

VERIFICACION EXPERIMENTAL DE UNA SOLUCION AUTOSIMILAR DE SEGUNDA ESPECIE: FLUJO DE LUBRICACION CONVERGENTE

J. A. Diez*, R. Gratton**

Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Pinto 399, 7000 Tandil.

J. Gratton ***

Prof. Tit. "ad honorem" de la FCE-UNCPBA. Dirección permanente: LFP, FCEN-UBA,
Ciudad Univ. Pab. I, 1428 Bs. As.

Se realizaron experimentos con fluidos muy viscosos (aceites siliconados) con el objeto de verificar una solución autosimilar de segunda especie obtenida teóricamente. Se consideró el flujo plano convergente que se genera al llenarse radialmente una región inicialmente libre de aceite. Los parámetros de los experimentos se escogieron de forma tal que el flujo se desarrolla dentro de la validez de la aproximación de lubricación. Se midieron la posición del frente en función del tiempo y la forma del perfil de altura del fluido. Se encontró que el flujo convergente sigue la solución de segunda especie sólo en una región espacial limitada.

Las soluciones autosimilares de segunda especie aparecen en muchos problemas de la física-matemática. Son ejemplo de ello: la onda de choque convergente¹, el movimiento de un gas bajo la acción de una carga impulsiva², el colapso de una cavidad en el seno de un gas^{3,4}, el problema modificado de la conducción del calor⁵, etc. No obstante, la aparición de los correspondientes regímenes en sistemas reales sólo ha sido verificada numéricamente, mientras que la observación experimental se ha limitado a algunas consecuencias indirectas. En este trabajo, nos proponemos corroborar experimentalmente la existencia de una solución autosimilar de segunda especie^{6,7}, que aparece en flujos de lubricación convergentes realizables con modestos medios técnicos.

Dentro de la aproximación de lubricación^{8,9}, y en simetría axial, las ecuaciones de conservación de la masa y el momento se reduce a:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r H^3 \frac{\partial H}{\partial r} \right] \quad (1)$$

siendo $H = (g/3\nu)^{1/3} h$, $h(r, t)$ la altura del fluido, g la gravedad, ν la viscosidad cinemática, r la coordenada radial y t el tiempo.

El flujo en estudio es el dado idealmente por un estanque infinito, que contiene una capa de un

líquido muy viscoso excepto en una región vacía, limitada externamente por una pared circular. La pared es quitada repentinamente dejando que el líquido fluya hacia el centro. El fluido tendrá un frente convergente, cuyo radio disminuye a medida que el líquido se desparrama, y finalmente colapsa. Si la altura del fluido es mucho menor que su radio, y el radio r_f del frente es mucho menor que el radio R_0 del dique, la ec. (1) tiene la solución autosimilar de segunda especie antes mencionada, según la cual $r_f \propto (-t)^{5/6}$, donde $t=0$ corresponde a $r_f=0$. Para los experimentos se utilizaron aceites siliconados comerciales; la pileta ($R_c = 20$ cm) y el dique ($R_0 = 5$ cm) se muestran en la Fig.1.

Debido a la convergencia del flujo, las condiciones iniciales del experimento deben escogerse de forma tal que, mientras dure el colapso, el flujo entre en el régimen autosimilar asintótico. Por lo tanto, debemos considerar el flujo en zonas donde $r \ll R_0$. Sin embargo, como el volumen de aceite en la región anular $R_0 \leq r \leq R_c$ es finito, la altura h_c del fluido en contacto con la pared externa no permanece constante en su valor inicial h_0 , sino que disminuye hasta

$$h_f = h_0 \left(1 - R_0^2/R_c^2 \right)$$

Para que la pared externa no influya sobre el flujo, h_c debe ser aproximadamente constante, lo cual ocurrirá para $r_f \ll R_c$. Por lo tanto, trabajar con valores grandes de R_0 no amplía el rango de validez de la solución, el cual de ningún modo se extenderá para r mayores que una cierta fracción de R_c (indicativamente, $0.1 R_c$).

* Becario del CONICET.

** Investigador del CONICET.

*** Investigador del CONICET

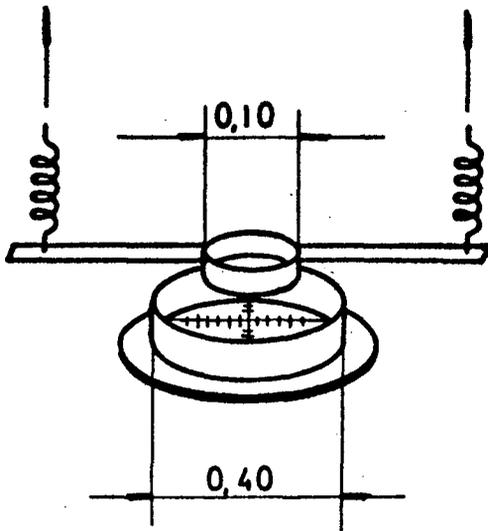


Figura 1: Esquema de la cubeta empleada para realizar los experimentos.

Asimismo, la altura inicial h_0 debe escogerse de forma tal que el flujo se desarrolle dentro del rango de validez de la aproximación de lubricación. Nótese que por la ecuación de continuidad, la componente v_2 de la velocidad en la dirección vertical es $v_2 \approx (h/R)U$, donde h , R y U son valores medios de la altura, la extensión radial y la velocidad del fluido. Claramente, la hipótesis que requiere $v_2 \ll U$ dejará de ser válida muy cerca del centro.

Los ordenes de magnitud de las fuerzas de gravedad, inerciales y viscosas, que intervienen en el flujo son, respectivamente, $F_g \approx \rho g h^2 R$, $F_i \approx \rho U^2 h R$, $F_v \approx \mu R^2 U / h$; luego, el número de Reynolds es: $R_e = F_i / F_v = (Uh / \nu) (h / R)$. En la aproximación de lubricación es $F_g \approx F_v$ y debe ser $R_e \ll 1$. Por lo tanto, $U \approx gh^{-3} / \nu R$, $R_e = Gh^{-5} / (\nu R)^2$ y la condición $R_e \ll 1$ implica que $h \ll (\nu^2 R^2 / g)^{1/5}$; en nuestro caso, para $\nu = 5 \text{ cm}^2 / \text{seg}$, $R_0 = 5 \text{ cm}$, debe ser $h \ll 0.9 \text{ cm}$.

En resumen, la solución autosimilar buscada

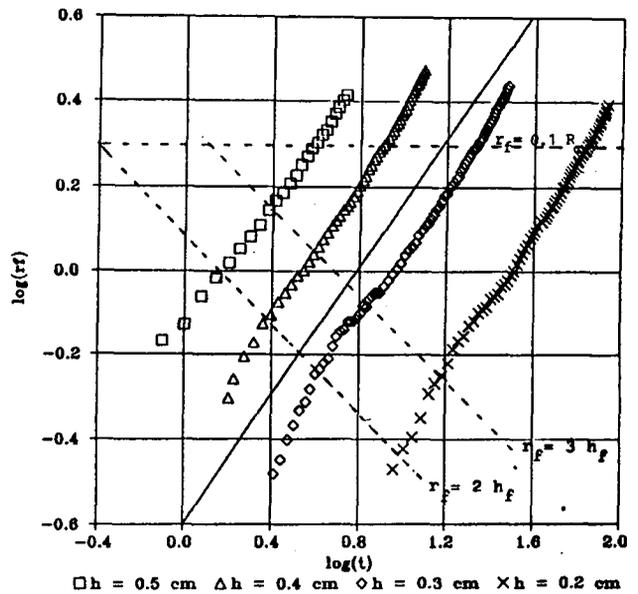


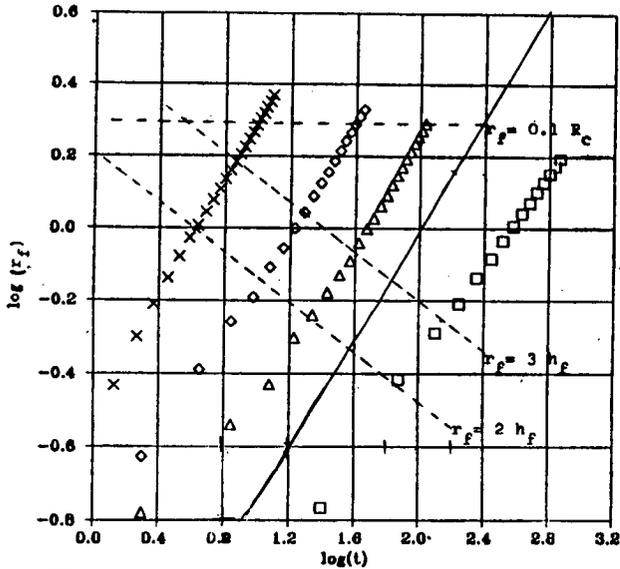
Figura 2: Mediciones obtenidas por video-grabación de la posición del frente en función del tiempo. La recta de pendiente $\delta = 0.762$ sirve de comparación.

debe ser válida en una zona tal que r_f sea lo suficientemente pequeño como para que h_e se mantenga prácticamente constante, pero no tan pequeño como para que R_e se acerque a la unidad o para que v_2 se haga comparable a U . Obviamente, establecer un rango de validez conlleva cierto grado de arbitrariedad. Dos intervalos razonables son: $2h_f \leq r_f \leq 0.1 R_e$ y $3h_f \leq r_f \leq 0.1 R_e$.

Las mediciones se realizaron a partir de video-grabaciones tomando la posición del frente sobre cada uno de los cuatro ejes coordenados (con $0.1 \text{ s} \leq \Delta t \leq 1 \text{ s}$, según el caso). De esta manera, es posible calcular los centros y los radios de cuatro circunferencias, una por cada terna de puntos. Luego, promediando se determina la circunferencia que mejor aproxima la posición del frente (no exactamente circular) de la corriente. Los resultados se

h_0 (cm.)	$2h_f \leq r_f \leq 0.1 R_e$		$3h_f \leq r_f \leq 0.1 R_e$	
	$\delta \pm \Delta\delta$	Cant. Ptos.	$\delta \pm \Delta\delta$	Cant. Ptos.
0.5	0.710 ± 0.007	14	0.742 ± 0.017	8
0.4	0.785 ± 0.005	31	0.816 ± 0.008	22
0.3	0.734 ± 0.006	56	0.778 ± 0.007	40
0.2	0.883 ± 0.006	61	0.819 ± 0.006	57

Tabla I: Mediciones con video-grabaciones (Fig. 2)



$\square h_o = 0.2$ cm $\Delta h_o = 0.3$ cm $\diamond h_o = 0.4$ cm $\times h_o = 0.5$ cm
Figura 3: Mediciones obtenidas por recolección de luz de la posición del frente en función del tiempo. La recta pendiente $d = 0.762$ sirve de comparación.

muestran en la Fig. 2.

En la Tabla I se muestran los valores de δ conseguidos con el criterio anterior.

El valor medio δ y su desviación standard σ_n para cada elección de intervalo son,

$$\delta = 0.76 \pm 0.05 \text{ y } \delta = 0.78 \pm 0.03$$

de modo que $\bar{\delta} \approx 1.005 \delta$ y $\bar{\delta} \approx 1.035 \delta$

Para aceites opacos se usó una técnica alternativa basada en medir el área $S(t)$ libre de aceite de la región central de la cubeta; esta área, se se toman los recaudos adecuados de uniformidad de iluminación (desde abajo), es proporcional a la señal dada por un fotodiodo que detecta la luz que la atraviesa. De esta manera, el radio de la circunferencia que mejor aproxima la forma del frente es $r_f \propto S(t)^{1/2}$. Las mediciones obtenidas con esta técnica se representan en la Fig. 3. Un análisis de es-

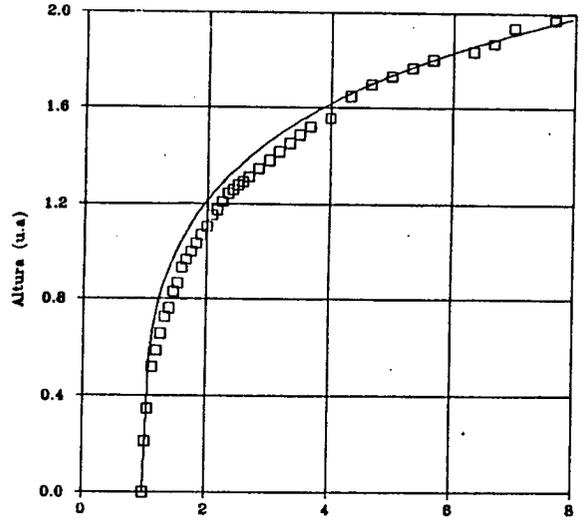


Figura 4: Perfil de altura del flujo.

tas curvas, análogo al hecho con las mediciones de video, se muestra en la Tabla II.

De los valores de esta Tabla se obtiene:

$$\delta = 0.741 \pm 0.066 \text{ y } \delta = 0.758 \pm 0.08$$

de modo que $\bar{\delta} \approx 0.972 \delta$ y $\bar{\delta} \approx 0.995 \delta$

Para medir el perfil de altura del aceite se proyectó verticalmente una línea luminosa sobre uno de los diámetros de la cubeta y se la observó lateralmente. Las mediciones se muestran en la Fig. 4 conjuntamente con la curva teórica.

En conclusión, el estudio experimental de un flujo de lubricación convergente axisimétrico ha mostrado que la solución autosimilar de segunda especie obtenida en un trabajo anterior⁶⁻⁷, se manifiesta en una región acotada del espacio. Este hecho no es de por sí sorprendente pues la existencia de dicha solución requiere condiciones que sólo pueden

h_o (cm.)	$2h_i \leq r_i \leq 0.1 R_c$		$3h_i \leq r_i \leq 0.1 R_c$	
	$\delta \pm \Delta\delta$	Cant. Ptos.	$\delta \pm \Delta\delta$	Cant. Ptos.
0.5	0.781 ± 0.003	13	0.806 ± 0.009	7
0.4	0.776 ± 0.004	15	0.790 ± 0.002	12
0.3	0.783 ± 0.086	18	0.822 ± 0.006	14
0.2	0.626 ± 0.006	13	0.615 ± 0.002	12

Tabla II: Mediciones por recolección (Fig. 3)

cumplirse en forma aproximada: estanque infinito, radio del frente mucho menor que radio del dique, etc. Los experimentos muestran el grado de aproximación con que deben cumplirse.

REFERENCIAS

1. G. Gudereley, Luftfahrtforschung 19, 302-312 (1942).
2. Ya B. Zel'dovich and Yu. P. Raizer, "Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena", Academic Press (1967), Cap. XII.
3. R. B. Lazarus, SIAM J. Numer. Anal. 18, 316 (1981).
4. L. P. Thomas; V. Pais, R. Gratton and J. Diez, Phys. Fluids 29, 676 (1986).
5. G. I. Barenblatt, "Similarity, Self-Similarity and Intermediate Asymptotics", Consultants Bureau (1979).
6. J. Diez, J. Gratton y F. Minotti, Automisililaridad de Segunda Especie: Difusión hacia un Centro de Simetría, Informe Interno PROFET 01/89 (1989).
7. J. Diez, J. Gratton and F. Minotti, Self-Similar Solutions of the Second Kind of Nonlinear Diffusion-Type Equations, ICTP Int. Rep. IC/89/71 (1989).
8. J. Buckmaster, J. Fluid Mech. 81. 735-756 (1977).
9. H. E. Huppert, J. Fluid Mech. 121, 43-58 (1982).