UN MODELO MEJORADO PARA EL CRECIMIENTO DE RAICES DE CULTIVOS

J. C. Reginato
Departamento Química-Física, Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales, Universidad Nacional de Río Cuarto, Enlace rutas 8 y 36, km 603, 5800 Río Cuarto

D. A. Tarzia
PROMAR (CONICET- Universidad Nacional de Rosario) e Instituto de Matemática Beppo Levi, Facultad Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario, Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario

A. Cantero
Departamento Ecología Agraria, Facultad Agronomía y Veterinaria, Universidad Nacional de Río Cuarto, Enlace rutas 8 y 36, km 603, 5800 Rio Cuarto

Se estudia un modelo de crecimiento de raíces de cultivos a traves de un problema de frontera libre.
Se estudian diferencias en disponibilidad y transporte de nutriente entre la superficie de la raíz y la rizósfera (móvil) mediante un mecanismo de absorción activa tipo Michaelis-Menten a bajas concentraciones.
Las ecuaciones resultantes del modelo son resueltas utilizando el método cuasiestacionario y se obtiene una ecuación diferencial para la frontera libre (interfase raíz-suelo) así como una expresión para la concentración en la misma.
Se obtienen conclusiones sobre los parámetros del sistema y se dan ejemplos con valores experimentales típicos en función de los parámetros relevantes.

INTRODUCCION

Existen muchos métodos para el estudio de los mecanismos involucrados en la toma de nutrientes. Uno de los más promisorios es el uso de ecuaciones diferenciales para los flujos convectivo y difusivo sobre la raíz[1,2,3,4,5]. En general, estos métodos no calculan el crecimiento de la raíz sino que suponen raíces jovenes creciendo en forma exponencial[1,5], pero trabajos recientes han considerado el problema de frontera libre para el crecimiento de raíces[6].

En este trabajo se propone un modelo mejorado para el crecimiento de raíces con rizósfera móvil en el cual calculamos la frontera libre (interfase raíz-suelo) desconocida a priori y la concentración en la misma a través del método cuasi-estacionario[7,8,9].

ANALISIS

Antes de presentar la ecuación diferencial referida al flujo de nutrientes hacia la raíz, se hacen las siguientes suposiciones:

— El medio poroso (suelo) es homogéneo e isotrópico,
— Las condiciones de humedad son mantenidas en estado estacionario,
— La toma de nutrientes se realiza en la superficie de la zona de absorción de la raíz y la presencia de pelos no afecta a la misma,
— La velocidad de toma de nutrientes es descripta por una absorción activa dada por una cinética tipo Michaelis-Menten,
— El transporte de nutriente ocurre vía convección y difusión en la dirección radial (la difusión tiene lugar únicamente en solución suelo),
— El influjo a concentraciones infinitas (J_m) y la constante de Michaelis (K_m) son independientes de la velocidad del flujo de solución suelo sobre la superficie de la raíz (V_0) y el coeficiente de difusión (D) es independiente del flujo.
— D y el "buffer power" b ($b = dC / dC_l$, donde C es la concentración total de iones difusibles y C_l es la concentración de iones en solución) son independientes de la concentración,
— El sistema de parámetros de la raíz no es cambiado por la edad de la misma, ($k = J_m / K_m$ = poder absorbente de la raíz = constante).
— La velocidad del agua no es afectada por la concentración de nutriente,
— Producción o deplexión de nutrientes por microorganismos u otras actividades son consideradas nulas,
— Todos los coeficientes D, b, k son independientes de la temperatura (en el rango de temperaturas

normalmente encontrado en crecimiento de raíces),

—Todo el nutriente incorporado a la raíz es asimilado para el crecimiento.

Con estas suposiciones, la ecuación diferencial para transporte de nutriente hacia la raíz (Cushman, 1982) es (en coordenadas cilíndricas):

$$D C_{rr} + \left[D + \frac{v_o s_o}{b}\right]\frac{C_r}{r} = C_t \tag{1}$$

donde :

$$C_r = \frac{\partial C}{\partial r}, \qquad C_{rr} = \frac{\partial^2 C}{\partial r^2}, \qquad C_t = \frac{\partial C}{\partial t}, \qquad C = C_1$$

es la concentración de iones en solución y s_o es el radio inicial.

Usando un método análogo al utilizado para el crecimiento de raíces con rizósfera fija[6] y en el cual se ha aproximado la cinética de Michaelis-Menten supuestas bajas concentraciones ($J_m \sim kC$) se plantea el siguiente problema de frontera libre[10] para el crecimiento de la raíz:

I) $D\, C_{rr} + D\, \alpha_o\, C_r/r = C_t\ , \qquad s(t) < r < R,\ 0 < t \leq T$

II) $C(r, 0) = \Phi(r)\ , \qquad s_o \leq r \leq R$

II) $C[s(t) + R, t] = C_\infty > 0\ , \qquad 0 < t \leq T$

IV) $DbC_r[s(t), t] + v_o\, C[s(t), t] =$

$= kC[s(t), t] - E = aC[s(t), t]\, ds(t)/dt$

V) $s(0) = s_o\ , \qquad 0 < s_o < R \qquad (2)$

donde:

$$\alpha_o = 1 + \frac{v_o s_o}{Db} = 1 + \varepsilon > 0,$$

R es el radio de la rizósfera, I) es la ecuación de Cushman, II) es el perfil de concentración inicial desde s_o hasta el borde inicial de la rizósfera R, III) es la concentración considerada constante sobre el borde variable de la rizósfera $s(t) + R$, IV) representa el balance de masa sobre la interfase raíz-suelo, V) es la condición inicial para la frontera libre $s(t)$ (radio raíz al tiempo t), a es el coeficiente estequiométrico y E es una tasa de flujo constante.

Un método para resolver (2), es decir, calcular la concentración $C = C[s(t), t]$, la frontera libre $s(t)$ y el tiempo T para el cual existe solución, es el método cuasiestacionario[7, 8, 9], el cual supone que la concentración del suelo es aquella correspondiente al caso estacionario en el intervalo $[s(t), s(t) + R]$. Luego, el problema se reduce a resolver la ecuación:

$$C_{rr} + \alpha_o \frac{C_r}{r} = 0 \tag{3}$$

con las condiciones (2II-III-IV-V), las cuales constituyen el **método cuasiestacionario a bajas concentraciones** llamado (QSMLC).

Las dos condiciones (2-IV) sobre la interfase pueden ser escritas:

$$C_r[s(t),t] = \frac{(k-v_o)\,C[s(t),t] - E}{Db} = g(C[s(t),t]), \tag{4}$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = \frac{1}{a}\left[k - \frac{E}{C[s(t),t]}\right] = f(C[s(t),t]) \tag{5}$$

donde las funciones f y g satisfacen las siguientes propiedades:

$$f(C) > 0 \Leftrightarrow C > C_p = E/K \tag{6}$$

$$g(C) > 0 \Leftrightarrow C > C_m = \frac{E}{(k-v_o)}\ (> C_p) \tag{7}$$

La solución del problema (QSMLC) está dada por:

$$C(r,t) = \beta(t) - \frac{\alpha(t)}{r^\varepsilon} \tag{8}$$

con

$$\alpha(t) = \frac{[(k-v_o)C_\infty - E]}{Db}\ \frac{1}{\frac{\varepsilon}{s^{\varepsilon+1}(t)} + \frac{(k-v_o)}{Db}\left[\frac{1}{s^\varepsilon(t)} - \frac{1}{(s(t)+R)^\varepsilon}\right]},$$

$$\beta(t) = C_\infty + \frac{\alpha(t)}{[s(t+R)]^\varepsilon}$$

$$\phi(r) = C_\infty + \frac{[(k-v_o)C_\infty - E]}{Db}\ \frac{\left[\frac{1}{(s_o+R)^\varepsilon} - \frac{1}{r^\varepsilon}\right]}{\frac{\varepsilon}{s_o^{\varepsilon+1}} + \frac{(k-v_o)}{Db}\left[\frac{1}{s_o^\varepsilon} - \frac{1}{(s_o+R)^\varepsilon}\right]}$$

De (8) se obtiene:

$$C(s(t),t) = \frac{C_\infty}{H(s)} \tag{9}$$

donde $s = s(t)$ es la única solución del siguiente problema de Cauchy:

$$\frac{ds(t)}{dt} = \frac{k}{a}\left[1 - \alpha_3 H(s(t))\right], \qquad s(0) = s_o \tag{10}$$

donde

$$H(s)=\frac{[1+\alpha_2 G(s)]}{[1+\alpha_1 G(s)]}$$

con

$$G(s)=s\left[1-\left(\frac{s}{s+R}\right)^{\varepsilon}\right]$$

$$\alpha_1=\frac{E}{v_o s_o C_\infty}>0,\quad \alpha_2=\frac{(k\text{-}v_o)}{v_o s_o}>0,\quad \alpha_3=\frac{E}{kC_\infty}=\frac{C_p}{C_\infty}>0$$

La solución del problema de Cauchy es calculada numéricamente por el método de Runge-Kutta y los gráficos siguientes (fig. 1 y 2) representan algunos resultados para C (s (t),t) y s (t) en función del parámetro adimensional k/V_o.

Definiendo $\gamma=\alpha_1/\alpha_2=E/(k-V_o)\,C_\infty$, [ver ecuación (9) y (10)], se demuestra que si $\gamma<1$ entonces C [s (t),t] es creciente puesto que k es bajo, por lo que la raíz no puede absorber todo el nutriente que llega y se produce contradifusión.

CONCLUSIONES

De los resultados obtenidos para el modelo precedente se concluye:
- s (t) aumenta cuando los parámetros k o C_∞ aumentan,
- s (t) aumenta cuando el parámetro E disminuye,
- s (t) aumenta cuando el parámetro adimensional (k/V_o) aumenta y k y v_o tienen gran magnitud,
- s (t) no varía en función de los parámetros V_o, b y D ya que no se encontraron variaciones en un amplio rango de ordenes de magnitud (1 en 10^5).
- El comportamiento del presente modelo es análogo al de rizósfera fija[6] y algunos resultados teóricos precedentes han sido observados desde un punto de vista experimental [11, 12].

El modelo presentado sólo provee una aproximación cualitativa al crecimiento de raíces bajo la incorporación de un único nutriente, con las limitaciones naturales en el caso real de más de un nutriente y sus interacciones.

Además, el presente modelo sólo tiene en cuenta el balance de masa en la incorporación de nutriente dejando de lado el balance de energía implícito en el proceso metabólico. No obstante, estas conclusiones son útiles para calibrar problemas de transporte y crecimiento más complejos o para aislar los efectos de los distintos parámetros, así como para el diseño de experiencias en el campo de la tecnología agrícola.

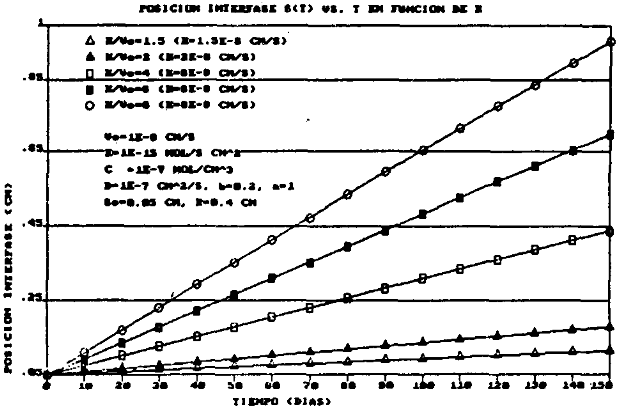

Figura 1: Radio raíz en función del tiempo.

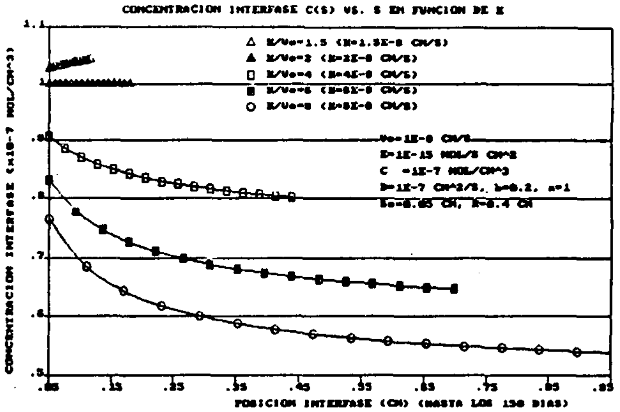

Figura 2: Concentración en la interfase raíz-suelo en función del radio de la raíz.

REFERENCIAS

1. J. H. Cushman,. Soil Science Society of America Journal, Vol. 46, n.4 (1982), 704-709.
2. Barlow P. W. "The root" in J. G. Torrey and D. T. Clarkson "The development and function of roots". Academic Press, London (1975), cap. 21.
3. Claasen N., S. A. Barber. Agron. J. 68 (1976), 961-964.

4. Nye P. H., F. C. Marriot.. Plant Soil 33 (1969), 359-472.
5. J. H. Cushman. Soil Science, Vol. 129, n. 2(1980)
6. J. C. Reginato, D. A. Tarzia, A. Cantero, Soil Science, (1988), (en prensa).
7. Crank J., "Free and moving boundary problems", Clarendon Press, Oxford (1984).
8. J. Stefan, Zitsungberichte de Kaiserelichen Akademic Wissenschaften. Mathematisch-Naturwissenschaftliche classe, 98 (1889), 473-484.
9. D. A. Tarzia, Cuadernos, Inst. Mat. "Beppo Levi", Rosario, 12 (1984), 5-36.
10. D. A. Tarzia, Progetto Nazionale M. P. I. "Equazioni di evoluzione e applicazioni fisicomatematiche", Firenze (1988) with 2528 references.
11. Wray, Ph. Thesis (1971), citado por P. A. Nye, P. B. Tinker, "Solute movement in the soil root system", Blackwell Scientific Publications, Oxford (1977)
12. K. P. Barley, Adv. Agronomy, 22 (1970), 159-201.