UN FORMALISMO BRST PARA LAS DINAMICAS CUANTICA Y CLASICA.

C. D.Fosco* y R.Montemayor**

Centro Atómico Bariloche e Instituto Balseiro. Comisión Nacional de Energía Atómica y Universidad Nacional de Cuyo, C.C. 439, 8400 San Carlos de Bariloche.

En base a una formulación con integrales funcionales en un espacio expandido con variables de Grassmann, se construye un formalismo BRST para la dinámica cuántica y se muestra cómo el correspondiente a la dinámica clásica puede considerarse como un caso particular del primero. En ambos sectores de la teoría el formalismo introducido hace explícita la estructura topológica del espacio de configuración.

1 - INTRODUCCION

En el presente trabajo desarrollamos una aplicación del formalismo BRST a la mecánica cuántica, que permite hacer explícita junto con la dinámica cuántica la topología del espacio de configuración. Este formalismo se inspira en desarrollos recientes en la formulación de la mecánica clásica por medio de integrales funcionales[1].

La representación por medio de integrales funcionales de la mecánica clásica es esencialmente la reformulación desde la perspectiva de una generatriz funcional del enfoque operatorial propuesto por Koopman[2] y von Neuman[3]. Una característica muy interesante de esta formulación es la aparición de una simetría BRST que mezcla las variables originales con grados de libertad tipo fantasma. El origen de esta simetría radica en la inserción de la integral funcional sobre las trayectorias en el espacio de configuración, que fuerzan una simetría de calibre inexistente en la teoría original (invariancia ante transformaciones locales de las óbitas). Así resulta que lo que en realidad describe esta teoría de BRST no es en particular el sistema dinámico original sino, globalmente, la mecánica clásica en el espacio de configuración correspondiente, o sea contiene a todos los sistemas dinámicos definidos en dicho espacio. Más precisamente, es una teoría topológica donde el lagrangiano es una pura fijación de calibre. El formalismo BRST simplemente pone en evidencia la topología del espacio de configuración, independientemente del sistema patrticular que se considere.

La teoría cuántica presenta una diferencia muy importante con respecto a la clásica: en esta última sólo contribuyen los extremales en la acción, mientras que en la primera lo hacen todas las órbitas posibles en el espacio de configuración, cada una con un peso dado por la acción evaluada sobre dicha órbita. En otras palabras, en la teoría cuántica existe una simetría de calibre inherente a las transformaciones locales de las órbitas, que puede hacerse explícita y utilizarse para construir una formulación BRST. Esta nueva teoría, a diferencia del caso clásico, contendrá en forma no trivial a la dinámica cuántica original y, además, por efecto específico de la extensión BRST explicitará la topología del espacio de configuración.

El esquema de trabajo es el siguiente. En la Sección 2 presentamos un replanteo del formalismo clásico para hacer evidente el origen de la simetría de calibre y el contenido puramente topológico del formalismo resultante. A continuación, en la Sección 3, desarrollamos el planteo general del formalismo BRST cuántico y su relación con la estructura topológica del espacio de configuración. Finalmente en la sección 4 presentamos un ejemplo donde se manifiesta esta relación.

2 - LA MECANICA CLASICA DE BRST

Por razones de sencillez y claridad, vamos a considerar un sistema de primer orden en un espacio de configuración n dimensional, definido por el campo

* Becario CONICET

** Investigador CONICET

de velocidades:

$$\dot{x}^a = f^a(x,t) \tag{2.1}$$

Esta dinámica se puede describir en términos de un lagrangiano

$$L = b_a(\dot{x}^a - f^a) \tag{2.2}$$

La dinámica de los grados de libertad auxiliares b_a estárelacionada con la de los campos de Jacobi δ^a($\delta^a \equiv$ x^a-x^a,donde x^a y x^a satisfacen las ecuaciones de Euler -Lagrange de (2.2), de modo que:

$$b_a \delta^a = \text{cte. de movimiento} \tag{2.3}$$

Las variables canónicas conjugadas de x^a y b_a son:

$$P_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} = b_a \quad ; \quad \pi^a = \frac{\partial L}{\partial \dot{b}_a} = 0 \tag{2.4}$$

o sea que tenemos dos vínculos de segunda clase:

$$\xi_a = p_a - b_a \quad ; \quad \xi^a = \pi^a \tag{2.5}$$

y el hamiltoniano de Dirac resultante es:

$$H = p_a f^a \tag{2.6}$$

Evidentemente esta teoría no es invariante bajo transformaciones locales de las órbitas. Sin embargo es posible construir en un espacio ampliado una teoría que contenga a la original en el subespacio correspondiente y satisfaga tal simetría. Esto podemos hacerlo sistemáticamente usando el formalismo BRST:

la invariancia bajo $x^a \to x^a + \delta x^a$ (δx^a local arbitrario) implica que los momentos canónicos conjugados p_a deben ser vínculos de primera clase. Para generar tal invariancia introducimos una carga BRST

$$Q = c^a p_a \tag{2.7}$$

donde los c^a son grados de libertad fantasmas, y a partir del hamiltoniano original H construimos uno nuevo:

$$\mathcal{H} = H + \Delta \tag{2.8}$$

tal que Q sea una constante de movimiento:

$$\{\mathcal{H},Q\} = 0 \Rightarrow \{\Delta,Q\} = -\{H,Q\} = c^b p_a \partial_b f^a \tag{2.9}$$

con lo cual resulta:

$$\mathcal{H} = p_a f^a + i\, \bar{c}_a \partial_b f^a c^b \tag{2.10}$$

$\bar{c}_a$ es un nuevo grado de libertad fantasma tal que

$$\{\bar{c}_a, c^b\} = i\, \delta_a^b \tag{2.11}$$

Aparentemenente el hamiltoniano BRST (2.10) está definido por el campo de velocidades f^a, pero es fácil ver que puede expresarse como:

$$\mathcal{H} = \{X,Q\} \tag{2.12}$$

con

$$X = i\, \bar{c}_a f^a \tag{2.13}$$

Esto significa que estamos ante una teoría topológica, que depende únicamente de la topología de la variedad que es el espacio de configuración, y no de un sistema dinámico en particular definido sobre dicha variedad[4]. Los diferentes sistemas dinámicos corresponden a diferentes fijaciones de calibre.

El desarrollo anterior puede replantearse para una teoría lagrangiana de orden arbitrario. En general el lagrangiano BRST resultante tiene la forma:

$$L = b_a(t) \frac{\delta S[x(t)]}{\delta x^a(t)} + \int_0 dt'\, \bar{c}_a(t) \frac{\delta^2 S[x(t)]}{\delta x^a(t)\, \delta x^b(t')} c^b(t')$$

y es estrictamente una nueva variación BRST:

$$L = \delta_{BRST} \left[\frac{\delta S}{\delta x} \right] \tag{2.15}$$

3 - LA MECANICA CUANTICA BRST

En mecánica cuántica, desde el punto de vista de integrales funcionales, es claro que todas las órbitas compatibles con la topología del espacio de configuración contribuyen, a diferencia de la mecánica clásica donde sólo son significativas las órbitas extremales de la acción.

Dado un lagrangiano:

$$L = L(x,\dot{x}) \tag{3.1}$$

para hacer explícita esta simetría de la generatriz funcional consideremos el nuevo lagrangiano:

$$\tilde{L} = L(x+\kappa,\dot{x}+\dot{\kappa}) \tag{3.2}$$

Los lagrangianos (3.1) y (3.2) dan lugar a la misma dinámica cuántica, pero el hessiano de (3.2) tiene un autovalor nulo tal que bajo las transformaciones de Noether:

$$\begin{aligned} \delta x^a &= +\varepsilon^b(t)\, X^a_{\ b}(x,\kappa,\dot{x},\dot{\kappa}) \\ \delta \kappa^a &= +\varepsilon^b(t)\, X^a_{\ b}(x,\kappa,\dot{x},\dot{\kappa}) \end{aligned} \tag{3.3}$$

el lagrangiano es invariante

$$\delta\tilde{L} = 0 \tag{3.4}$$

Las $\varepsilon^b(t)$ son funciones arbitrarias de t y las $X^a_{\ b}$ son funciones arbitrarias de sus argumentos (esto refleja la arbitrariedad en la parametrización de las transformaciones de calibre). Para construir el formalismo BRST hacemos:

$$\varepsilon^a(t) = \rho\, c^a(t) \tag{3.5}$$

donde $c^a(t)$ son fantasmas. Definiendo:

$$\delta = \rho\, \delta_s \tag{3.6}$$

las ecuaciones (3.3) y (3.4) se convierten en:

$$\delta_s x^a = c^b X^a_{\ b} \ ; \ \delta_s \kappa^a = -c^b X^a_{\ b} \ ; \ \delta_s\tilde{L} = 0 \tag{3.7}$$

y además tenemos:

$$\delta_s X^a_b = \frac{\partial X^a_b}{\partial x^c}\,\delta_s x^c + \frac{\partial X^a_b}{\partial \kappa^c}\,\delta_s \kappa^c + \frac{\partial X^a_b}{\partial \dot{x}^c}\,\delta_s \dot{x}^c + \frac{\partial X^a_b}{\partial \dot{\kappa}^c}\,\delta_s \dot{\kappa}^c$$

$$= c^d X^c_d\Big[\frac{\partial X^a_b}{\partial x^c} - \frac{\partial X^a_b}{\partial \kappa^c}\Big] + (\dot{c}^d X^c_d + c^d \dot{X}^c_d)\Big[\frac{\partial X^a_b}{\partial \dot{x}^c} - \frac{\partial X^a_b}{\partial \dot{\kappa}^c}\Big] \tag{3.8}$$

La condición de nilpotencia de la transformación:

$$\delta_s^2 \delta x^a = -\,\delta_s^2 \kappa^a = \delta_s c^b X^a_b - c^b c^d X^c_d \Big[\frac{\partial X^a_b}{\partial \dot{x}^c} - \frac{\partial X^a_b}{\partial \dot{\kappa}^c}\Big] -$$

$$- c^b c^d\Big[X^c_d\Big(\frac{\partial X^a_b}{\partial x^c} - \frac{\partial X^a_b}{\partial \kappa^c}\Big) - \dot{X}^c_{\ d}\Big(\frac{\partial X^a_b}{\partial \dot{x}^c} - \frac{\partial X^a_b}{\partial \dot{\kappa}^c}\Big)\Big] = 0 \tag{3.9}$$

fija la variación de los fantasmas:

$$X^a_{\ b}\, \delta_s c^b = -\Big\{\dot{c}^d X^c_d\Big(\frac{\partial X^a_b}{\partial \dot{x}^c} - \frac{\partial X^a_b}{\partial \dot{\kappa}^c}\Big) +$$

$$+ c^d\Big[X^c_d\Big(\frac{\partial X^a_b}{\partial x^c} - \frac{\partial X^a_b}{\partial \kappa^c}\Big) - \dot{X}^c_{\ d}\Big(\frac{\partial X^a_b}{\partial \dot{x}^c} - \frac{\partial X^a_b}{\partial \dot{\kappa}^c}\Big)\Big\}\, c^b \tag{3.10}$$

Las ecuaciones (3.7) y (3.10) nos dan las transformaciones de los grados de libertad cuando las transformaciones de calibre están parametrizadas con X^a_b.

Pasemos ahora a considerar la forma más general posible para un lagrangiano BRST con un calibre fijado, que pueda ser asociado al lagrangiano $\tilde{L}$ si elegimos una parametrización X para las transformaciones de calibre[5]:

$$\mathcal{L} = \tilde{L} + \delta_s[\bar{c}_a(\psi^a - g^{ac}\, b_c/2)] + d/dt\,(\bar{c}_a\eta^a) =$$

$$= L - g^{ac}\, b_a b_c/2 + b_a\, \psi^a + c_a\, \eta^a + c_a\, \eta^a - c_a\, \delta_s\, \psi^a \tag{3.11}$$

donde $\{\psi^a\}$ es la fijación del calibre, b_a son multiplicadores de Lagrange no lineales (el equivalente a campos de Stückelberg), $\bar{c}_a$ son antifantasmas y η^a es una función con número de fantasma 1 que signa una posible cuasi-invariancia del lagrangiano. Las transformaciones BRST de $\bar{c}_a$ y b_a son:

$$\delta_s \bar{c}_a = b_a \ ; \ \delta_s b_a = 0 \tag{3.12}$$

Si elegimos $\eta^a = 0\ \forall a$ (es decir, el lagrangiano es invariante), los $\bar{c}_a$ son multiplicadores de Lagrange, pero para $\eta^a \neq 0$ (lagrangiano cuasi-invariante) son variables dinámicas.

La variación del lagrangiano ampliado $\mathcal{L}$ es:

$$\delta_s \mathcal{L} = \delta_s\,(\, xL_x + \kappa L_\kappa + cL_c + \bar{c}L_{\bar{c}}) +$$

$$+ \frac{d}{dt}\Big(\delta_s x\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} + \delta_s \kappa\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\kappa}} + \delta_s c\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{c}} + \delta_s \bar{c}\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{c}}}\Big) \equiv$$

$$\equiv \frac{d}{dt}\left(\delta_s (\bar{c}_a \eta^a\right) = \frac{d}{dt}\left(b_a \eta^a + \bar{c}_a \delta_s \eta^a\right) \qquad (3.13)$$

Del primer teorema de Noether obtenemos como constante de movimiento la carga BRST:

$$Q = \delta_s x^a \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} + \delta_s \kappa^a \frac{\partial L}{\partial \dot{\kappa}^a} + \delta_s c^a \frac{\partial L}{\partial \dot{c}^a} + \bar{\delta}_s c_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{c}}_a} -$$

$$- b_a \eta^a - \bar{c}_a \delta_s \eta^a \qquad (3.14)$$

Sin embargo para cada parametrización X existen restricciones sobre las funciones η^a y ψ^a, derivadas de exigir que la teoría sea local y no contenga derivadas de orden superior al segundo. Para garantizar el cumplimiento de estas restricciones debe ser:

$$\frac{\partial \eta^a}{\partial \dot{x}^b} - c^c \frac{\partial X^c_d}{\partial \dot{x}^b} \left(\frac{\partial \psi^a}{\partial \dot{x}^d} - \frac{\partial \psi^a}{\partial \dot{\kappa}^d} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \eta^a}{\partial \dot{x}^b} - c^c \frac{\partial X^c_d}{\partial \dot{x}^b} \left(\frac{\partial \psi^a}{\partial \dot{x}^d} - \frac{\partial \psi^a}{\partial \dot{\kappa}^d} \right) = 0$$

$$(3.15)$$

Definiendo

$$\eta^a = \tilde{\eta}^a_c c^c \qquad (3.16)$$

la solución de este sistema de ecuaciones está dada por:

$$\tilde{\eta}^a_c = \tilde{\eta}^a_c (x, \kappa, X)$$

$$c^c \left(\frac{\partial \psi^a}{\partial x^b} - \frac{\partial \psi^a}{\partial \kappa^b} \right) = c^d \frac{\partial \eta^a_d}{\partial X^b_c} \qquad (3.17)$$

De (3.11, (3.16) y (3.17) resulta que la forma más general para el lagrangiano cuasi-invariante BRST, con una parametrización X de las transformaciones y una fijación de calibre ψ es:

$$L = \tilde{L} - 1/2 \; g^{ab} b_a b_b + b_a \psi^a + \bar{c}_a \left[\left(\frac{\partial \psi^a}{\partial \psi^a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \psi^a}{\partial \dot{\psi}^a} \right) \right] -$$

$$- \left(\frac{\partial \psi^a}{\partial \kappa^b} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \psi^a}{\partial \dot{\kappa}^b} \right) X^b_c c^c + \frac{d}{dt} \left[\bar{c}_a \left(\tilde{\eta}^a_c + \frac{\partial \tilde{\eta}^a_c}{\partial X^b_d} X^b_d \right) c^c \right]$$

$$(3.18)$$

La carga BRST correspondiente está dada por la expresión (3.14).

Si en particular consideramos un lagrangiano invariante BRST ($\tilde{\eta}^a_b = 0$) tenemos:

$$L = \tilde{L} - 1/2 \; g^{ab} b_a b_b + b_a \psi^a - \bar{c}_a \left[\left(\psi^a \right)_{x^b} - \left(\psi^a \right)_{\kappa^b} \right] X^b_c c^c$$

$$(3.19)$$

donde $(\psi^a)_y$ es la derivada lagrangiana de ψ^a con respecto a la coordenada y. Comparando con la expresión (2.14) esta ecuación hace evidente que el formalismo aquí desarrollado para la mecánica cuántica BRST contiene a la mecánica clásica BRST presentada en la Sección 2, que se recupera a partir de la Ec.(3.19) cuando tomamos $\tilde{L}$=O con una fijación de calibre

$$\psi^a = g^{ab} \frac{\delta S[x(t)]}{\delta x^b(t)} \qquad (3.20)$$

y una parametrización

$$X^a_b = -i \, \delta^a_b \qquad (3.21)$$

que corresponde a traslaciones locales en el espacio de configuración. La expresión resultante para el lagrangiano es:

$$L = \tilde{L} \; 1/2 \; g^{ab} b_a b_b + g^{ab} b_a \frac{\delta S[x(t)]}{\delta x^b(t)} -$$

$$-i \int_0^t dt' \, c_a(t) \, g^{ab} \frac{\delta^2 S[x(t)]}{\delta x^b(t) \, \delta x^c(t')} c^c(t') \qquad (3.22)$$

con la carga BRST dada por:

$$Q = c^a \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} = c^a P_a \qquad (3.23)$$

La carga BRST es una combinación lineal de los momentos canónicos conjugados de las coordenadas x^a, y es una manifestación de la invariancia bajo traslaciones característica de un espacio simplemente conexo, donde las transformaciones (3.21) tienen sentido.

4 - EL INDICE DE EULER DEL ESPACIO DE CONFIGURACION

Como un ejemplo del formalismo anterior donde se manifiesta la relación entre la topología del espacio de configuración y la teoría BRST cuántica consideraremos el caso de una teoría descrita por un lagrangiano de la forma:

$$L = 1/2 \sum_{a=1}^{N} (\dot{q}_a)^2 - V(\{q_a\}) \qquad (4.1)$$

definido en un espacio de configuración simplemente conexo. En tal caso podemos utilizar el lagrangiano (3.22).

En base a los resultados de las secciones anteriores podemos escribir la traza del operador de evolución cuántico como:

$$Z = \int d^Nq^o\, d^Nc^o\, \mathcal{D}f\, e^{iS[\tilde{q}+f]} < q^o_a, c^o_a; T \mid q^o_a, c^o_a; 0 >_c \quad (4.2)$$

donde $< >_c$ indica la amplitud clásica, obtenida con el formalismo BRST presentado en la Sección 2, y además $\tilde{q}_a(t)$ es solución de las ecuaciones clásicas de movimiento con las condiciones de contorno:

$$\tilde{q}_a(0) = \tilde{q}_a(T) = q^o_a \qquad (4.3)$$

Teniendo en cuenta que:

$$< q^o_a, c^o_a; T \mid q^o_a, q^o_a; 0 >_c = \delta^{(N)}(\tilde{q}_a(T) - q^o_a)\, \delta^{(N)}(\tilde{c}_a(T) - c^o_a) \qquad (4.4)$$

donde $\tilde{c}_a$ es solución de :

$$\partial^2_t \tilde{c}_a + \partial_a \partial_b V(q)\, \tilde{c}_b = 0 \qquad (4.5)$$

para tiempos pequeños puede escribirse:

$$\tilde{q}_a(T) \cong q^o_a + \partial_a V(q^o)\, T^2$$
$$\tilde{c}_a(T) \cong c^o_a + \partial_a \partial_b V(q^o)\, c^o_b T^2 \qquad (4.6)$$

y por lo tanto tenemos:

$$< q^o_a, c^o_a; T \mid q^o_a, q^o_a; 0 >_c \cong$$
$$\cong \delta^{(N)}(\partial_a V(q^o) T^2)\, \delta^{(N)}(\partial_a \partial_b V(q^o) c^o_b T^2) \cong$$
$$\cong \delta^{(N)}(\partial_a V(q^o))\, \delta^{(N)}(\partial_a \partial_b V(q^o) c^o_b) =$$
$$= \sum_{\{\bar{q}o\}} \frac{\det.\,((\partial_a \partial_b V(q^o))}{|\det.\,((\partial_a \partial_b V(q^o))|}\quad \delta^{(N)}(q^o_a - \bar{q}^o_a)\, \delta^{(N)}(c^o_a) \qquad (4.7)$$

donde $\bar{q}^o$ son los puntos donde se anula el gradiente del potencial.

Definiendo

$$i(\bar{q}^o) = \text{signo}\,[\,\det.((\partial_a \partial_b V(q^o))]' \qquad (4.8)$$

vemos que (4.9) nos permite aproximar (4.3) para T pequeño como:

$$Z = \int \mathcal{D}f\, e^{\,iS[\bar{q}^o + f]}\; i(\bar{q}^o) \qquad (4.9)$$

Si tomamos el límite T = 0 obtenemos:

$$Z = \sum_{\{\bar{q}o\}} i(\bar{q}^o) = \chi(M) \qquad (4.10)$$

donde $\chi(M)$ es la característica de Euler del espacio de configuración M [6]. Este resultado coincide con el obtenido en Ref.[7] para la teoría clásica. Sin embargo, para $T \neq 0$ aparecen desviaciones de (4.11):

$$Z = \sum_{\{\bar{q}o\}} (iq^o)\, e^{-iV(\bar{q}^o)T} + O(T^2) \qquad (4.11)$$

donde vemos claramente que aparecen "correcciones cuánticas" a la fórmula correspondiente a la teoría clásica (que es exacta para todo T).

REFERENCIAS

1.- E.Gozzi, Phys.Lett. **B201**, 525 (1988)
2.- B.O.Koppman, Proc.Nath.Acad.Sci.USA **17**, 315 (1931)
3.- J. von Neumann, Ann.Math. **33**, 587 (1932); Ann. Math. **33**, 789 (1932)
4.- E.Witten, Nucl.Phys. **B202**, 253 (1982).
5.- L.Lusanna, J.Math.Phys. **31**, 428 (1990).
6.- J.Labastida, CERN-TH. 5240/88.
7.- E.Gozzi y M.Reuter, CERN-TH. 5422/89.