SUPERGRAVEDADES CON TERMINOS NO LINEALES EN LAS CURVATURAS

A. Foussats* y O. Zandron*
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario, Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario.

Se desarrolla un formalismo canónico convariante (FCC) sobre variedades con estructura de supergrupos. A dicho formalismo se lo puede utlizar para describir la gravedad en cualquier dimensión, las distintas supergravedades y los diferentes supermultipletes acoplados a las supergravedades. Con dicho formalismo, es posible también formular en forma Hamiltoniana covariante, supergravedades no lineales en la curvatura de Riemann. Estas supergravedades no lineales, son importantes, en particular en dimensión D=10, pues es posible vincularlas con el sector no masivo de teorías efectivas de supercuerdas.

INTRODUCCION

El formalismo canónico convariante (FCC) fue propuesto por Regge y otros[1,2] para la gravedad y para la supergravedad simple en dimensión D = 4. Posteriormente nosotros[3] extendimos dicho formalismo a distintas dimensiones y lo aplicamos a las supergravedades en D = 5, D = 6 y D = 11. Además, lo generalizamos para poder utilizarlo en sistemas acoplados como por ejemplo, teorías supersimétricas de Yang-Mills o supermultipletes de Wess-Zumino acoplados con la supergravedad[4,5].

Todos los trabajos citados se refieren a sistemas supermétricos en los cuales la supergravedad es lineal en la curvatura de Riemann.

Después de que fuese probada la cancelación de anomalías en teorías supersimétricas con la sola introducción de los términos de Chern-Simons del grupo de Lorentz[6], se prestó mucha atención a la construcción de teorías supersimétricas sobre variedades con estructura de supergrupo con términos no lineales en la curvatura de Riemann. En teorías supersimétricas geométricas construídas sobre álgebras diferenciales libres (ADL) (o sistemas integrables de Cartan)[7], hay una manera muy precisa de introducir los términos de Chern-Simons y es a través del ADL. Este mecanismo genera términos no lineales en la curvatura de Riemann.

Para poder aplicar el FCC a estas teorías de la supergravedad, no lineales en la curvatura de Riemann, es necesario generalizar dicho formalismo[3,8,9,10]. En la referencia (10) nosotros extendimos y aplicamos el formalismo Hamiltoniano covariante a la teoría N = 1, D = 10 de super Yang-Mills acoplada a la supergravedad. Esta es una teoría geometría formulada sobre un ADL. Se desarrolló y aplicó a dicha teoría el formalismo canónico covariante para los casos lineales y cuadrático en la curvatura de Riemann. En este último caso, partiendo de un formalismo Hamiltoniano de primer orden, el cual contiene un número finito de términos incluyendo los cuadráticos en curvaturas (formalismo polinómico) y utilizando el mecanismo de propagación de la torsión, es posible pasar a un formalismo de segundo orden, el cual muestra una estructura no polinómica. Las transformaciones supersimétricas y las ecuaciones reonómicas presentan también una estructura no polinómica. Este hecho es el que permite confrontar estas teorías geométricas Hamiltonianas con el sector no masivo de teorías efectivas de supercuerdas[11].

FORMALISMO CANONICO COVARIANTE

El FCC sobre variables con estructura de supergrupo es un formalismo Hamiltoniano covariante de primer orden. Los campos dinámicos están dados en general por un conjunto de a-superformas μ^A, donde A es un índice compuesto y dichos campos pueden ser de dos clases diferentes:

i) Los campos de medida que son objetos geométricos y están representados por las 1-superformas pseudo conexiones μ^A definidas en el espacio fibrado principal construido a partir de la variedad supergrupo G. La fibra H es un subgrupo bosónico de G, y es el grupo de simetría de medida exacto de la teoría[12]. En las configuraciones de campo distintas del vacío, las pseudo conexiones μ^A no satisfacen la ecuación de estructura de Maurer-Cartan y la diferencia de cero define las 2-superformas curvaturas $R^A(\mu)$. Si la teoría supersimétrica de medida está basada sobre un ADL, algunos de los campos de medida son en general superformas de grado mayor que uno y se debe utilizar la ecuación generali-

* Investigador del CONICET

zada de Maure-Cartan[13]. Esto ocurre por ejemplo en las supergravedades en dimensiones D = 6, D = 10 y D = 11.

ii) Los campos dinámicos O-superformas que no son de origen geométrico y aparecen como tales en las supergravedades llamadas impuras, por ejemplo D = 10 y D = 11. Ellos son necesarios por dos razones, hacer posible la propagación de "fotones" y hallar ecuaciones de campo consistentes. Estos campos también cumplen un rol fundamental en teorías de la supergravedad acopladas con supermultipletes de Yang-Mills o de Wess-Zumino.

Es así que en un formalismo canónico covariante se deben definir impulsos conjugados de un conjunto de variables de campos que son en general a superfomas y además se debe preservar la covariancia general impuesta a estas teorías construídas sobre supervariedades. Por lo tanto, en vez de la definición de velocidad debemos considerar la derivada exterior D-dimensional de una a-superforma μ^A, esto significa que la (a + 1) - superforma $d\mu^A$ jugará el rol de velocidad en el FCC. Por lo tanto el conjunto de momentos canónicos conjugados π_A de los campos μ^A quedan definidos como las (D - (a + 1)) - superformas obtenidas por variación funcional de la densidad Lagrangiana de la teoría con respecto a las "velocidades" $d\mu^A$.

Se hace necesario además definir una operación adecuada entre formas, capaz de reemplazar el rol de los paréntesis de Poisson, y con la ayuda de los cuales puedan ser escritas las ecuaciones de movimiento de Hamilton. Para definir esta operación llamada corchetes graduados entre formas (graded form-brackets) se parte de considerar que dichos corchetes en dimensión D definen el mapeo

$$\mathcal{F}^a \times \mathcal{F}^b \rightarrow \mathcal{F}^{a+b-(D-1)} \qquad (2.1)$$

donde $\mathcal{F}^a$ es el conjunto de a-superformas. Los pares de variables canónicas conjugadas μ^A y π_A verifican la propiedad:

$$\left(\mu^A, \pi_B\right) = (-1)^{a+1+|A|}\delta^A{}_B \qquad (2.2)$$

donde a y $|A|$ son respectivamente el grado y el "grading" de Fermi de la forma μ^A. Notamos que la operación corchete entre formas así definida, para pares de variables canónicas conjugadas, da como resultado una cero forma. Además estos corchetes en dimensión espacio-tiempo D verifican las propiedades dadas en referencia (5).

Por razones de espacio sólo daremos los fundamentos del FCC para el caso en el cual la supergravedad esté descripta por un Lagrangiano no lineal en las curvaturas[14].

Recordamos que la densidad Lagrangiana correspondiente a una teoría de la supergravedad lineal en las curvaturas, construída sobre variedad con estructura de supergrupo en dimensión D, es una D-forma bosónica funcional de la curvatura de la forma[12]:

$$\mathcal{L} = M + R^A(\mu) \wedge M_A \qquad (2.3)$$

donde A es un índice compuesto que varía en la representación adjunta del supergrupo G. En analogía con la mecánica se puede definir un Hamiltoniano canónico geométrico (D-forma bosónica) dado por:

$$H_{can} = d\mu^A \wedge \pi_A - \mathcal{L} \qquad (2.4)$$

donde hemos elegido el orden "velocidad ^ momento" para el producto "wedge".

En una teoría general de la supergravedad la densidad Lagrangiana será un polinomio de grado arbitrario en las curvaturas, con coeficientes que serán superformas funciones de μ^A [14]. En particular en el caso de la supergravedad N = 1 D = 10 no lineal, la densidad Lagrangiana es una 10-forma y nos interesa considerar el caso en el cual ella es un polinomio cudrático en las curvaturas.

El primer paso es utilizar la ecuación para las curvaturas:

$$R^A(\mu) = d\mu^A + \frac{1}{2} C^A{}_{BC}\mu^B \wedge \mu^C = \Lambda^A + C^A \qquad (2.5)$$

donde $C^A = 1/2\, C_{BC}{}^A \mu^B \wedge \mu^C$ es en conjunto de 2-superformas con coeficientes constantes, para escribir la densidad Lagrangiana en función de las variables $\Lambda^A = d\mu^A$ en vez de usar las variables R^A. Además, como consideraremos a μ^A y Λ^A como variables independientes, esto requiere la adición de un conjunto de vínculos $(\Lambda^A - d\mu^A)$ con los correspondientes multiplicadores de Lagrange β_A a la expresión original del Lagrangiano. De esta manera la densidad Lagrangiana se escribe:

$$\mathcal{L} = \nu + \Lambda^A \wedge \nu_A + \frac{1}{2} \Lambda^A \wedge \Lambda^B \wedge \nu_{AB} + \left(\Lambda^A - d\mu^A\right) \wedge \beta_A \qquad (2.6)$$

Como los multiplicadores de Lagrange β_A son a priori independientes y deben ser determinados, en el FCC para supergravedades con términos altos en curvaturas se debe partir considerando que los campos independientes son μ^A, Λ^A y β^A. Por lo tanto debemos definir los momentos canónicos conjugados correspondientes a cada uno de estos capos. Llamamos π_A, P_A y $\pi_A(\beta)$ respectivamente a tales momentos y ellos se obtienen por variación funcional de la densidad Lagrangiana (2.6) con respecto a las "velocidades" $d\mu^A$, $d\Lambda^A$ y $d\beta^A$. En este caso, para todos los pares de variables canónicas conjugadas valen relaciones análogas a la (2.2). El conjunto de vínculos primarios se obtiene directamente de (2.6); ellos están dados por todas las relaciones entre los campos y los momentos no dependientes de las velocidades y son:

$$\phi_A = \pi_A + \beta_A(\mu, \Lambda) \approx 0 \qquad (2.7a)$$

$$\psi_A = P_A \approx 0 \qquad (2.7b)$$

$$\varphi_A = \pi_A(\beta) \approx 0 \qquad (2.7c)$$

Teniendo en cuenta la expresión (2.6) para $\mathcal{L}$ y la definición (2.4) para el H_{can}, en este caso resulta;

$$H_{can} = -\nu + \frac{1}{2}\Lambda^A \wedge \Lambda^B \wedge \nu_{AB} \qquad (2.8)$$

Siguiendo los lineamientos de la teoría Hamiltoniana de Dirac definimos el Hamiltoniano total (o extendido) de la teoría como sigue:

$$H_T = H_{can} + Z^A \wedge \phi_A + W^A \wedge \psi_A + X^A \wedge \varphi_A(\beta) \qquad (2.9)$$

donde los multiplicadores de Lagrange Z^A, W^A y X^A son superformas funcionales de μ^A y Λ^A a ser determinados.

Ahora es necesario introducir la ecuación fundamental de movimiento en el FCC, en analogía con la relación $df/dt = (f,H) + \partial f/\partial t$ de la mecánica clasica. Dicha ecuación que contiene a los corchetes graduados entre superformas será:

$$dA = (A, H_T) + \partial A \qquad (2.10)$$

donde A es un polinomio genérico en las variables canónicas. El operador ∂ actúa no trivialmente sólo sobre campos externos (ver refs (1, 3)), o sea resulta $\partial\mu^A = \ldots = \partial\pi_A = \ldots = 0$. Dado que en el caso del FCC para supergravedades con términos altos en curvaturas no hay campos externos debido a que todos los campos son variables canónicas, el operador ∂ debe ser omitido; no así en el caso de supergravedades lineales en las curvaturas. Luego la ecuación (2.10) para el caso bajo consideración, debe ser reemplazada por:

$$dA = (A, H_T) \qquad (2.11)$$

Utilizando (2.11) para las variables de campo μ^A, Λ^A, β^A y teniendo en cuenta las propiedades de los corchetes, se obtiene:

$$d\mu^A = (\mu^A, H_T) = Z^A \qquad (2.12a)$$

$$d\beta^A = (\beta^A, H_T) = X^A \qquad (2.12b)$$

$$d\Lambda^A = (\Lambda^A, H_T) = W^A = 0 \qquad (2.12c)$$

siendo esta última relación nula por ser la identidad de Bianchi escrita en el FCC. Considerando las otras tres ecuaciones de Hamilton para los vínculos (2.7) y como por consistencia ellas deben ser al menos débilmente conservadas, se obtiene:

$$(2.13a)$$

$$d\phi_A = (\phi_A, H_T) = -(\text{Ec. de mov.}) + (\phi_A, Z^B) \wedge \phi_B \approx 0$$

$$(2.13b)$$

$$d\psi_A = (\psi_A, H_T) = -(\beta_A + \nu_A + \Lambda^B \wedge \nu_{AB}) = (-1)^{a+1+aD+D}\phi_A \approx 0$$

$$(2.13c)$$

$$d\varphi^A = (\varphi^A, H_T) = -(-1)^{|A|}(\Lambda^A - Z^A) \approx 0$$

Notemos que estas ecuaciones corresponden en la teoría Hamiltoniana usual de Dirac, a la condición de preservación de los vínculos en el tiempo. La ecuación (2.13a) nos permite obtener las ecuaciones de movimiento en la formulación Hamiltoniana. El segundo término del miembro derecho es un término débilmente cero. La ecuación (2.13c) implica $\Lambda^A \approx Z^A$. Las ecuaciones (2,13) muestran la ausencia de vínculos secundarios en el FCC. Podemos utilizar la ecuación (2.13b) para escribir β_A como un funcional de μ^A y Λ^A quedando así determinado:

$$\beta_A = -(\nu_A + \Lambda^B \wedge \nu_{AB}) \qquad (2.14)$$

Este hecho es equivalente a elegir el vínculo φ^A (β) fuertemente igual a cero, luego el Hamiltoniano total (2.9) se escribe:

$$H_T = H_{can} + \Lambda^A \wedge \phi_A \qquad (2.15)$$

Los vínculos del formalismo son entonces Φ_A y Ψ_A, pero este último conjunto no aparece en el Hamiltoniano total.

Es posible comprobar que el Hamiltoniano (2.15) es el correcto para la teoría, es decir es una cantidad dinámica de primera clase fuertemente conservada, o sea:

$$dH_T = (H_T, H_T) = 0 \qquad (2.16)$$

Además computando explícitamente los corchetes entre los vínculos, es posible mostrar que ninguno de los vínculos es de primera clase y esto constituye otra de las características del FCC.

REFERENCIAS

1. A. D'Adda, J. E. Nelson and T. Regge. Ann. Phys. (NY) 165 (1985) 384; J. E. Nelson and T. Regge, Ann Phys. (NY) 166 (1986) 234.
2. A. Lerda. J. E. Nelson and T. Regge. Phys. Lett. 161B (1985) 294, 297.
3. A. Foussats and O. Zandron. Class Quantum Grav. 5 (1988) 605; Int. J. Modern Phys A (1989), en prensa.
4. A. Foussats and O. Zandron. Class. Quantum Grav. 5 (1988)1231.
5. A. Foussats and O. Zandron. Ann. Phys. (NY) 189 (1989) 174.
6. S. Cerotti, S. Ferrara, L. Girardello and M. Porrati. Phys. Lett B 164 (1985) 41; S. Cerotti, S. Ferrara, L. Girardello, A. Pasquinucci and M. Porrati, Phys. Rev. D33 (1986) 2504.
7. S. Ferrara, P. Fre and M. Porrati. Ann Phys. (NY) 175 (1987) 112.
8. A. Lerda, J. E. Nelson and T. Regge. Int. J. Modern Phys. A2 (1987) 1843.
9. A. Foussats and O. Zandron. Class. Quantum Grav. 6 (1989)1165.
   A. Foussats and O. Zandron. Int. J. Modern Phys. A (1989), en prensa.
10. A. Foussats and O. Zandron. Ann. Phys. (NY) 191 (1989), en prensa.
11. M. Green and J. H. Schwanz. Phys. Lett. B 149 (1984) 117; Rev. Lett. 54 (1984) 502;
    P. Candelas, G. Horowitz, A. Strominger and E. Witten. Nucl. Phys. B 258 (1985) 46.
12. L. Castellani, R. D'Auria and P. Fré, in "Supersymmetry and Supergravity 83" (B. Milewski Ed.) World Scientific 1983;
    L. Castellani, P. Fré, F. Giani, K. Pilch and P. van Nieuwenhuisen, Ann. Phys. (NY) 146 35 (1983).
13. P. Fré, "Comments On The 6-Index Photon In D = 11 Supergravity and The Gaugin of Free Differential Algebras, TH 3884 CERN (1984).
14. T. Regge, "The Group Manifold Approach to Unifield Gravity", lectures given at the Les Houches Summer School, Seccion XV, North-Holland, Amsterdam 1984.