

ESTABILIDAD CLASICA Y CUANTICA DE SOLITONES NO TOPOLOGICOS

J. Llambías y L. Masperi.

Centro Atómico Bariloche e Instituto Balseiro, Comisión Nacional de Energía Atómica y Universidad de Cuyo C.C. 439, 8400, San Carlos de Bariloche.

En un modelo de campo escalar en dos dimensiones con potencial de autointeracción con un mínimo relativo para campo no nulo y el mínimo absoluto para campo cero, se tiene un solitón no topológico clásicamente inestable y que, además, por efecto túnel sufre una transición análoga a la del falso vacío. Considerando las correcciones cuánticas a un lazo, dependiendo de la elección de las condiciones de renormalización, se puede lograr que el potencial efectivo muestre ruptura espontánea de la simetría. Para una zona de parámetros del modelo, la masa de los mesones correspondientes al vacío asimétrico es suficientemente grande para evitar el decaimiento del solitón.

INTRODUCCION

En algunas teorías de campos, existen fenómenos que no aparecen en el desarrollo perturbativo usual. Para estudiar estos fenómenos, realizamos la cuantización en torno de las soluciones estáticas de la teoría clásica, o sea los solitones. En algunos casos, como por ejemplo la teoría de un campo escalar con autointeracción cuártica, puede asignarse a estos objetos una carga topológica, que permite que sean estabilizados clásicamente. En otros casos las soluciones no presentan esta propiedad topológica y los solitones resultan clásicamente inestables¹. En este trabajo estudiamos un modelo en campo escalar en 1+1 dimensiones con autointeracciones cuártica y séxtica, que contiene solitones no topológicos entre sus soluciones. Estos solitones son burbujas en el falso vacío². Al tener en cuenta las correcciones cuánticas, se puede lograr que el potencial efectivo presente ruptura de simetría, de manera que las burbujas quedan en el vacío verdadero. La estabilidad del solitón puede quedar asegurada para un rango de los parámetros, por ser su energía menor que la masa del mesón que aparece en este vacío, pues en este caso el solitón no tiene en qué decaer conservando la energía.

EL SOLITON NO TOPOLOGICO DE LA TEORIA ϕ^6

El modelo consiste en un campo escalar real $\phi(x,t)$ en 1+1 dimensiones, con una densidad lagrangiana.

$$\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{x}, \tilde{t}) = 1/2(\tilde{\partial}_\mu \tilde{\phi})^2 - \tilde{V}(\tilde{\phi}) \quad (1)$$

donde

$$\tilde{V}(\tilde{\phi}) = (k^2/2)(\tilde{\phi}^2 - \rho)^2 (\tilde{\phi}^2 - A\rho) \quad (2)$$

Haciendo un cambio de variables $\phi = \tilde{\phi}/\sqrt{\rho}$; $\tilde{x} = \rho x$ podemos reescribirlo en términos de

$$\mathcal{L}(x,t) = 1/\lambda [1/2(\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi)] \quad (3)$$

donde

$$V(\phi) = (k^2/2)(\phi^2 - 1)^2(\phi^2 - A), \quad \lambda = 1/\rho^3 \quad (4)$$

En la forma simplificada (3) del lagrangiano, se ha factorizado la constante λ , que es el parámetro que usamos para hacer el desarrollo.

Nos restringimos al caso en que $0 < A < 1$, que corresponde a un potencial con tres mínimos; el mínimo absoluto en $\phi = 0$ y dos mínimos relativos en $\phi = \pm 1$ (Ver Fig.1).

La ecuación de movimiento independiente del tiempo que se obtiene del lagrangiano es

$$\phi'' = V'(\phi), \quad (5)$$

que puede ser integrada una vez para dar

$$(\phi')^2 = 2V(\phi) \quad (6)$$

Las soluciones que nos interesan son las de energía finita, que están dadas por

$$E(\varphi) = \int dx \tilde{x} [1/2(\tilde{\varphi}')^2 + \tilde{V}(\tilde{\varphi})] =$$

$$= 1/\lambda^{2/3} \int dx [1/2(\varphi')^2 + V(\varphi)] \quad (7)$$

La Ec. (6) es la ecuación de movimiento de una partícula cuya posición es φ y con el tiempo dado por x para un potencial $-V$. Aparecen dos tipos de soluciones con energía finita: las soluciones constantes en los mínimos del potencial, y las burbujas. Estas últimas son dos, una en cada pozo lateral. Integrando (6) obtenemos (Ver Fig.2)

$$\varphi_c^2 = \frac{A}{1 - (1-A)t^2} \quad (8)$$

donde $t = \tanh [k/(1-A)^{1/2} (x-x_0)]$.

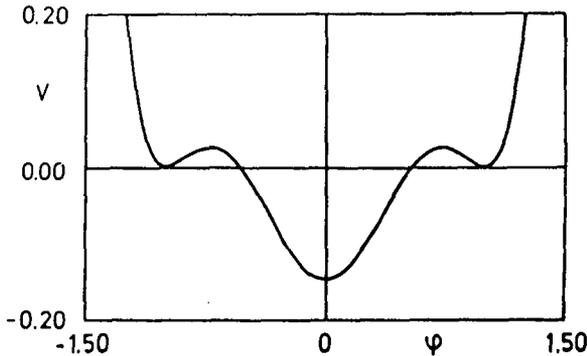


Fig. 1: Potencial clásico $V(j)$ para el caso $A=0,3$.

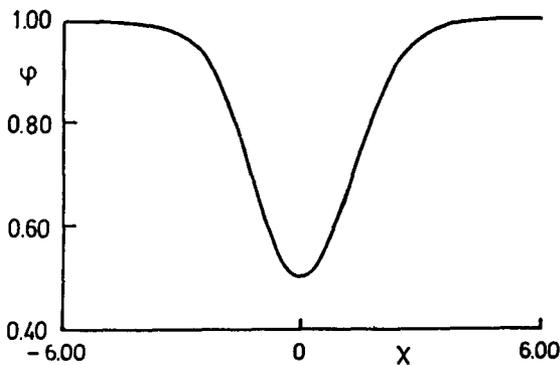


Fig.2: Burbuja en el pozo de la derecha centrada en $x_0=0$

Reemplazando esta solución en (7) obtenemos la

energía clásica de la burbuja

$$E = \frac{k}{8\lambda^{2/3}} [2(2+A)(1-A)^{1/2} - A(4-A) \ln \frac{1+(1-A)^{1/2}}{1-(1-A)^{1/2}}] \quad (9)$$

Para analizar la estabilidad desde el punto de vista clásico, consideramos una solución dependiente del tiempo, que se aparte poco de la solución estática, es decir reemplazamos

$$\varphi(x,t) = \varphi_c(x) + \psi(x) \exp i\omega t \quad (10)$$

en la ecuación de movimiento dependiente del tiempo

$$\square\psi + V'(\varphi) = 0.$$

A primer orden en ψ se obtiene

$$[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V''(\varphi_c(x))] \psi(x) = \omega^2 \psi \quad (11)$$

Esta ecuación de autovalores tiene una solución con ω imaginario, lo que indica que la burbuja es inestable. Esto es así ya que por invariancia traslacional $\varphi'_c(x)$ es solución de (11) con autovalor cero y es evidente que al tener un nodo no puede ser el estado fundamental.

3. EL POTENCIAL EFECTIVO: RUPTURA DE SIMETRIA.

Para evaluar el efecto de las correcciones cuánticas en la posición del vacío usamos el método del potencial efectivo³. Este puede definirse por su desarrollo de Taylor

$$V_{ef}(\varphi) = \sum_n \frac{\varphi^n}{n!} \Gamma^{(n)}(0, \dots, 0) \quad (12)$$

donde $\Gamma^{(n)}(0, \dots, 0)$ es la suma de todas las funciones de Green irreducibles con n patas externas a impulso nulo.

El mínimo del potencial efectivo así definido nos permite hallar el valor de expectación en el vacío del campo φ . Para calcularlo hacemos un desarrollo en lazos, que es equivalente a un desarrollo en potencias de λ y obtenemos⁴, a primer orden

$$V_{ef} = \frac{V(\varphi)}{\lambda} + \frac{V''(\varphi)}{8\pi} \left\{ 1 + \ln \left[\frac{\Gamma^2}{V''(\varphi)} \right] \right\} + A_1 + B_1 \varphi^2 + C_1 \varphi^4 \quad (13)$$

donde Γ es un cut-off introducido para hacer la integral en el espacio de impulsos. Separando la parte divergente cuando el cut-off tiende a infinito

$$V_{ef} = \frac{V}{\lambda} + \frac{V''}{8\pi} \left\{ 1 - \ln \frac{V''}{\mu^2} \right\} + \frac{V''}{8\pi} \ln \frac{\Gamma^2}{\mu^2} + A_1 + B_1 \varphi^2 + C_1 \varphi^4 \quad (14)$$

Elegimos la parte infinita de A_1 , B_1 y C_1 de modo que se cancele la parte divergente. La parte finita de A_1 no es importante. Quedan los parámetros B_1 , C_1 y $\ln(\mu^2)$, dos de los cuales son independientes y deberán ser fijados por las condiciones de renormalización. Los reemplazamos por $\ln(\mu_1^2)$ y $\ln(\mu_2^2)$

$$V_{ef} = \frac{V(\varphi)}{\lambda} + \frac{V''(\varphi)}{8\pi} \left\{ 1 - \ln \frac{V''(\varphi)}{\mu_1^2} \right\} + \frac{15}{8\pi} \varphi^4 \ln \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} \quad (15)$$

El mínimo lateral en el potencial efectivo se desplaza a $\langle \varphi \rangle = 1 + \varepsilon$.

Para encontrar ε imponemos la condición $V'_{ef}(\varphi = \langle \varphi \rangle) = 0$ y así obtenemos

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{8\pi} \left\{ \frac{3(3-A)}{1-A} \ln \left[\frac{4(1-A)}{u_1^2} \right] - \frac{15}{1-A} \ln \left(\frac{u_2^2}{u_1^2} \right) \right\} \quad (16)$$

donde hemos reemplazado $u_1^2 = u_1^2/k^2$ para trabajar con parámetros adimensionales.

Podemos comparar ahora el valor del potencial en el mínimo central $\varphi=0$ con el valor en $\varphi = \langle \varphi \rangle = 1 + \varepsilon$

$$\frac{1}{k^2} V_{ef}(\varphi=0) = -\frac{A}{2\lambda} + \frac{1+2A}{8\pi} \left\{ a - \ln \left[\frac{1+2A}{u_1^2} \right] \right\} \quad (17)$$

$$\frac{1}{k^2} V_{ef}(\varphi=1+\varepsilon) = \frac{4(1-A)}{8\pi} \left\{ 1 - \ln \left[\frac{4(1-A)}{u_1^2} \right] \right\} + \frac{15}{8\pi} \ln \frac{u_2^2}{u_1^2} \quad (18)$$

Llamamos λ_c al valor de λ para el cual los dos mínimos son iguales

$$\frac{A}{2\lambda_c} = \frac{1+2A}{8\pi} \left\{ 1 - \ln \left(\frac{1+2A}{u_1^2} \right) \right\} - \frac{4(1-A)}{8\pi} \left\{ 1 - \ln \left[\frac{4(1-A)}{u_1^2} \right] \right\} + \frac{15}{8\pi} \ln \left(\frac{u_2^2}{u_1^2} \right) \quad (19)$$

Esto nos define una zona de parámetros donde la tendencia de las correcciones cuánticas es hacia la

ruptura de simetría, que es la zona donde λ_c es positivo (Ver Fig.3). Como λ debe ser positivo, si de (19) se obtiene $\lambda_c < 0$ entonces no es posible para esos valores de los parámetros que los dos mínimos sean iguales.

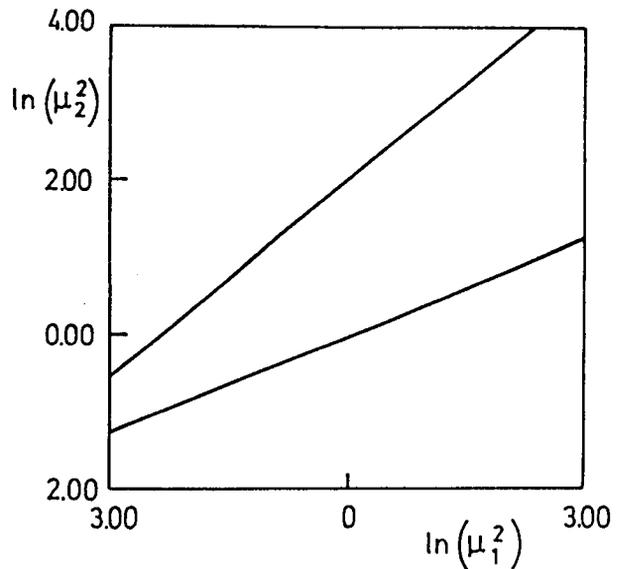


Fig. 3: $\ln(u_2^2)$ vs. $\ln(u_1^2)$ para $A=0,3$. La recta superior corresponde a $\lambda_c = \infty$ y la inferior a $\varepsilon=0$. La inversa de λ_c aumenta linealmente con la distancia de la recta $\lambda_c = \infty$ por debajo de la cual $\lambda_c > 0$.

En el potencial efectivo, uno de cuyos ejemplos se muestra en la Fig. 4, tenemos cuatro parámetros que debemos determinar: u_1^2 , u_2^2 , A y λ .

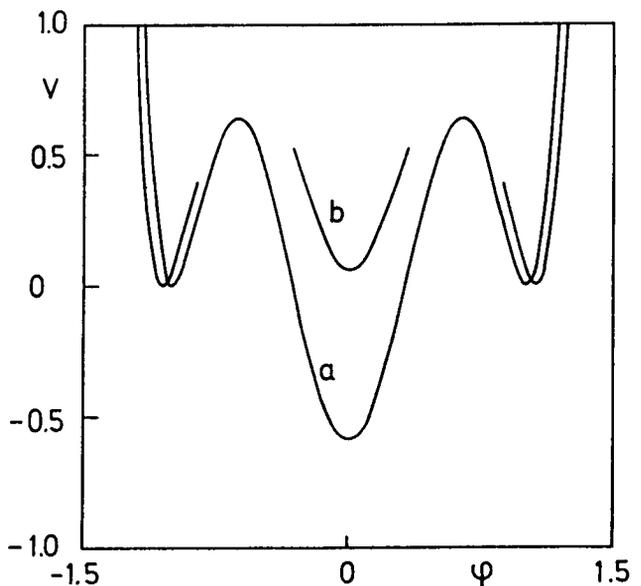


Fig. 4: Ejemplo de (a) Potencial Clásico y (b) Potencial efectivo.

En nuestro caso debe ser $0 < A < 1$ y λ pequeño para que sea válido el desarrollo.

Para obtener los valores de la masa y la constante de acoplamiento cuártica renormalizadas, evaluamos la correspondiente derivada del potencial efectivo en el mínimo³

$$m_R^2 = V''_{ef} |_{\varphi = \langle \varphi \rangle}, \alpha_R = V''''_{ef} |_{\varphi = \langle \varphi \rangle} \quad (20)$$

En la Ref.(4) se analiza el caso $-1/2 < A < 0$, que corresponde a un potencial con un mínimo relativo en $\varphi=0$ y dos mínimos absolutos en $\varphi=\pm 1$. Para determinar μ_1^2 y μ_2^2 se toma la condición que la masa renormalizada y la constante de acoplamiento renormalizada dadas por (20) con $\langle \varphi \rangle = 0$ no tengan correcciones a primer orden, es decir que coincidan con las del potencial clásico. De allí resulta que el potencial efectivo tiene el mínimo absoluto en $\varphi = 0$ para $\lambda > \lambda_c$, y se produce el restablecimiento dinámico de la simetría.

Si permitimos que la masa y la constante de acoplamiento tengan correcciones a primer orden en λ , podemos obtener ruptura de simetría en el caso $0 < A < 1$, que clásicamente tiene el mínimo absoluto central. Por ejemplo, para fijar μ_1^2 y μ_2^2 pedimos que el corrimiento ϵ del mínimo lateral sea cero, lo que nos da una condición sobre μ_1^2 y μ_2^2 (Ec.(16)); cumpliendo esta condición, podemos elegir μ_1^2 y μ_2^2 de manera que λ_c dado por (19) sea tan pequeño como se quiera (Ver Fig.3). Una vez fijados μ_1^2 y μ_2^2 para cumplir las condiciones $\epsilon=0$ y λ_c pequeño, nos quedan m_R^2 y α_R en función de λ y A . Un λ pequeño (pero mayor que λ_c) y un valor de A nos dan valores determinados de m_R^2 y α_R usando (20). Con estos valores el potencial efectivo presenta ruptura de simetría.

Naturalmente será necesario utilizar también otros métodos para comprobar la validez de la aproximación del potencial efectivo.

4. LA BURBUJA PUEDE NO DECAER.

Si la burbuja está ubicada en el vacío estable, la única manera de decaer sería desintegrándose en mesones de este vacío. Para esto, su energía debe ser necesariamente mayor que la masa de los mesones, para que se conserve la energía en el proceso de decaimiento.

La masa de los mesones es

$$m = \partial^2 \tilde{V} / \partial \varphi^2 |_{\varphi = \rho^{1/2}} = 2k(1-A)^{1/2} / \lambda^{1/3} \quad (21)$$

Definimos $\lambda_{E=m}$ como el λ para el cual la energía de la burbuja dada por (9) es igual a la masa dada por (21); entonces

$$\lambda_{E=m} = \frac{1}{16^3} \left\{ 2(2+A) - \frac{A(4-A)}{\sqrt{1-A}} \ln \left(\frac{1+\sqrt{1-A}}{1-\sqrt{1-A}} \right) \right\}^3 \quad (22)$$

Si λ es mayor que $\lambda_{E=m}$ entonces $E < m$ y la burbuja no puede decaer tal como puede verse en la Fig.5.

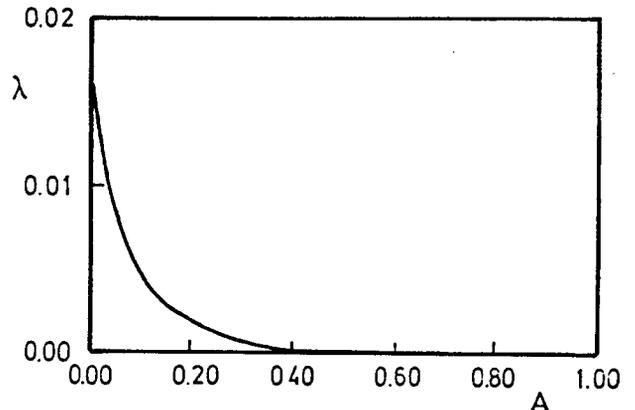


Fig. 5: Valores de λ para energía de burbuja igual a masa de mesón.

Esta condición para la estabilidad de la burbuja es de naturaleza semicuántica, debiendo un tratamiento más preciso contener la comparación de la energía de punto cero por encima de la energía clásica del solitón con la energía de punto cero por encima del vacío.

REFERENCIAS

1. R.Friedberg, T.D.Lee y A.Sirlin, Phys.Rev. D 13, 2739 (1976)
2. D. Boyanovsky y L. Masperi, Phys. Rev. D 21, 1550 (1980); I. Barashenkov y V.Barashenkov, Phys. Lett. A 128, 52 (1988); L.Masperi, Phys. Rev. D 41, 3263 (1990).
3. K. Huang, Quarks, Leptons and Gauge Fields, World Scientific Pu., Singapur (1982).
4. R.Rajaraman, Phys. Rev. D 23, 2399 (1981).