

# DINAMICA NO LINEAL EN SISTEMAS REALIMENTADOS

L.H. Mancini (\*), D.M Maza (\*\*), D.L. Valladares

Laboratorio de Optoelectrónica y Láseres. Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y Naturales  
Universidad Nacional de San Luis, Chacabuco y Pedernera, 5700 San Luis.

Los sistemas dinámicos no lineales con realimentación y representables por mapas unidimensionales que dependen de pocos parámetros, presentan una dinámica muy compleja que incluye caos determinístico por duplicación de período, intermitencias y ventanas multiestables. Se describen estudios sobre sistemas electroópticos realimentados y resultados de experiencias numéricas realizadas en los mapas de codimensión uno, para los parámetros relevantes del sistema.

## INTRODUCCION

El comportamiento de los sistemas no lineales recibe un interés creciente por sus aplicaciones a contextos muy diversos. En particular, aquellos sistemas realimentados en los cuales la función de transferencia no es lineal, constituyen un claro ejemplo de que aún sistemas sumamente simples presentan comportamientos dinámicos muy complejos, tal como fuera inicialmente señalado por R. May en 1976 [1]

Entre los sistemas optoelectrónicos, el denominado híbrido ha sido muy analizado en el estudio de los que presentan biestabilidad, por sus aplicaciones al tratamiento óptico de la información y la computación óptica. No obstante, la extensión del análisis permite conocer nuevas posibilidades de funcionamiento del sistema, así como utilizarlo como banco de prueba para el estudio del comportamiento no lineal. Es posible observar en él bifurcaciones de diverso tipo, caos determinístico por duplicación de período, intermitencia, etc. y analizar en detalle su comportamiento.

Sistemas donde un haz láser es realimentado sobre un dispositivo no lineal han sido presentados en diversos trabajos [2], [3], [4], analizándose fundamentalmente el comportamiento como dispositivo biestable. El análisis de un sistema con dos moduladores electroópticos con entrada pulsada, [5], ha mostrado la posibilidad de nuevos usos del mismo.

En este trabajo se estudia el sistema anterior, cuya

---

(\*) Investigador del Centro de Investigaciones en Láseres y aplicaciones (CEILAP),

Centro de Investigaciones Técnicas de las Fuerzas Armadas. CONICET, Zufriategui 4380, 1603, Villa Martelli, Buenos Aires.

(\*\*) Becario Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y Naturales, Universidad Nacional de San Luis.

descripción global fuera dada por Izaguirre *et al.* [6], profundizando, mediante simulación numérica, la dinámica del diagrama de bifurcaciones frente a la variación de un parámetro por vez. Es decir, se observan en detalle sólo las bifurcaciones de codimensión uno. También se discute la influencia de cada parámetro de control sobre la función de transferencia, mostrando como la pérdida de estabilidad de los puntos fijos da lugar a la duplicación de períodos, bifurcación tipo "split" e intermitencia tipo I.

El comportamiento mediante una entrada discreta, con realimentación retardada de un impulso, da lugar a que el sistema sea representado sin aproximaciones por una ecuación de recurrencias [5]. Los tiempos propios del sistema son eliminados adiabáticamente y la dinámica queda definida por los parámetros del lazo de realimentación. Estos parámetros agotan las posibilidades de control de la función de transferencia, pues la modulan en amplitud (como en el caso más analizado en la literatura: el mapa logístico), la asimetricizan (parámetro B) introduciendo un desplazamiento de fase, o controlan el número de máximos dentro del intervalo (modulando la "frecuencia": parámetro R).

En el caso de entrada continua, para adecuados valores de la realimentación, se producen autopulsaciones, como las que analizaron Gibbs y colaboradores [7]. Estas autopulsaciones se desordenan al aumentarse la realimentación, dando lugar a la duplicación de período y aparición de regiones caóticas en la señal. La figura 1 muestra un diagrama de las posibles salidas de este sistema para valores del parámetro de control que crecen monotónicamente dando lugar a las sucesivas bifurcaciones.

El comportamiento temporal para la entrada continua se muestra en la figura 2.a en el caso de las autopulsaciones, y en 2.b en el caso de la duplicación de

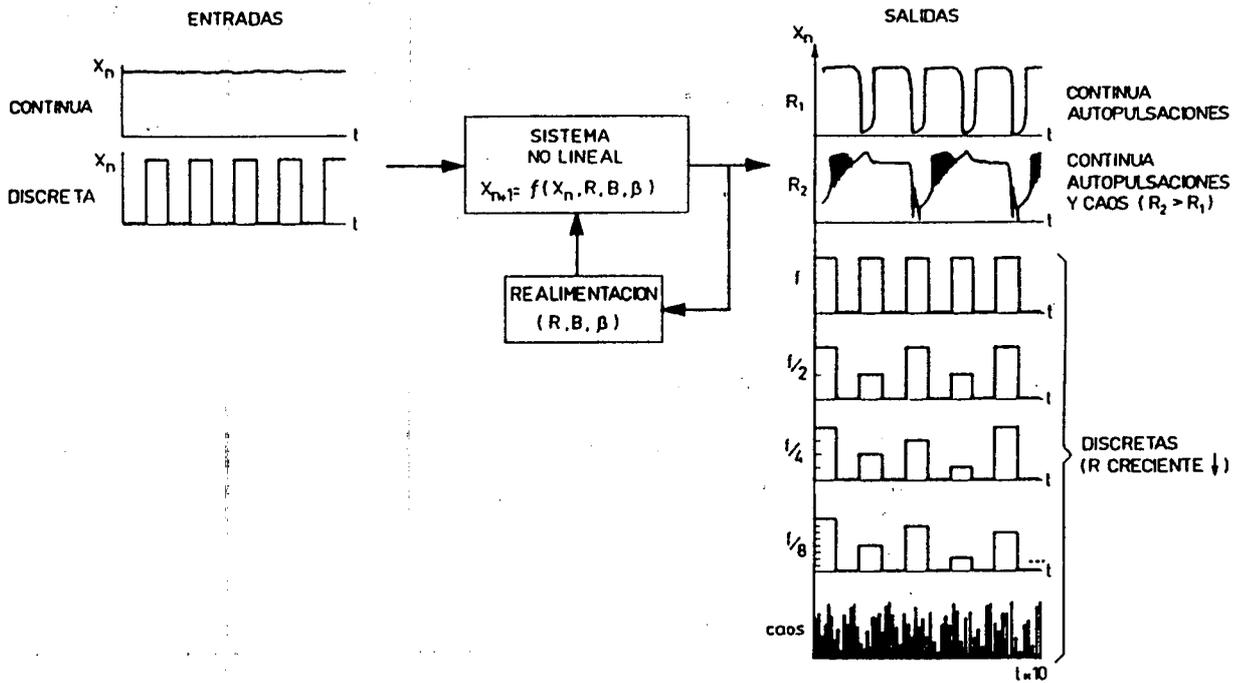
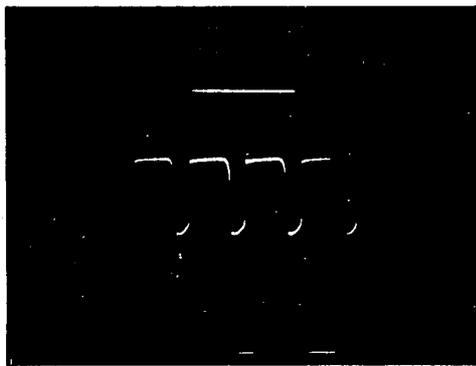
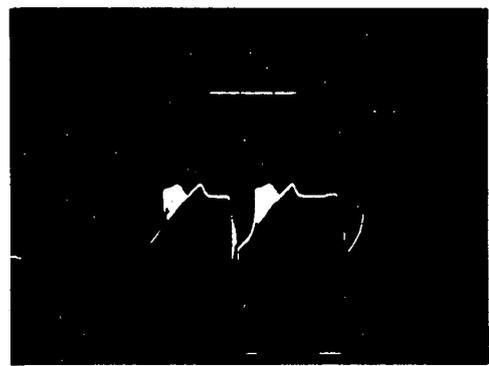


Figura 1: Esquema del sistema indicando las posibles salidas correspondientes a entradas continuas y discretas. Existe siempre un retardo no indicado en el diagrama que para el caso discreto es de un impulso.



(a)



(b)

Figura 2: (a y b) Oscilogramas de salida del dispositivo experimental, mostrando la aparición de autopulsaciones (a), y la duplicación de período y aparición de caos (b), como en el esquema de la Fig. 1.

período y aparición del caos. El comportamiento temporal con señal discreta está suficientemente tratado en la referencia [5].

## DESCRIPCION DEL COMPORTAMIENTO ASINTOTICO

La función de iteración que describe el comportamiento del sistema realimentado [5,6] es:

$$X_{n+1} = 0.5 \{ 1 - A + C \cos[2\pi (R X_n + B)] \} \quad (1)$$

donde los valores de A y C vienen dados por  $A = \sin 2\alpha \sin 2\beta$ ,  $C = \cos 2\alpha \sin 2\beta$ .

Mediante simulación numérica se llega a los siguientes resultados, que presentamos sintéticamente:

a) Amplificación del lazo de realimentación (variación del parámetro R, con  $\alpha=0$ ,  $\beta=0$  y  $B=0$ ).

El incremento de este parámetro produce, en la función de transferencia, la incorporación de puntos críticos dentro del intervalo de recurrencia. Esto se traduce en la aparición de nuevos puntos fijos cada vez que R sobrepasa un valor múltiplo de 1/2. No se observa la presencia de múltiples cuencas de atracción, y esto implica que el diagrama de bifurcaciones es independiente de las condiciones iniciales elegidas. A pesar de la presencia de un punto repulsor, es decir que tiene  $|f'(x)| > 1$  como el A de la figura 3.a, la función de transferencia permite la reinyección, eliminando la posibilidad de existencia de más de una cuenca de atracción.

La figura 3.a muestra el mapa de la función de transferencia del sistema para cinco valores de R. En la figura 3.b se observa el diagrama de bifurcaciones valores de este parámetro entre 0 y 2. La entrada al caos ocurre normalmente por duplicación de período (ruta de Feigenbaum). Luego se observa la aparición de ventanas de intermitencia de múltiples períodos pares e impares.

La secuencia de bifurcaciones en cada una de las ventanas principales ( $R=n$  y  $R=(n+1/2)$ , con n entero positivo) es siempre la misma, e independiente del período de la multiestabilidad presente: salida del caos via intermitencia tipo I (en el orden correspondiente al período de la multiestabilidad), permanencia en la multiestabilidad en un intervalo de R que tiende a decrecer a medida que R aumenta, y por último, entrada nuevamente al caos por vía de duplicación de período.

b) Variación del parámetro B ("bias" continuo, con  $\alpha=0$ ,  $\beta=2.056$  y  $R=1.33$ ).

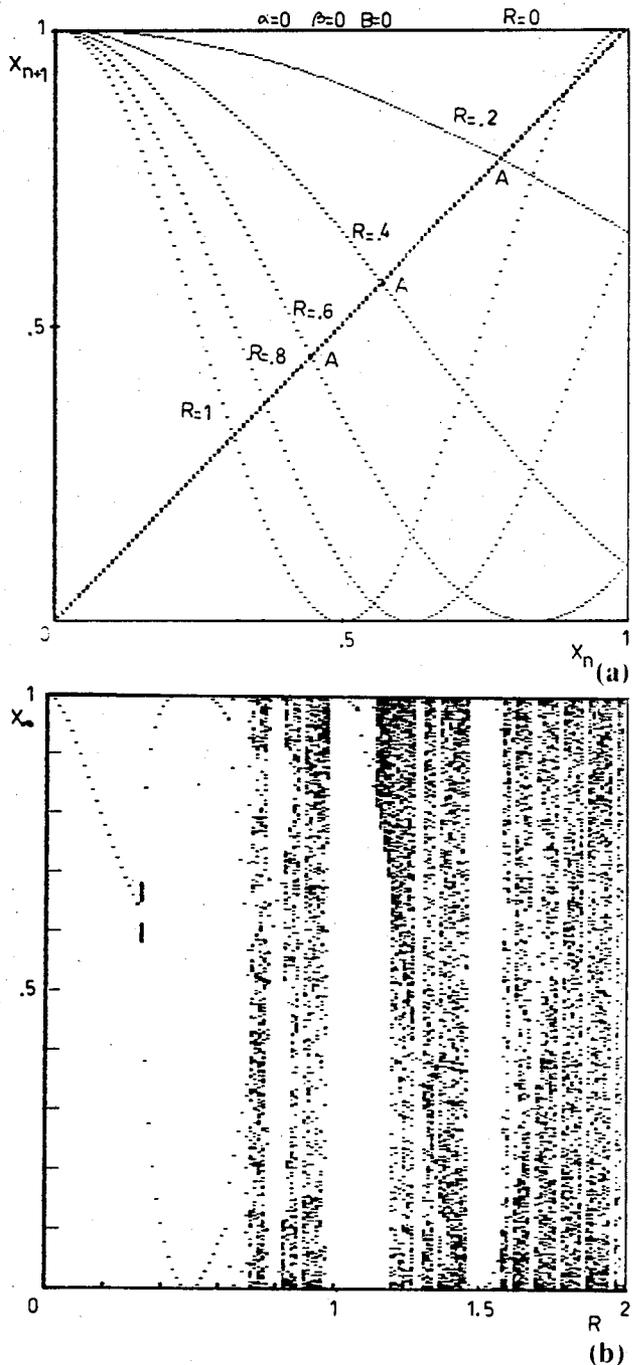
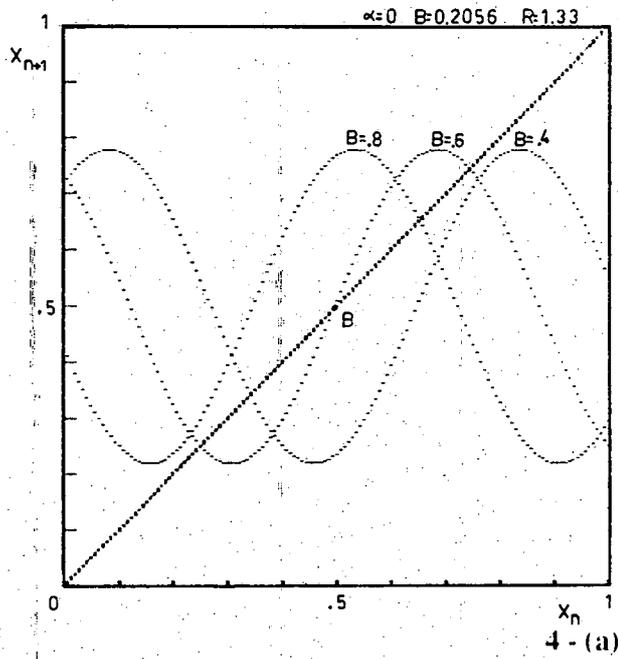
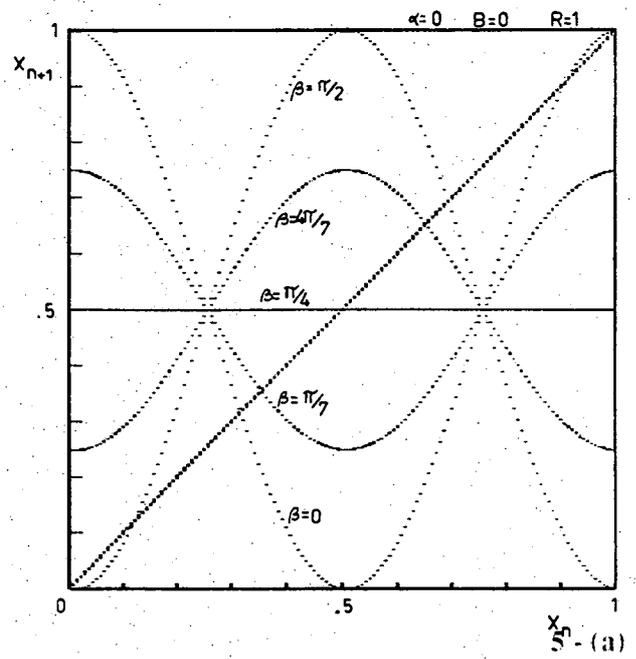


Figura 3: (a y b) Mapas para R entre 0 y 1, donde observamos la aparición del punto repulsor A, ya que  $f'(A) > 1$  para  $R > 0.5$  (a), y comportamiento asintótico como función del parámetro R (ganancia de realimentación) (b).

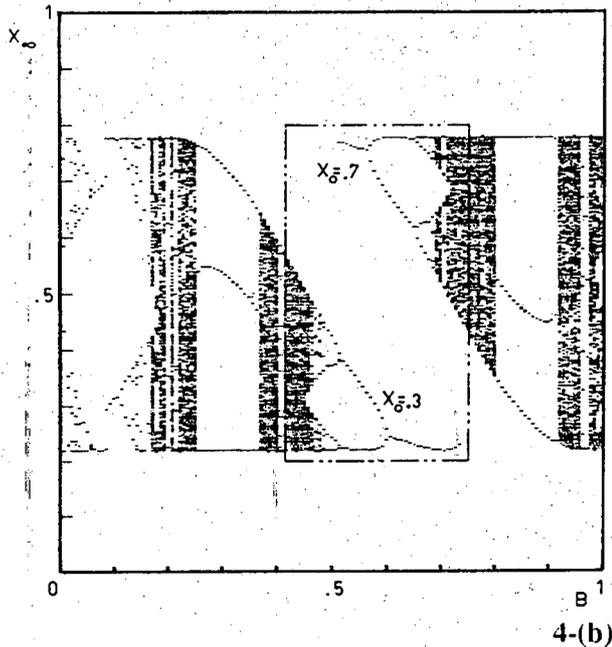
Este parámetro está incluido en la ecuación como una constante de fase, y su incremento representa un desplazamiento lateral del mapa completo.



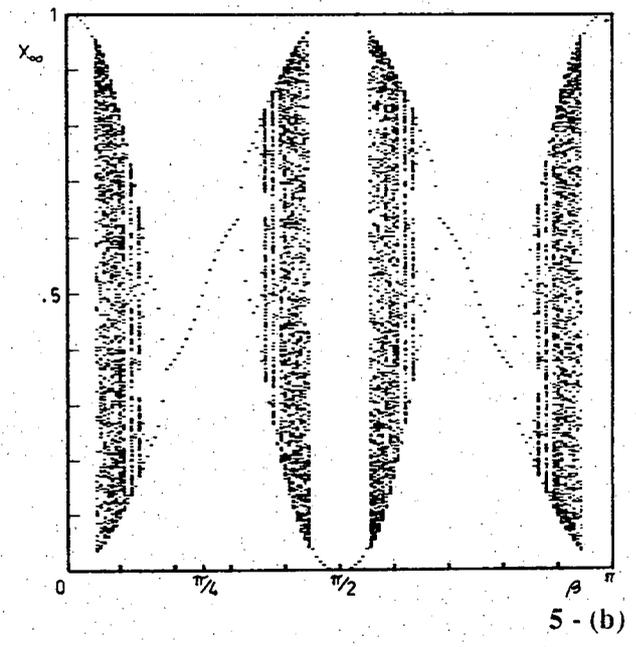
4 - (a)



5 - (a)



4 - (b)



5 - (b)

Figura 4: (a y b) Mapas para  $B$  entre 0.4 y 0.8 (a), y comportamiento asintótico como función del parámetro  $B$  (polarización o “bias”) (b).

El diagrama de bifurcaciones para  $B$  (para los parámetros antes indicados), posee dos cuencas de atracción y por lo tanto el estado final depende de la condición inicial elegida. En la figura 4.a se ha dibujado el comportamiento de la función para el intervalo de variación del parámetro que produce la aparición de las dos cuencas. Se puede observar la presencia de un punto repulsor (punto  $B$  en la figura 4.a), que divide

Figura 5: (a y b) Mapas para  $\beta$  entre 0 y  $\pi/2$  (a), y comportamiento asintótico como función del parámetro  $\beta_0$  (rotación del polarizador de salida) (b).

las mismas.

La figura 4.b muestra un diagrama de bifurcaciones con barrido de las condiciones iniciales. Se ha recuadrado la zona donde existen las dos cuencas. Para ciertas condiciones iniciales, el diagrama recorre la cuenca inferior, donde la salida del caos es vía duplicación de período inversa. Para otras condi-

ciones iniciales, el diagrama presenta un único punto fijo estable en la primera iteración, con posterior entrada al caos via duplicación de período.

c) Variación del parámetro  $\beta$  (Rotación del polarizador de salida con  $\alpha=0$ ,  $B=0$  y  $R=1$ ).

En la figura 5.a se observa como esta variación produce modulación de la función de transferencia simétricamente en torno de la imagen  $X_{n+1} = 0.5$ . Nuevamente, como en el caso de la variación de  $R$ , se encuentra que el diagrama de bifurcaciones posee una sola cuenca de atracción. En la figura 5.b se ve el diagrama para la variación de  $\beta$  entre  $0$  y  $\pi/2$ .

En el intervalo  $[0, \pi/4]$ , la entrada al caos se produce por pérdida de estabilidad de un punto fijo en la primera iteración via intermitencia del tipo I. Luego la cuenca de atracción disminuye en amplitud en forma constante, manteniéndose el comportamiento caótico hasta que la salida del caos se produce por duplicación de período inversa hacia un único punto fijo.

Se han estudiado diagramas de bifurcaciones de  $\beta$  para  $R > 1$ , observándose un comportamiento similar al de  $R=1$ , pero con la aparición de múltiples cuencas de atracción dentro de una cuenca principal que coincide en su forma con la de la figura 5.b. En este caso se observó la aparición de una bifurcación de tipo "split" [8]. Este tipo de bifurcación presenta la aparición de dos nuevos puntos fijos estables por cada uno que pierde estabilidad, aunque la órbita tendrá la misma periodicidad que los puntos que se tomaron inestables.

Al contrario que en la duplicación de período, donde los dos nuevos puntos fijos aparecen en una iteración de orden dos veces mayor, en la bifurcación "split" los dos nuevos puntos fijos aparecen en iteración del mismo orden que tenía el punto fijo estable.

## CONCLUSIONES

El análisis numérico presentado pone de manifiesto

mayores posibilidades en el funcionamiento del sistema electroóptico que las que aparecen en trabajos anteriores. La posibilidad de distinguir dos cuencas de atracción con límites regulables, permite pensar en la clasificación de pulsos de entrada según su amplitud. Sumado a este comportamiento, la posibilidad de dividir por potencias de dos, amplía la gama de aplicaciones posibles en el procesamiento óptico de la información y computación óptica.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido subvencionado parcialmente con un subsidio de la Secretaría de Ciencia y Técnica de la UNSL:

## BIBLIOGRAFIA

- [1] R. May, Nature 261, 469 (1976).
- [2] P. W. Smith and E. Turner. Appl. Phys. Lett. V 30, 260 (1977)
- [3] Una descripción general sobre sistemas híbridos puede verse en : Hyatt Gibbs, "Optical Bistability", Academic Press (1985).
- [4] T. Murina, N. Pozanov, Sov. J. Quantum Electron., 11(6), Jun. (1981).
- [5] H. Mancini, E. Izaguirre, E. Alonso, R. D'Angelo. Proceedings of Nonlinear Dynamics in Optics, OSA Conference 1990.
- [6] E. Izaguirre, C. Ferro Fontan, H.L. Mancini. Anales Afa, Vol. 1 pag. 28-34, (1989).
- [7] H. Gibbs, F. Hopf, D. Kaplan, R. Shoemaker, Phys. Rev. Lett. 46, 474 (1981).
- [8] J. Testa, G.A. Held. Phys. Rev. A. 28, 3085 (1983).