

LA CONDUCTIVIDAD ELECTRICA DE UN GAS DE LORENTZ PARA CAMPO ELECTRICO VARIABLE EN EL TIEMPO Y EN EL ESPACIO

A. Louro

Departamento de Física, Facultad Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Pabellón 1, Ciudad Universitaria, 1428 Buenos Aires

La respuesta del gas de electrones en la ionósfera a perturbaciones eléctricas es de interés para aplicaciones como la interpretación de mediciones de variables ionosféricas mediante radar, o el estudio de inestabilidades. La conductividad eléctrica puede calcularse a partir del primer momento de la ecuación de Boltzmann, para lo cual es usual modelar el término de colisiones con una aproximación de tiempo de relajación. Esta aproximación puede no ser válida para colisiones entre electrones y moléculas neutras, pues la gran diferencia de masas implica tiempos de relajación notoriamente distintos para distintos momentos. En este trabajo se introduce otro modelo sencillo del término de colisiones de Boltzmann, que supone un tiempo de relajación infinito para la energía.

INTRODUCCION

En el estudio de algunos fenómenos ionosféricos —la dispersión incoherente de ondas de radio^{1,3} o inestabilidades de plasma en el electrochorro ecuatorial⁴— interesa conocer la respuesta de las especies ionosféricas a un campo eléctrico variable espacial y temporalmente. Dougherty calculó las conductividades iónica y electrónica en un gas debilmente ionizado⁵ a partir de los momentos de orden 0 y 1 de la ecuación de Boltzmann para cada especie. Como el uso del término de colisiones de Boltzmann exacto presenta grandes dificultades matemáticas, se recurre a un modelo aproximado, de la forma

$$(\partial f / \partial t)_{col} = -\nu (f_1 - f_{eq}) \quad (1)$$

representando la relajación de una función de distribución perturbada f_1 a una de equilibrio f_{eq} , con un tiempo característico ν^{-1} , donde ν es una frecuencia de colisión. En un gas debilmente ionizado, en el caso de las especies cargadas prevalecen las colisiones con las moléculas neutras, y ν corresponderá a esas colisiones. El modelo sencillo (1) implica que todos los momentos de la función de distribución decaen a sus valores de equilibrio en el mismo tiempo, lo que es incorrecto en el caso de los electrones: dada la gran diferencia de masa con las moléculas neutras, el tiempo de relajación para el impulso es mucho menor que para la energía. La ecuación (1) sobreestima la tendencia de los electrones a termalizarse con la atmosfera neutra. Por eso, en este trabajo se calcula la conductividad eléctrica utilizando un modelo sencillo del término de

colisiones que supone que no hay intercambio de energía en las colisiones electrón-neutro, sino solo de impulso.

TEORIA

En la ecuación de Boltzmann

$$\partial f / \partial t + \vec{v} \cdot \partial f / \partial \vec{r} - (e\vec{E} / m) \cdot \partial f / \partial \vec{v} = (\partial f / \partial t)_{col} \quad (2)$$

(e y m son la masa y la carga electrónica respectivamente, y \vec{E} el campo eléctrico) aproximaremos

$$(\partial f / \partial t)_{col} \equiv -\nu (f - f_{max}), \quad f_{max} = (n / n_0) f_0, \\ f_0 = n_0 e^{-\nu^2 / \alpha^2} (n^{3/2} \alpha^3), \quad \alpha^2 = 2kT / m$$

donde k es la constante de Boltzmann, n es la densidad numérica de electrones perturbada, n_0 es la densidad de equilibrio y T es la temperatura electrónica. Si se supone que como único resultado de las colisiones los electrones adquieren una velocidad \vec{V}_e sin modificar la forma de la función de distribución, la función perturbada se puede escribir como:

$$f = (n / n_0) f_0 \exp\left\{ \frac{\nu^2}{\alpha^2} 2\vec{v} \cdot \vec{V}_e \right\} / \alpha^2 \quad (3)$$

Suponiendo que \vec{V}_e es mucho menor que la velocidad térmica α , el término de colisiones se puede escribir como:

$$(\nu / \alpha^2) (\nu^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{V}_e) (n / n_0) f_0 \quad (4)$$

Para un campo eléctrico $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp [i (\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$ y cantidades perturbadas $n = n_0 + n_1 \exp [i (\omega t -$

$\vec{k} \cdot \vec{r}$) y $V_e = V \exp [i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$, la ecuación de Boltzmann linealizada es:

$$i(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})(1 - n/n_0) - (2i/\alpha^2)(\vec{v} \cdot \vec{v}) \cdot (\vec{v} \cdot \vec{k} \vec{v} - \omega \vec{v}) + (2e/\alpha^2)(E_0/m) \cdot (\vec{v} \cdot \vec{v}) = -n(V^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{v})/\alpha^2 \quad (5)$$

y sus momentos son (reteniendo sólo términos de primer orden en las cantidades perturbadas):

$$\text{orden 0: } \omega(1 - n/n_0) + (2\kappa T/m\alpha^2) \vec{k} \cdot \vec{v} = 0 \quad (6)$$

orden 1:

$$i(1 - n/n_0) \vec{k} + (2/\alpha^2) [i(\omega + \nu) \vec{v} + e \vec{E}_0/m] = 0 \quad (7)$$

Eligiendo el sistema de coordenadas de manera que $\vec{k} = (0, 0, k)$, y definiendo el tensor de la conductividad Y :

$$n_0 e \vec{V}_e = Y \cdot \vec{E} \quad (8)$$

de (6) y (7) resulta que Y es diagonal, con

$$Y_{xx} = Y_{yy} = (n_0 e^2/m)(i\omega + \nu)^{-1}$$

$$Y_{zz} = (n_0 e^2/m)(i\omega + \nu - i\kappa T k^2/m\omega)^{-1}$$

RESULTADOS Y DISCUSION

Los componentes de Y transversales a la dirección de propagación tienen la forma conocida de la conductividad frente a un campo variable sólo en el tiempo, como cabía esperar ya que no se producen variaciones espaciales de densidad en esa dirección.

Resulta particularmente interesante la componente Y_{zz} . Si se define una conductividad adimensional

$$Y^* = Y/(n_0 e^2/m\Omega) \quad (10)$$

donde $\Omega = (1/k)(m/2\kappa T)^{1/2}$, y definiendo $\psi = \nu/\Omega$, $\theta = \omega/\Omega$, resulta:

$$Y_{zz}^* = [2\theta\psi - (1 - 2\theta^2)]^{-1} \quad (11)$$

Para $\psi \rightarrow 0$, $\text{Re}(Y_{zz}^*) \rightarrow \delta(1/\sqrt{2})$ e $\text{Im}(Y_{zz}^*)$ diverge para $\theta = 1/\sqrt{2}$. El modelo expuesto aquí no es válido para $\psi = 0$, pues dejaría de ser correcto despreciar las colisiones entre electrones: debe ser $\psi \gg \nu_{ee}/\Omega \cong 10^{-3}$ para condiciones típicas de la región E. No obstante, es apreciable la resonancia a $\theta \cong 1/\sqrt{2}$ para frecuencias de colisión bajas, como se

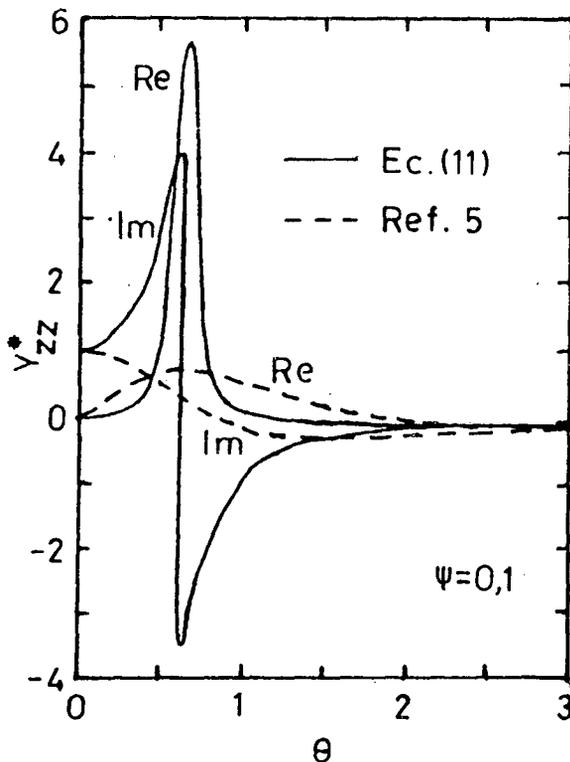


Figura 1: Comparación entre Y_{zz}^* calculado con los valores dados por la teoría de Dougherty para $\psi = 0.1$

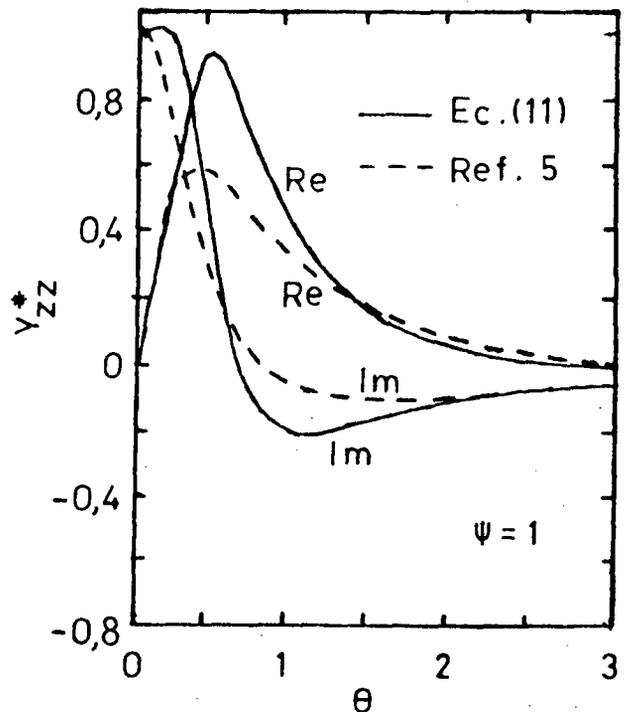


Figura 2: Comparación entre Y_{zz}^* calculado, con los valores dados por la teoría de Dougherty para $\psi = 1$

puede apreciar en la Figura 1, donde se compara Y_{zz}^* calculado aquí con los valores que surgen de la teoría de Dougherty⁵.

La resonancia para este valor de θ se debe a que esa frecuencia corresponde a una velocidad de fase de la onda igual a la velocidad media de los electrones en la dirección de propagación. Para frecuencias más altas, el efecto disminuye y ambas conductividades se aproximan: ver el resultado para $\psi = 1$ en la Figura 2.

REFERENCIAS

1. Dougherty, J. P., y D. T. Farley. Proc. Roy. Soc. London, A, **259**, 79, 1960.
2. Farley, D. T., J. P. Dougherty, y D. W. Barron, Proc. Roy. Soc. London, A, **263**, 238, 1961.
3. Dougherty, J. P. y D. T. Farley, J. Geophys. Res., **68**, 5473, 1963.
4. Farley, D. T., Phys. Rev. Lett., **10**, 279., 1963.
5. Dougherty, J. P., J. Fluid. Mech. **16**, 126, 1963.