DESACOPLAMIENTO DE ESTADOS NULOS EN LA FORMULACION FUNCIONAL DE LA TEORIA DE CUERDAS

G. Aldazábal, E. Andrés, I. Allekotte*[1]
Centro Atómico Bariloche e Instituto Balseiro,
Comisión Nacional de Energía Atómica y Universidad Nacional de Cuyo,
8400 San Carlos de Bariloche.

Se estudian funciones de correlación con estados nulos en la cuerda bosónica en el formalismo funcional . Para el caso del toro se muestra explícitamente que éstas pueden escribirse como derivadas totales en el espacio de los módulos usando identidades de Riemann.

INTRODUCCION

Entre los estados físicos del espacio de Hilbert de la cuerda bosónica aparecen algunos de norma cero, son llamados estados nulos y deben desacoplarse de los demás estados físicos para que la teoría sea unitaria. Por argumentos formales basados en BRST [1] los integrandos de las amplitudes de dispersión de estos estados con estados físicos deberían poder escribirse sobre la esfera como derivadas totales respecto de la posición del estado nulo. Para géneros $g > 0$ aparecerían también derivadas totales en los parámetros modulares. La amplitud se cancela al integrar y los estados nulos se desacoplan de la teoría. Sonoda [2] consigue escribir de esta forma el integrando de la amplitud de dispersión de un estado nulo, de un modo formal, considerando sólo la parte holomorfa del integrando de la amplitud. Ver también referencia [5].

En este trabajo escribimos explícitamente el integrando de la amplitud de dispersión del estado nulo del segundo nivel y N taquiones como suma de derivadas totales en las posiciones de los estados y en los parámetros modulares. Conseguimos hacerlo para la esfera y el toro. En este último caso fue necesario probar una identidad entre funciones theta de Riemann (que aparecen naturalmente en el propagador) para llegar al resultado.

Usando un argumento de factorización generalizamos el desacoplamiento del estado nulo para una gran variedad de otros estados además de los taquiones.

* Becario CONICET

Para la definición de los operadores de vértice y el cálculo de las amplitudes de dispersión empleamos la notación y las reglas obtenidas en [4].

CALCULO EN LA ESFERA

El operador de vértice del estado nulo del nivel 2 en la esfera es

$$\psi = \{ [\tfrac{5}{2}\, i p_\nu\, \partial_z^{\,2} X + \tfrac{1}{2} (\eta_{\mu\nu} - 3\, p_\mu p_\nu)\, \partial_z X^\mu \partial_z X^\nu] \times$$
$$\times [-\tfrac{5}{2}\, i p_\mu\, \bar{\partial}_z^{\,2} X + \tfrac{1}{2} (\eta_{\mu\nu} - 3 p_\mu p_\nu)\, \bar{\partial}_z X^\mu \bar{\partial}_z X^\nu] \}\, e^{ipX(z,z)} \qquad (1)$$

con $p^2=2$, que corresponde en el formalismo operatorial al estado nulo:

$$|\psi> = (L_{-2} + \tfrac{3}{2}\, L^2_{-1})\, (\bar{L}_{-2} + \tfrac{3}{2} \bar{L}^2_{-1})\, |\, 0, p> \qquad (2)$$

El vértice del taquión es $\phi = e^{ipx}$, con $p^2 = -2$
Haciendo las contracciones entre los campos, encontramos que el integrando de la amplitud del estado ψ con N taquiones puede escribirse como

$$A (\{z_i\}) = << \psi (z) \prod_{j=1}^{N} e^{ip_j X (w_j)} >> =$$
$$=[\tfrac{3}{2}\partial^2_z + \sum_{j=1}^{N} \partial_j (\partial_z G(z, \omega_j)][\tfrac{3}{2} \bar{\partial}^2_z + \sum_{j=1}^{N} \bar{\partial}_j (\bar{\partial}_z G (z,\omega_j))] \times$$
$$\times << \prod_0 >> \qquad (3)$$
$$\prod_0 \equiv e^{ipX(z)} \prod_{j=1}^{N} e^{ip_j X(\omega_j)}:$$

donde << >> indica que para hallar el valor medio falta integrar sobre los puntos donde están insertos los estados y G es el propagador bosónico en la esfera:

$$G(z,\bar{z},\omega,\bar{\omega}) = ln\,|z - \omega|^2 \qquad (4)$$

Así hemos obtenido una expresión donde $A(z_i)$ se ve explícitamente escrito como derivada total respecto de la posición de los estados. El único paso no inmediato es usar la igualdad

$$\sum_{j=1} -p_j p_1 \partial_z G(z,z_j)\ \partial_j(z_j,z_1) = \frac{1}{2}\sum_{j=1} -p_j p_1 \partial z G(z,z_j)\ \partial_z(z,z_1) \qquad (5)$$

que se obtiene abriendo la sumatoria en $j > 1$ y $j < 1$ y usando

$$\frac{1}{z-\omega_j} - \frac{1}{z-\omega_1} = \frac{\omega_1 - \omega_j}{(z-\omega_j)(z-\omega_j)} \qquad (6)$$

Un razonamiento análogo vale para la parte antiholomorfa. Como estamos en la esfera; no hay términos cruzados entre la parte holomorfa y la antiholomorfa

CALCULO EN EL TORO

El propagador bosónico sobre el toro es

$$G(z,\omega) = ln\left|\frac{\theta(z-\omega)}{\theta'(0)}\right|^2 + \frac{\pi}{2\tau_2}\left((\bar{z}-\bar{\omega}) - (z-\omega)\right) \qquad (7)$$

donde θ es la theta impar de Riemann para género 1 y τ_2 es la parte imaginaria de τ, el parámetro modular del toro.

La generalización de (1) a géneros mayores de obtiene reemplazando por derivadas covariantes y efectuando las autocontracciones que correspondan [4]. En el caso del toro, la derivada covariante es igual a la ordinaria, y ψ resulta:

$$\psi(z,\bar{z}) = \{[\tfrac{5}{2}\, ip_\mu \partial^2_z X^\mu + \tfrac{1}{2}(\eta_{\mu\nu} - 3p_\mu p_\nu)\partial_z X^\mu \partial_z X^\nu -$$

$$-15\,\partial^2_z G_R(0)]\,[-\tfrac{5}{2}\, ip_\mu \bar{\partial}^2_z X^\mu + \tfrac{1}{2}(\eta_{\mu\nu} - 3p_\mu p_\nu)\bar{\partial}_z X^\mu \bar{\partial}_z X^\nu -$$

$$-15\,\bar{\partial}^2_z G_R(0)] + 25\frac{\pi^2}{\tau^2} + \frac{\pi}{\tau_2}\,\partial_z X_\mu \bar{\partial}_z X^\mu +$$

$$+ 12\frac{\pi}{\tau^2}\ p_\mu \partial_z X^\mu p_\nu \bar{\partial}_z X^\nu\}\ e^{ipX(z,\bar{z})} \qquad (8)$$

donde el propagador regularizado G_R verifica

$$\partial^2 G_R(0) = \frac{\theta'''(0)}{3\,\theta'(0)} + \frac{\pi}{\tau_2} \qquad (9)$$

La identidad correspondiente a la (5) es ahora más complicada, ya que necesitamos una identidad que relacione de forma adecuada las funciones theta. Para ello partimos de la identidad [6]

$$\theta[{}^0_0](x)\,\theta[{}^0_0](y)\,\theta[{}^0_0](u)\,\theta[{}^0_0](v) +$$

$$-\theta[{}^{\ 0}_{1/2}](x)\,\theta[{}^{\ 0}_{1/2}](y)\,\theta[{}^{\ 0}_{1/2}](u)\,\theta[{}^{\ 0}_{1/2}](v) +$$

$$-\theta[{}^{1/2}_{\ 0}](x)\,\theta[{}^{1/2}_{\ 0}](y)\,\theta[{}^{1/2}_{\ 0}](u)\,\theta[{}^{1/2}_{\ 0}](v) +$$

$$+\theta[{}^{1/2}_{1/2}](x)\,\theta[{}^{1/2}_{1/2}](y)\,\theta[{}^{1/2}_{1/2}](u)\,\theta[{}^{1/2}_{1/2}](v) =$$

$$= 2\,\theta[{}^{1/2}_{1/2}]\left(\frac{x+y+u+v}{2}\right)\theta[{}^{1/2}_{1/2}]\left(\frac{x+y-u-v}{2}\right) \times$$

$$\times\,\theta[{}^{1/2}_{1/2}]\left(\frac{x-y+u-v}{2}\right)\theta[{}^{1/2}_{1/2}]\left(\frac{x-y-u+v}{2}\right) \qquad (10)$$

derivamos respecto de x y evaluamos en x=0, aplicamos a ambos miembros el operador $(\partial_y - \partial_\mu + \partial_v)^2$, ponemos y=u-v, reacomodamos los términos, llamamos z_1=u, z_2=v queda

$$\frac{\theta''(z_1)}{\theta(z_1)} + \frac{\theta''(z_2)}{\theta(z_2)} + \frac{\theta''(z_2-z_1)}{\theta(z_2-z_1)} - 2\frac{\theta'(z_1)\,\theta'(z_2)}{\theta(z_1)\,\theta(z_2)} +$$

$$+ \frac{\theta'(z_1)\,\theta'(z_2-z_1)}{\theta(z_1)\,\theta(z_2-z_1)} - 2\frac{\theta'(z_2)\,\theta'(z_2-z_1)}{\theta(z_2)\,\theta(z_2-z_1)} = \frac{\theta'''(0)}{\theta'(0)} \qquad (11)$$

Notando, además, que

$$\partial_\tau\,\theta(z|\tau) = \frac{1}{4\pi i}\,\partial^2_z\theta(z|\tau) \qquad (12)$$

y $-\partial_z^2 G(z,j) = \partial z \partial j\, G(z,j)$, y usando conservación de impulso, la parte holomorfa del integrando de la amplitud puede escribirse como

$$\ll \psi(z)\prod_{j=1}^{N} e^{ip_jX(\omega_j)}: \gg\ = \frac{3}{2}\,\partial^2_z \ll \prod_0 \gg +$$

$$+\sum_j \partial_j\left[\frac{\theta'(z-\omega_j)}{\theta(z-\omega)} \ll \Pi \gg\right] +$$

$$+ 2\pi i\,\frac{\tau_2}{Z}\,\partial_\tau\left[\ \frac{Z}{\tau_2} \ll \prod_0 \gg\right], \qquad (13)$$

donde

$$Z = \text{cte}\ \ \theta[{}^{1/2}_{1/2}](0)^{-8}\,\tau_2^{-6}\ : \qquad (14)$$

de modo que la función de partición es

$$\mathcal{Z} = \int \frac{d^2\tau}{\tau^2_2}\ Z\,\bar{Z} \qquad (15)$$

El término antiholomorfo es el conjugado de la expresión (13).

El término cruzado es

$$\frac{\pi}{\tau_2} \left[\partial X \bar{\partial} X \, e^{ipx} + 12 (p_\mu \partial X^\mu)(p_\nu \partial X^\nu) e^{ipx} + 25 \frac{\pi}{\tau_2}\right] \tag{16}$$

y se verifica que la suma de las 3 (holomorfa, antiholomorfa y cruzada)
es

$$\left[\frac{3}{2} \partial^2_z + \sum_j \partial_j \left(\frac{\theta'(z-\omega_j)}{\theta(z-\omega_j)} \right) + 2\pi i \, \partial_\tau \right] \times \overline{[\quad]} \ll \frac{Z \bar{Z}}{\tau^2_2} \prod_0 \gg \tag{17}$$

con lo que el integrando de la amplitud queda explícitamente escrito como suma de derivadas totales.

CONCLUSIONES

Hemos mostrado que la amplitud de dispersión de ψ con N taquiones se anula para $g \leq 1$. Los estados que se acoplan con los taquiones pueden obtenerse como estados intermedios a partir de los polos que aparecen en la amplitud anterior [4]. De este modo, un argumento de factorización implicaría que ψ se desacopla también para amplitudes que contengan estos estados.

REFERENCIAS

[1] D. Friedan, E. Martínec y S. Shenker, Nucl. Phys. B 271 (1986) 93

[2] H. Sonoda, Nucl. Phys. B 281 (1987) 546

[3] S. Hamidi y C. Vafa, Nucl. Phys. B 279 (1987) 465

[4] G. Aldazábal, M. Bonini, R. Iengo, y C. Núñez, Phys. Lett. B 199 (1987) 41

[5] T. Eguchi y H. Ooguri, Nucl Phys. B 282 (1987) 308

[6] D. Mumford, Tata lectures on theta, Birkhauser (1983) vol.1