obstacles varies". Tesis Doctoral, 1987.