EL LIMITE GALILEANO DEL ELECTROMAGNETISMO

V.H.Hamity* O.A.Reula*
Facultad de Matemáticas, Astronomía y Física,
Universidad Nacional de Córdoba,
Córdoba 5000, Laprida 854.

Una teoría consistente no relativista del electromagnetismo se puede obtener imponiendo los requisitos de invariancia Galileana y de escala a partir de las ecuaciones de Maxwell más las relaciones constitutivas. Se muestra que existen dos límites, relacionados fundamentalmente con efectos eléctricos y magnéticos, según sean las hipótesis que se hagan respecto de cuál es la forma tensorial del campo electromagnético no singular en el límite Galileano de la relatividad especial. El procedimiento empleado en la obtención de los límites es útil, además, para introducir un parámetro de pequeñez en las ecuaciones de Maxwell y determinar, mediante métodos matemáticos rigurosos conocidos, la solución relativista para la cual la solución del sistema Galileano pueda considerarse una buena aproximación.

LAS ECUACIONES DE MAXWELL EN EL ESPACIO-TIEMPO GALILEANO

Es conocido [1] que las ecuaciones de Maxwell, sin relaciones constitutivas (rc),

$$\begin{aligned} div\,\boldsymbol{D} &= 4\pi\sigma \quad ; \quad rot\,\boldsymbol{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\,\boldsymbol{j} \\ div\,\boldsymbol{B} &= 0 \quad ; \quad rot\,\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

para los campos $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{H}$ con fuentes σ y $\boldsymbol{j}$, se pueden escribir en el espacio-tiempo Galileano (ETG), al igual que en el espacio-tiempo Minkowskiano (ETM), en la forma:

$$F^{ab}{}_{,b} = \frac{4\pi}{c}\,j^{\,a} \quad ; \quad \varphi_{[ab,c]} = 0 \qquad (2)$$

donde $j^a = (\boldsymbol{j}/c, \sigma)$; c es una constante con dimensiones de velocidad; la (,) significa derivada parcial; el índice a = 1,2,3,4 recorre las tres variables espaciales $\boldsymbol{x}$ y $x^4 = ct$; la matriz F^{ab} contiene los campos $\boldsymbol{H}$ y $\boldsymbol{D}$ de la manera usual y similarmente φ_{ab} a los campos $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{E}$. Si suponemos que F y φ son tensores antisimétricos en el ETG, cuyas componentes cartesianas son F^{ab} y φ_{ab}, y postulamos la invariancia de las ecuaciones (2) ante las transformaciones de Galileo,

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x}' &= C\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}t + \boldsymbol{d} \\ t' &= t + d^4 \end{aligned}\right\} \qquad x'^a = A^a{}_b x^b + d^a \qquad (3)$$

(C es una matriz numérica; $\boldsymbol{u}$ y d^a son constantes), obtenemos como transformaciones no relativistas, para los campos y el cuadrivector corriente j^a las siguientes:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}' &= \boldsymbol{D} \quad ; \quad \boldsymbol{H}' = \boldsymbol{H} + \frac{\boldsymbol{u}}{c} \times \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{E}' &= \boldsymbol{E} - \frac{\boldsymbol{u}}{c} \times \boldsymbol{B} \quad ; \quad \boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{j}' &= \boldsymbol{j} + \boldsymbol{u}\sigma \quad ; \quad \sigma' = \sigma \end{aligned} \qquad (4)$$

$$\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{F} \equiv e(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{u}}{c} \times \boldsymbol{B}) \qquad (5)$$

Hemos incluído la fuerza de Lorentz por completitud, la cual resulta invariante ante las transformaciones de Galileo si $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}$; $\boldsymbol{u}$ es la velocidad de la carga e. Como matriz C tomamos la identidad por simplicidad. Los operadores diferenciales deben transformarse de acuerdo a

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}'} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} - \boldsymbol{u}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}$$

Un hecho notable, común a todas las teorías de la física que admiten como grupo de simetría el grupo de Galileo, es que las ecuaciones de Maxwell son invariantes ante un cambio de escala de los campos (no único), válido en cualquier referencial inercial, originado por la transformación:

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} \quad ; \quad \bar{t} = \lambda t$$

con un correspondiente cambio en las velocidades $\bar{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}/\lambda$.

* Investigador CONICET

Por ejemplo:

$$\bar{\sigma} = \sigma \quad ; \quad \bar{H} = H/\lambda \quad ; \quad \bar{D} = D$$
$$\bar{j} = j/\lambda \quad ; \quad \bar{B} = \lambda B \quad ; \quad \bar{E} = E \quad ; \quad \bar{F} = F \tag{6}$$

El sistema (1) debe ser completado con relaciones constitutivas. Por ejemplo, el vacío se define por las relaciones

$$E = D \quad ; \quad B = H \tag{7}$$

Las ecuaciones de Maxwell, ahora completas al incluir (7), y la densidad de fuerza de Lorentz en el vacío resultan:

$$\begin{aligned} &div\, D = 4\pi\sigma \quad &;& \quad \text{rot}\, H - \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j \\ &\text{div}\, H = 0 \quad &;& \quad \text{rot}\, D + \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t} = 0 \\ &f = \sigma\, D + j \times H \equiv f_e + f_m \end{aligned} \tag{8}$$

Claramente las relaciones constitutivas (7), y por consiguiente las ecuaciones (8), no son invariantes ante las transformaciones (3). Las ecuaciones (8) resultan invariantes ante el grupo de Poincarè, para el que las transformaciones de los campos son distintas a (4). Queremos estudiar el límite no relativista de las ecuaciones (8), para el que valen las transformaciones (4) de los campos. De este último conjunto de relaciones, notamos que hay dos grupos de transformaciones según escribamos las ecuaciones en términos de D y H o E y B.

LIMITE NO RELATIVISTA ELECTRICO

Las ecuaciones (8) son equivalentes a las ecuaciones (2), también válidas en relatividad especial, y las relaciones constitutivas (7) expresadas en la forma invariante Lorentz

$$F^{ab} = \eta^{ac}\eta^{bd}\varphi_{cd}; \; \eta^{ab} = \text{diag}(1,1,1,-1) \tag{7'}$$

Es conocido [2] que el ETG puede considerarse como un límite singular del ETM. En este límite, la métrica η pierde su significado como métrica del espacio-tiempo. Sin entrar en detalles (ver ref. 2), esto se traduce en que la relación (7') es también una relación con límite singular, pudiendo permanecer bien definido F o φ. Para obtener uno de los límites no relativistas, supondremos que F está bien definido en ese límite y por consiguiente lo están los campos D y H. Mantenemos entonces las ecuaciones invariantes relativistas en la misma forma(8), con D y H, y realizamos un cambio de escala de dichos campos [sugerido por (6)] de acuerdo a :

$$D \to D \,;\, \sigma \to \sigma;\, x \to x;\, t \to t/\varepsilon$$
$$H \to \varepsilon H \,;\, j \to \varepsilon j \;;\; u \to \varepsilon u \;;\; \frac{\partial}{\partial t} \to \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}$$

para obtener las ecuaciones, ahora dependientes de $\varepsilon \equiv 1/\lambda$, en la forma

$$\begin{aligned} &div\, D = 4\pi\sigma \quad &;& \quad \text{rot}\, H - \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j \\ &\text{div}\, H = 0 \quad &;& \quad \text{rot}\, D + \frac{\varepsilon^2}{c}\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \\ &f = \sigma\, D + \frac{\varepsilon^2}{c}\, j \times H \end{aligned} \tag{9}$$

El sistema de ecuaciones (9) puede considerarse como una familia de ecuaciones parametrizadas con ε, la cual contiene las ecuaciones relativistas para $\varepsilon = 1$ y lo que llamaremos el límite eléctrico $\varepsilon = 0$. Este último límite es, por construcción, invariante de escala y, además, como se verifica fácilmente, invariante Galileano si para los campos D y H y las fuentes σ y j usamos las transformaciones no relativistas (4). La familia (9) "interpreta" el límite Galileano de las ecuaciones de Maxwell en el vacío, para situaciones en las que cargas eléctricas aisladas se mueven a bajas velocidades. Para construir una solución del sistema (9) con $\varepsilon = 0$ debemos resolver ecuaciones de tipo elíptico para D y H; por lo tanto no hay fenómenos de propagación ondulatoria. Como expresión para la densidad de fuerza debemos usar f_e.

LIMITE NO RELATIVISTA MAGNETICO

Suponemos ahora que el tensor que permanece bien definido en el límite ETM -> ETG es φ. Consecuentemente, tenemos que usar la forma covariante de la cuadridensidad de corriente j_a, para la cual la transformación de sus componentes ante el grupo de Galileo es [1]:

$$\begin{aligned} j' &= j \\ \sigma' &= \sigma + \frac{u}{c} \cdot j \end{aligned} \tag{10}$$

Escribimos las ecuaciones (2) y (7') en términos de E y B (es decir de φ). Luego

$$div\, \boldsymbol{E} = 4\pi\sigma \quad ; \quad \mathrm{rot}\, \boldsymbol{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j$$

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{B} = 0 \quad ; \quad \mathrm{rot}\, \boldsymbol{E} + \frac{\varepsilon^2}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \qquad (11)$$

$$f = \sigma \boldsymbol{E} + \frac{j}{c} \times \boldsymbol{B}$$

Realizamos ahora un cambio de escala de las coordenadas, los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ y las fuentes σ y j, válido en todo referencial inercial, de acuerdo a las ecuaciones de transformación (4) para los campos y (10) para las fuentes, en la forma:

$$\boldsymbol{E} \to \varepsilon \boldsymbol{E} \;;\; \sigma \to \varepsilon\sigma \;;\; \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x} \;;\; t \to t/\varepsilon$$

$$\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B} \;;\; j \to j \;;\; u \to \varepsilon u \;;\; \frac{\partial}{\partial t} \to \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}$$

para obtener la familia de ecuaciones, dependiente de ε:

$$div \boldsymbol{E} = 4\pi\sigma \quad ; \quad rot\, \boldsymbol{B} - \frac{\varepsilon^2}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j$$

$$div \boldsymbol{B} = 0 \quad ; \quad rot\, \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \qquad (12)$$

$$f = \varepsilon^2 \sigma \boldsymbol{E} + \frac{j}{c} \times \boldsymbol{B}$$

Nuevamente, para $\varepsilon = 1$, tenemos las ecuaciones relativistas y para $\varepsilon = 0$ lo que llamaremos el límite magnético. El límite magnético es invariante de escala y Galileano. Como expresión para f debemos usar f_m. La familia (12) "interpreta" el límite Galileano de las ecuaciones de Maxwell en el vacío, para situaciones en las cuales tenemos circuitos neutros en reposo relativo entre sí o moviéndose a bajas velocidades (motores eléctricos). De la misma manera que en el límite eléctrico, no tenemos fenómenos de propagación ondulatoria.

CAMPO E.M. ACOPLADO CON UN FLUIDO IDEAL AUTOGRAVITANTE CARGADO NO RELATIVISTA.

Para definir la libertad en el cambio de escala de los campos debemos considerar el campo e.m. interactuando con otro sistema, por ejemplo un fluido ideal cargado autogravitante. Las ecuaciones que definen la dinámica del fluido son

$$\frac{\partial}{\partial t}(p v^i) + (p v^i v^j + p\delta^{ij})_{,j} = f^i \; ; \; i = 1, 2, 3.$$

donde ahora $\bar{f} = \bar{f}_e + \bar{f}_m + \bar{f}_g$; $\bar{f}_g = -p\, grad\, \phi$; ϕ es el potencial Newtoniano el cual satisface la ecuación $\nabla^2\phi = 4\pi G p$; p es la densidad de masa y se cumple la ecuación de continuidad para la misma. La presión p está relacionada con p por medio de una ecuación de estado. Vemos que estas ecuaciones son invariantes ante un cambio de escala

$$\bar{x} = x \;;\; \bar{t} = t/\varepsilon \;;\; \bar{v} = \varepsilon v \;;\; \bar{p} = \varepsilon^4 p$$

$$\bar{p} = \varepsilon^2 p \;;\; \bar{\phi} = \varepsilon^2 \phi \;;\; \bar{f} = \varepsilon^4 f$$

Luego debe ser $\bar{f}_e + \bar{f}_m = \varepsilon^4 (f_e + f_m)$. En el límite eléctrico tenemos

$$\bar{f}_m = \varepsilon^4 f_e \quad ; \quad \bar{f}_m = \varepsilon^6 f_m$$

Luego podemos tomar $\sigma \boldsymbol{D} = \varepsilon^4 \sigma \boldsymbol{D}$ y por consiguiente, obtener los cambios de escala $\bar{\sigma} = \varepsilon^2 \sigma$, $\bar{\boldsymbol{D}} = \varepsilon^2 \boldsymbol{D}$, $\bar{\boldsymbol{H}} = \varepsilon^3 \bar{\boldsymbol{H}}$ y $j = \varepsilon^3 j$. Similarmente, en el límite magnético debemos tener

$$\bar{f}_e = \varepsilon^6 f_e \quad ; \quad \bar{f}_m = \varepsilon^4 f_m$$

de acuerdo a lo cual obtenemos los cambios de escala $\bar{\sigma} = \varepsilon^3 \sigma$, $\bar{\boldsymbol{E}} = \varepsilon^3 \boldsymbol{E}$, $\bar{\boldsymbol{B}} = \varepsilon^2 \boldsymbol{B}$ y $\bar{j} = \varepsilon^2 j$.

Estas relaciones de cambios de escala permiten construir, a partir de fuentes adecuadamente elegidas en potenciales de ε soluciones relativistas "alrededor" de soluciones no relativistas[3]. Es importante notar que las ecuaciones no relativistas no admiten propagación. Las soluciones relativistas serían "correcciones" ondulatorias superpuestas a una solución no relativista. Es posible estimar, rigurosamente [3], el tiempo durante el cual la solución no relativista es una "buena" aproximación a la solución completa.

LOS LIMITES NO RELATIVISTAS EN TERMINOS DE LOS POTENCIALES

Límite eléctrico

En el límite eléctrico, de acuerdo a (9) para $\varepsilon = 0$, podemos tomar:

$$\boldsymbol{H} = rot\, \boldsymbol{A} \quad ; \quad \boldsymbol{D} = -grad\, \varphi$$

Las relaciones de transformación (4) para los campos $\boldsymbol{H}$ y $\boldsymbol{D}$ sugieren tomar como cuadrivector al conjunto $A^a = (\boldsymbol{A}, \varphi)$, el cuál se transforma como

$$A' = A + \frac{u}{c}\varphi$$
$$\varphi' = \varphi \qquad (13)$$

Por otro lado, estas relaciones de transformación están también de acuerdo con el cambio de escala (6) para $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{H}$ si ponemos

$$\bar{A} = \varepsilon A \ ; \ \bar{\varphi} = \varphi \qquad (14)$$

Partiendo de las ecuaciones usuales de Maxwell, en términos de A y φ, realizamos el cambio de escala $A \rightarrow \varepsilon A$, $\varphi \rightarrow \varphi$, $x \rightarrow x$, $t \rightarrow t/\varepsilon$, $\sigma \rightarrow \sigma$, $j \rightarrow \varepsilon j$, $\partial/\partial t \rightarrow \varepsilon\partial/\partial t$ y obtenemos

$$\nabla^2 A - \frac{\varepsilon^2}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\, j + grad\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + divA\right)$$
$$\nabla^2\varphi + \frac{\varepsilon^2}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(divA) = -4\pi\sigma$$

En la medida de Lorentz se desacoplan las ecuaciones y se obtienen ecuaciones de onda con velocidad c/ε.

Límite magnético

Las ecuaciones (12) para el límite magnético (ε=0) se resuelven de acuerdo a:

$$\boldsymbol{B} = rot\, A \ ; \ \boldsymbol{E} = -grad\, \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}$$

En este caso, razonamientos análogos a los del límite eléctrico (las relaciones de transformación de los campos ante el grupo de Galileo, o el comportamiento de los mismos ante un cambio de escala), sugieren tomar como cuadrivector al conjunto $A_a = (A\text{-}\varphi)$, el cual se transforma como

$$A' = A$$
$$j' = j + \frac{u}{c}\cdot A \qquad (15)$$

Luego, ante un cambio de escala, es consistente tomar

$$A = \bar{A} \ ; \ \varphi = \varepsilon\varphi \qquad (16)$$

Como hicimos anteriormente, partimos de las ecuaciones de Maxwell para A y φ y realizamos el cambio de escala $A \rightarrow A$, $j \rightarrow \varepsilon j$, $x \rightarrow x$, $t \rightarrow t/\varepsilon$, $\sigma \rightarrow \varepsilon\sigma$, $j \rightarrow j$, $\varphi = \varepsilon\varphi$, $\partial/\partial t \rightarrow \varepsilon\partial/\partial t$ y obtenemos

$$\nabla^2 A - \frac{\varepsilon^2}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\, j + grad\left(\frac{\varepsilon^2}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + divA\right)$$
$$\nabla^2\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(divA) = -4\pi\sigma$$

En la medida de Lorentz ($divA + \frac{\varepsilon^2}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$), que en el límite $\varepsilon \rightarrow 0$ se transforma en la medida de Coulomb ($divA = 0$), las ecuaciones se desacoplan y obtenemos ecuaciones de onda para A y φ con velocidad c/ε. En la forma cuadridimensional de las ecuaciones, usando la libertad de medida, podemos escribir:

$$\nabla^2 A^a - \frac{\varepsilon^2}{c^2}\frac{\partial^2 A^a}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}j^a \qquad \underline{\text{Límite eléctrico}}$$
$$\nabla^2 A_a - \frac{\varepsilon^2}{c^2}\frac{\partial^2 A_a}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}j_a \qquad \underline{\text{Límite Magnético}}$$

Vemos que ambos límites se obtienen de la misma familia de ecuaciones. La diferencia entre ambos está en la ley de transformación Galileana que adoptemos para j y σ y, por consiguiente, para A y φ. Esto conduce a distintos escalamientos para las fuentes y, de allí, a familias de soluciones con distintos límites Galileanos. Ambos límites tienen realidad física.

COMENTARIOS FINALES

Si bien el estudio de los distintos límites Galileanos de las ecuaciones relativista del electromanetismo en el vacío, ya tratado anteriormente con otro enfoque [4], tiene interés en sí mismo, el motivo último de este estudio es analizar, de manera análoga, el límite Newtoniano del campo gravitatorio relativista de un sistema material. Actualmente estamos trabajando en ese tema.

REFERENCIAS

[1] Ver por ejemplo: V.H.Hamity. "*On the Galilean covariance of Maxwell equations*". Miscelánea No. 81. Academia Nacional de Ciencias - Córdoba - (1990).

[2] J.Ehlers. "*On limit relations between, and approximative explanations of physical theories*". Barcan Marcus et.al.eds., Logic, Methodology and Phylosophy of Science VII, Elsevier Science Pub. B.V., p.**387** (1986).

[3] G. Browning y H.O.Kreiss. Siam J.Appl. Math. **V42**, p.**704** (1982). Ver también las referencias citadas en éste artículo.

[4] M.Le Bellac y J.M.Lévy - Leblond, Nuovo CimentoV **14B**, p. 217 (1973).