FORMALISMO BRST MODIFICADO PARA SISTEMAS DINAMICOS CON VINCULOS DE SEGUNDA CLASE

R. Montemayor * y M. Vukelic
Centro Atómico Bariloche e Instituto Balseiro
Comisión Nacional de Energía Atómica y Universidad Nacional de Cuyo.
C.C. 439 (8400) San Carlos de Bariloche.

Analizamos en un caso simple un enfoque BRST para sistemas dinámicos con vínculos de segunda clase, basado en un espacio fase ampliado con vínculos de primera clase intermedios. De él se deriva un esquema directo que sólo involucra a los vínculos originales. Se generaliza este último y se establece un formalismo BRST que evita una reducción dimensional o un álgebra intermedia de primera clase, y que es aplicabale a un álgebra de segunda clase arbitraria.

1 - INTRODUCCION

Recientemente ha suscitado interés la aplicación del formalismo BRST[1] a sistemas dinámicos con vínculos de segunda clase. En este contexto se lo ha planteado en diferentes formas. Las aplicaciones más directas se basan en una reducción dimensional, ya sea utilizando el método de Dirac para eliminar los vínculos de segunda clase [2], o considerando la mitad de los vínculos como fuertės, de forma que los restantes den lugar a un álgebra de primera clase[3]. Pero estos enfoques tienen inconvenientes, en particular si los paréntesis de Poisson generalizados dependen de los grados de libertad del sistema.

Para desarrollar un formalismo BRST consistente para sistemas de segunda clase, el uso explícito a nivel BRST del conjunto completo de vínculos parece muy conveniente. En este sentido existen el formalismo de Fradkin y Batalin [4], una construcción formalmente consistente pero de díficil implementación y el de Marnelius [5], una generalización directa del método BRST para álgebras de segunda clase, aunque no de aplicación general. Otras construcciones posibles se dan en Ref.[6].

El propósito de este trabajo es presentar un esquema a nivel clásico que permite pasar directamente de una teoría arbitraria con vínculos de segunda clase a una formulación BRST, evitando el uso de una teoría de primera clase intermedia o el método de Dirac. La motivación del enfoque se da en el contexto de un caso simple, donde la matriz de los paréntesis de Poisson de los vínculos es constante, presentado en la Sección 2. En la Sección 3 planteamos el forma-lismo BRST modificado construido sobre los resultados precedentes, basado en un generador no-nilpotente que contiene sólo los vínculos originales. En ambos casos mostramos la equivalencia débil de la teoría resultante con la generada por el método de Dirac.

Por razones de simplicidad consideraremos sistemas con un número finito de grados de libertad, pero los resultados pueden generalizarse a la teoría de campos.

2 - BRST PARA VINCULOS DE SEGUNDA CLASE: UN CASO SIMPLE

Consideremos el espacio-fase correspondiente a las variables canónicas (p_i,q^i) (i=1,2,...,n) (con número de Grassmann ε_i y número fantasma g_i=0), y un sistema dinámico definido en tal espacio por el hamiltoniano $H_0(p_i,q^i)$ con $2m$ ($m<n$) vínculos de segunda clase $X_\alpha(p_i,q^i)$ (con signatura Grassmann y de fantasma ε_α y g_α=0). H_0 y X_α satisfacen las siguientes relaciones:

$$[X_\alpha, X_\beta] = W_{\alpha\beta} \tag{1}$$

$$[X_\alpha, H_0] = X_\gamma V^\gamma{}_\alpha \tag{2}$$

Aquí nos restringiremos a $W_{\alpha\beta}$ constante. En este caso podemos introducir un espacio-fase ampliado, complementando el original con un conjunto de $2m$ variables independientes $\phi^\alpha(\varepsilon(\phi^\alpha))=\varepsilon_\alpha)$. Esto nos per-

* Investigador CONICET

mite definir a partir de la teoría original una nueva, usando un conjunto de transformaciones con X_α como generadores, tal que cada vínculo genera una órbita parametrizada por ϕ^α. Si A es una variable dinámica, se transforma según:

$$A \rightarrow A' = A + [A,\chi_\gamma]\,\phi^\gamma + 1/2!\,[[A,\chi_{\gamma_2}],\chi_{\gamma_1}]\,\phi^{\gamma_1}\phi^{\gamma_2} + \dots \tag{3}$$

Es inmediato encontrar un álgebra para $\{\phi^\alpha\}$ tal que los vínculos transformados pasen a ser de primera clase. Si

$$[\phi^\alpha, \phi^\beta] = W^{\alpha\beta}(-1)^\beta \tag{4}$$

con

$$W^{\alpha\beta}\, W_{\beta\sigma} = \delta^\alpha_\sigma \tag{5}$$

tenemos para las constantes transformadas:

$$[\chi'_\alpha, \chi'_\beta] = 0 \tag{6}$$

$$[\chi'_\alpha, H'] = 0 \tag{7}$$

donde

$$\chi'_\alpha = \chi_\alpha + W_{\alpha\beta}\phi^\beta \tag{8}$$

y

$$H' = H_0 + \sum_{N=1}^{\infty} 1/N!\, H_{\gamma_N \dots \gamma_1}\phi^{\gamma_1}\phi^{\gamma_2}\dots\phi^{\gamma_N} \tag{9}$$

con

$$H_{\gamma_N\gamma_{N-1}\dots\gamma_1} = [\,\dots[H_0, \chi_{\gamma_N}], \chi_{\gamma_{N-1}}], \dots], \chi_{\gamma_1}]. \tag{10}$$

Así hemos mapeado el sistema original con vínculos de segunda clase en uno equivalente con vínculos de primera clase. Nótese que los paréntesis de Poisson de las variables transformadas son equivalentes a los paréntesis de Dirac de las originales. La nueva caracterización está dada por el hamiltoniano:

$$H = H' + \chi'_\alpha\,\lambda^\alpha, \tag{11}$$

donde los $\{\lambda^\alpha\}$ son multiplicadores de Lagrange (con sus momentos canónicos conjugados π^α que satisfacen las relaciones de vínculo π^α=0). Esta última teoría nos permite aplicar el formalismo BRST usual, introduciendo un par canónico de fantasmas $(\bar{P}_\alpha, C^\alpha)$ por cada vínculo de primera clase X'_α $(gh(C^\alpha) = -gh(\bar{P}_\alpha)=1,\ \varepsilon(C^\alpha)=\varepsilon(\bar{P}_\alpha)=\varepsilon_\alpha+1)$:

$$[C^\alpha, \bar{P}_\beta] = \delta^\alpha_\beta, \tag{12}$$

y un par correspondiente $(P_\alpha, \bar{C}^\alpha)$ por cada π_α $(gh(\bar{C}_\alpha) = -gh(P^\alpha)=-1,\ \varepsilon(\bar{C}_\alpha)=\varepsilon(P^\alpha)=\varepsilon_\alpha+1)$

$$[P^\alpha, C_\beta] = \delta^\alpha{}_\beta\,. \tag{13}$$

El generador BRST es:

$$\Omega_{BRST} = \chi'_\gamma\, C^\gamma + \pi_\gamma P^\gamma \tag{14}$$

y el hamiltoniano invariante correspondiente:

$$H_{BRST} = H' + \chi'_\gamma\,\lambda^\gamma + \bar{P}_\gamma P^\gamma + [\Omega_{BRST}, \rho], \tag{15}$$

donde ρ es una función fermiónica arbitraria. Aprovechando esta arbitrariedad, podemos eliminar las variables introducidas para pasar de un álgebra de segunda clase a un álgebra de primera clase o sea ϕ^α, λ^α y π_α. Para lograr esto elegimos:

$$\rho = -\bar{P}_\alpha\,\lambda^\alpha + \rho' \tag{16}$$

El primer término cancela la dependencia de H_{BRST} en $\lambda^\alpha, \pi_\alpha$ y los fantasmas asociados P^α, C_α. Expandiendo ahora ρ' en serie de potencias de ϕ^α, tenemos:

$$\rho' = \bar{P}_\beta \sum_{\upsilon=0}^{N} \rho^\beta_{\gamma_\upsilon \dots \gamma_1}\phi^{\gamma_1}\cdots\phi^{\gamma_\upsilon}, \tag{17}$$

y reemplazando las Ecs.(16-17) en la Ec.(15), se puede establecer un conjunto de ecuaciones que deben satisfacerse para eliminar ϕ^α de H_{BRST}, cuya solución es:

$$\rho^\beta = -w^{\beta\gamma_1}\,[\chi_{\gamma_1}, H_0] + 1/2!\, w^{\beta\gamma_1}\,\chi_\sigma\, w^{\sigma_1\gamma_2} \times$$

$$\times [\chi_{\gamma_2}, [\chi_{\gamma_1}, H_0]] + \frac{(-1)^{N-1}}{(N-1)!}\, w^{\beta\gamma_1}\,\chi_\sigma\, w^{\sigma_1\gamma_2}\,\chi_{\sigma_2}\dots$$

$$w^{\sigma_{N-2}\gamma_{N-1}}\,[\chi_{\gamma_{N-1}}, [\dots,[\chi_{\gamma_1}, H_0]\dots]]$$

$$\rho^\beta_{\gamma_1} = 1/2!\, w^{\beta\gamma_2}\,[\chi_{\gamma_2}, [\chi_{\gamma_1}, H_0]] -$$

$$-1/3!\, w^{\beta\gamma_2}\, \chi_{\sigma_1} w^{\sigma_1\gamma_3}\, [\chi_{\gamma_3},[\chi_{\gamma_2},[\chi_{\gamma_1},H_0]]]+$$

$$\ldots + \frac{(-1)^{N-1}}{(N-1)!} w^{\beta\gamma_2}\, \chi_{\sigma_1} \ldots w^{\sigma_{N-3}\gamma_{N-1}}\, [\chi_{\gamma_{N-1}},[\ldots,[\chi_{\gamma_1},H_0]\ldots]]$$

$$\rho^{\beta}_{\gamma_{N-2}\ldots\gamma_1} = \frac{(-1)^{N-1}}{(N-1)!} w^{\beta\gamma_{N-1}}\, [\chi_{\gamma_{N-1}},[\ldots,[\chi_{\gamma_1},H_0]\ldots]] \tag{18}$$

$$\rho^{\beta}_{\gamma_\upsilon\gamma_{\upsilon-1}\ldots\gamma_1} = 0 \qquad u \geq N-1$$

Por lo tanto si reemplazamos el ρ' resultante de estas expresiones en el hamiltoniano (15), obtenemos:

$$H_{BRST} = H_0 + \chi_\sigma \rho^\sigma \tag{19}$$

Todo observable BRST puede ponerse en esta forma usando tal arbitrariedad. Así el paréntesis de Poisson de cualquier par de variables dinámicas $[A\,,B]_{PB}$ en esta nueva formulación es debilmente equivalente al paréntesis de Dirac de las variables correspondientes en la original ($[A_0\,,B_0]_{DB}$):

$$[A\,,B]_{PB} = [A_0\,,B_0]_{DB} + \chi_\sigma\ \mathcal{F}^\alpha \tag{20}$$

$\mathcal{F}^\alpha$ es una función de las coordenadas del espacio-fase extendido. Esta última relación muestra la equivalencia de este método con el de Dirac.

Un hecho importante es que al cancelar la dependencia en ϕ^α, $\bar{P}_\alpha$ y C^α son también eliminados automáticamente. Así podemos desacoplar todas las variables relacionadas con la transición de un álgebra de segunda clase a un álgebra de primera. La carga Ω permanece inalterada, pero podemos eliminar la parte que actúa sobre las variables desacopladas y mantener sólo la componente relevante Ω. De esta forma obtenemos un formalismo BRST generalizado equivalente caracterizado por:

$$\tilde{\Omega} = \chi_\alpha C^\alpha,$$

$$[\tilde{\Omega}\,,\tilde{\Omega}] = C^\alpha w_{\alpha\beta} C^\beta \quad ,$$

$$\tilde{H} = H_0 + \chi_\sigma \rho^\sigma + [\tilde{\Omega}\,,\tilde{\rho}] \quad ,$$

$$[\tilde{H}\,,\tilde{\Omega}] = 0 \quad . \tag{21}$$

Nótese que esta estructura algebraica es igual a la postulada por Mamelius[5]. En lo que sigue desarrollaremos una generalización aplicable a un álgebra de vínculos de segunda clase arbitraria.

3 - GENERALIZACION PARA UN ALGEBRA GENERAL DE VINCULOS DE SEGUNDA CLASE

En esta sección vamos a generalizar la estructura algebraica previa para un álgebra de segunda clase dada por:

$$[X_\alpha\,, X_\beta] = F_{\alpha\beta}(p,q) + X_\gamma U^{\gamma}_{\alpha\beta}(p\,,q)\,. \tag{22}$$

El primer paso es construir un operador $\bar{\Omega}$ que satisface las siguientes propiedades:

i) $\varepsilon(\bar{\Omega}) = 1$

ii) $gh(\bar{\Omega}) = 1$

iii) $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_\alpha C^\alpha = T_\alpha C^\alpha + \ldots$

iv) $[\bar{\Omega}\,,\bar{\Omega}] = C^\alpha W_{\alpha\beta} C^\beta$.

En el método de Mamelius[5] los $W_{\alpha\beta}$ se identifican con los $F^{\gamma}_{\alpha\beta}$ y los factores $U^{\gamma}_{\alpha\beta}$ son considerados constantes. Aquí desarrollaremos un formalismo general, válido para $U_{\alpha\beta}$ arbitrarios. Para lograr esto, consideraremos que los $W_{\alpha\beta}$ son las componentes de una matriz constante regular antisimétrica, como en la sección precedente, pero por lo demás arbitraria. Debido a la existencia de las funciones $F_{\alpha\beta}$ y $U^{\gamma}_{\alpha\beta}$, los fantasmas introducidos en la Sección 2 no son suficientes. Ahora necesitamos un par adicional de variables (η_α, ζ^α) por cada vículo, que satisfacen:

$$gh(\eta_\alpha) = gh(\zeta^\alpha) = 0$$

$$\varepsilon(\eta_\alpha) = \varepsilon(\zeta^\alpha) = \varepsilon_\alpha \tag{23}$$

$$[\zeta^\alpha\,,\eta_\beta] = \delta^\alpha_\beta$$

El operador $\bar{\Omega}_\alpha$ puede expresarse como suma de tres términos:

$$\bar{\Omega}_\alpha = X_\alpha + \Phi_\alpha(p,q,\eta,\zeta) + \Lambda_\alpha(p,q,\eta,\zeta,C,P) \quad , \tag{24}$$

donde Φ_α está relacionado con la presencia de $F_{\alpha\beta}(p,q)$, y los Λ_α son necesarios para cerrar el álgebra de los vínculos (ver Ec.(29)). Más explícitamente:

$$\bar{\Omega}=T_\alpha C^\alpha+\sum_{\substack{N=0\\N+M\neq 0}}^{\infty}\sum_{M=0}^{\infty}1/N!\;1/M!\;\eta_{\gamma_N}\ldots\eta_{\gamma_1}V^{\gamma_1\ldots\gamma_N}_{\alpha,\delta_M\ldots\delta_1}\zeta^{\delta_1}\ldots\zeta^{\delta_M}C_\alpha+$$

$$+\sum_{N=1}^{\infty}S^{\alpha_1\ldots\alpha_N}_{\beta_1\ldots\beta_{N+1}}P_{\alpha_N}\ldots P_{\alpha_1}\;U^{\alpha_1\ldots\alpha_N}_{\beta_{N+1}\ldots\beta_1}C^{\beta_1}\ldots C^{\beta_{N+1}} \tag{25}$$

donde

$$U^{\alpha_1\ldots\alpha_N}_{\beta_{N+1}\ldots\beta_1}=\sum_{\substack{n=0\\m=0}}^{\infty}1/n!\;1/m!\;\eta_{\gamma_n}\ldots\eta_{\gamma_1}\,\mathrm{x}$$

$$\mathrm{x}\;U^{\alpha_1\ldots\alpha_N,\gamma_1\ldots\gamma_n}_{\beta_{N+1}\ldots\beta_1,\delta_m\ldots\delta_1}\zeta^{\delta_1}\ldots\zeta^{\delta_m}\;\mathrm{x} \tag{26}$$

$$\mathrm{x}\;N!\;M!\;\;S^{\alpha_1\ldots\alpha_N}_{\beta_1\ldots\beta_M}=(-1)^{\varepsilon^{\alpha_1\ldots\alpha_N}_{\beta_1\ldots\beta_M}}, \tag{27}$$

$$\varepsilon^{\alpha_1\ldots\alpha_N}_{\beta_1\ldots\beta_M}=\sum_{i=2}^{N}\sum_{j=i}^{N}\varepsilon_{\alpha_j}+\sum_{i=2}^{M}\sum_{j=i}^{M}\varepsilon_{\beta_j}. \tag{28}$$

Estamos siguiendo la notación de Ref.[4]. Las primeras tres propiedades ((*i*),(*ii*),(*iii*)) se satisfacen automáticamente. Reemplazando la expansión (25) en la relación (*iv*) se obtiene un conjunto de ecuaciones que determinan los coeficientes *U* y *V* en términos del álgebra de vínculos. Por ejemplo, para los primeros tenemos:

$$[T_\alpha\,,T_\beta]+(-1)^{\beta\alpha+1}\,2\,V_{\beta,\delta}\,V^{\delta}_{\alpha}-T^{\gamma}_{\gamma}U_{\alpha\beta}=W_{\alpha\beta}$$

$$[T_\alpha\,,V_\beta]+1/2\,(-1)^{\gamma(\sigma+\alpha)+1}T_\sigma\,U^{\sigma,\gamma}_{\alpha\beta}+(-1)^{\alpha(\beta+\gamma)+1}\,V^{\gamma}_{\beta,\delta}V^{\delta}_{\alpha}+$$

$$+\;1/2\,(-1)^{\alpha\gamma+1}V^{\gamma}_{\sigma}\,U^{\sigma}_{\alpha\beta}+V_{\alpha,\delta}\,V^{\delta\gamma}_{\beta}=0$$

$$[T_\alpha\,,V_{\beta,\delta}]-1/2\,T_\sigma\,U^{\sigma}_{\alpha\beta,\delta}+V_{\alpha,\rho}\,V^{\rho}_{\beta,\delta}+$$

$$+\;1/2\,(-1)^{\delta(\alpha+\beta+\sigma)+1}\,V_{\sigma,\delta}\,U^{\sigma}_{\alpha\beta}+(-1)^{\alpha(\beta+\delta)+1}\,V_{\beta,\delta\gamma}\,V^{\gamma}_{\alpha}=0 \tag{29}$$

Como último paso resta construir el hamiltoniano que debe satisfacer:

$$[\bar{H}_{BRST},\bar{\Omega}]=0 \tag{30}$$

Esta ecuación implica que tiene la misma estructura que el hamiltoniano (19), la diferencia fundamental radica en que en lugar de los X_α aparecen los $\bar{\Omega}_\alpha$:

$$\bar{H}_{BRST}=H_0-\bar{\Omega}_\beta\,w^{\beta\gamma_1}\,[\bar{\Omega}_{\gamma_1},H_0]+$$

$$1/2!\;\bar{\Omega}_\beta\,w^{\beta\gamma_1}\;\bar{\Omega}_\sigma\,w^{\sigma_1\gamma_2}\;[\bar{\Omega}_{\gamma_2},[\bar{\Omega}_{\gamma_1},H_0]]+\ldots \tag{31}$$

En la Sección 2 probamos que si $w_{\alpha\beta}$ es constante este formalismo es equivalente al de Dirac. Cuando $w_{\alpha\beta}$ no es constante hemos introducido un nuevo operador $\bar{\Omega}$ con las mismas propiedades algebraicas que Ω. Por el teorema de Darboux podemos hacer localmente $w_{\alpha\beta}$ constante, en cuyo caso los coeficientes U y V se hacen (localmente) nulos y las funciones dinámicas bosónicas toman la forma dada por la Ec.(19). Así este nuevo formalismo es localmente equivalente al de Dirac para la teoría original. En esta forma tenemos un formalismo BRST generalizado equivalente que involucra sólo el conjunto original de vínculos de segunda clase.

REFERENCIAS

1.- I.V.Tyutin, Lebedev preprint 39 (1975). C.Becchi, A.Rouet and R.Stora, Ann. Phys. (N.Y.) 98 (1976) 287 M. Henneaux, Phys. Rep. 126, 1, (1985) 1.
2.- E.S.Fradkin and T.E. Fradkina, Phys. Lett. B72 (1978) 343.
3.- D.Nemeschansky, C.Preitschopf, and M.Wenstein
4.- I. A. Batalin and E. S. Fradkin, Nucl. Phys. B279 (1987) 529.
5.- M.Marnelius, Nucl. Phys. B294 (1987) 685.
6.- L.D.Faddeev and S.L.Shatashvili, Phys. Lett. 167B (1986)225. A.Niemi, Phys. Lett. B213 (1988) 41. L.Masperi and R. Montemayor, Mod. Phys. Lett. A4 (1989) 953.
7.- R.Casalbuoni, Nuovo Cim. 33A (1976) 115; Nuovo Cim. 33A (1976) 389.
8.- M.Marnelius, Nucl. Phys. B294 (1987) 671.