LOCALIZACION Y PROYECTORES

J. P. Aparicio, C. D'Negri, F. H. Gaioli, * E. T. Garcia Alvarez,* M.Gerrero,**
D. F. Hurtado de Mendoza, A. J. Kálnay,* R. F. Krasnopolsky, M. D. Melita y A.C. Tonina.**

Departamento de Física , Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Pabellón I, Ciudad Universitaria, 1428 Buenos Aires.

En este trabajo se estudia el problema de la localización temporal del electrón en el marco de la mecánica cuántica relativista.

Algunos de los operadores posición que encontramos en la literatura pueden obtenerse mediante la utilización de proyectores. Aquí utilizamos dicha noción ensayando con un proyector genérico cuya elección determina un dado operador posición, resultado de proyectar el operador posición de Dirac. Condiciones de simetría nos permiten hallar la expresión más general de dicho proyector.

Se estudian algunas soluciones particulares que se obtienen de este formalirmo.

Es sabido que mediante el empleo de operadores de proyección podemos obtener operadores que actúan sobrE un subespacio del espacio original. En ciertos casos esta técnica permite eliminar anomalías o estados fisicalMente no deseados. Aquí aplicaremos este procedimiento al caso del electrón en el marco de la mecánica cuántica relativista.

Como sabemos, la teoría de Dirac adolece de dificultades tales como la aparición de energías negativas asociadas con los estados de antipartícula y su operador posición tiene un comportamiento anómalo, ya que, por ejemplo, los autovalores del operador velocidad son ± c, los cuales no son aceptables para una partícula masiva como el electrón. Se presenta entonces la dificultad de hallar un operador que describa la posición de dicha partícula.

Durante décadas se han realizado numerosos esfuerzos para encontrar una solución satisfactoria al problema de la localización de las partículas elementales.[1-5] Quizá uno de los trabajos más destacados sea el de Newton y Wigner [6] quienes obtuvieron una solución para el operador posición del electrón, pero la noción de localización introducida por dichos autores no es invariante ante transformaciones de Lorentz.

* Becarios de la Universidad de Buenos Aires.

** Nueva dirección: Department of Physics, University of California, Irvine, Irvine CA 92717.

*** Becario de la Fundación Guggenheim.
Nueva dirección: Laboratorio de Física Teórica, Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (IVIC). Apartado Postal 21827, Caracas 1020-A, Venezuela.

Usando el producto escalar del formalismo de Bargmann-Wigner [7]

$$<\varphi|\psi> = \iiint (p^0)^{-2}\, \varphi(\mathbf{p})^+\, \psi(\mathbf{p})]d^3p \qquad (1)$$

la expresión de dicho opeador en representación de momentos es

$$\mathbf{X}_{NW}\,\Lambda_+ = \Lambda_+(1+\gamma^0)\,\frac{(p^0)^{3/2}}{(p^0+m)^{1/2}}\left(-i\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\right)\frac{(p^0)^{-1/2}}{(p^0+m)^{1/2}}\Lambda_+, \qquad (2)$$

donde Λ_+ es el conocido operador[8] que proyecta sobre los estados de energía positiva de la partícula de Dirac libre

$$\Lambda_+ = (I+H/p^0)/2, \qquad (3a)$$

con

$$H = \alpha\,.\,\mathbf{p} + \beta m. \qquad (3b)$$

De acuerdo con la hipótesis usual, el operador (2) es hermítico, por lo tanto sus autovalores (números reales) son puntos en el espacio ordinario, de aquí que se lo denomine de tipo puntual.

Por otro lado, es sabido que el mecanismo de creación de pares impide discriminar la posición de la partícula original con precisión mejor que una distancia del orden de una longitud de onda Compton [8]. Esto sugirió a uno de nosotros[10] reinterpretar la noción de localización para dar cuenta de este fenómeno utilizando los denominados operadores de tipo extenso[11], los cuales son no-hermíticos, no normales[12] y sus autovalores complejos son susceptibles de la siguiente interpretación: la parte real representa la posición media y cada una de las tres componentes de la parte imaginaria un dado segmento, de modo tal que los valores medibles de la posición sean determinadas regiones del espacio.

En trabajos posteriores, haciendo ciertas hipótesis acerca de la noción de localización no limitadas por aspectos formales como el requerimiento de hermiticidad, uno de nosotros [13,14] obtuvo una solución al problema del operador posición del electrón. La expresión de dicho operador, que llamaremos $\mathbf{X}_K$, es

$$\mathbf{X}_K\ \Lambda_I = \Lambda_I(\partial/\partial\mathbf{p})\ \Lambda_I, \tag{4a}$$

con [15]

$$\Lambda_I = (I + \gamma^u p_u/m)/2, \tag{4b}$$

donde hemos utilizado la misma representación y producto escalar que en la expresión (2). El operador Λ_I es también un conocido proyector[16] que se relaciona con Λ_+ mediante la expresión

$$\Lambda_+ = \Lambda_I\ \gamma^0 m\ /\ p^0, \tag{5}$$

pero a diferencia de este último resulta no hermítico. Si bien la expresión $i(\partial/\partial\mathbf{p})$ coincide con la correspondiente al operador posición de Dirac en la representación de momentos que usa el producto escalar usual[17], dicha expresión no es tn operador hermítico con el producto escalar definido en (1) y está relacionada con su parte hermítica (el operador posición de Dirac) mediante [18]

$$\mathbf{x} = i\ (\partial/\partial\mathbf{p}) - i2\mathbf{p}/(p^0)^2 \tag{6}$$

Con ayuda de (6) y efectuando el cálculo indicado en (4), podemos escribir una expresión explícita e independiente de la representación de $\mathbf{X}_K$

$$\mathbf{X}_K\ \Lambda_I = (\mathbf{x} + i\gamma/2m - i\beta\mathbf{p}/2mp^0 + i2\mathbf{p}/(p^0)^2)\ \Lambda_I. \tag{7}$$

Este operador resulta ser un caso límite de los operadores de tipo extenso y su parte hermítica, representativa de la posición media, coincide con el operador posición propuesto por Bunge,[18,20] el cual admite una formulación explícitamente covariante

$$x_B{}^u = x^u + i\ \gamma^u/2m \tag{8}$$

y tiene asociado un operador velocidad[21]

$$d\mathbf{X}_B/dt = \beta\mathbf{p}/m\ , \tag{9}$$

que posee una sugestiva analogía con su correspondiente magnitud clásica.

Los resultados anteriores sugirieron estudiar las expresiones del tipo (2) y (4) para el caso de un proyector genérico Λ_G de modo tal que los operadores de la teoría de Dirac restringidos a un determinado subespacio describan las variables dinámicas del electrón, en particular el operador posibión $\mathbf{x}_G$ se define por medio de

$$\mathbf{x}_G\ \Lambda_G = \Lambda_G\ \mathbf{x}\ \Lambda_G. \tag{10}$$

Notemos que sólo para el caso de la partícula libre, la invariancia ante 3-rotaciones y 3-traslaciones, que se traduce formalmente en la anulación de los conmutadores

$$[\mathbf{J}, \Lambda_G] = 0, \tag{11a}$$
$$[\mathbf{p}, \Lambda_G] = 0, \tag{11b}$$

hace que las definiciones de impulso y momento angular total genéricos

$$\mathbf{p}_G\Lambda_G = \Lambda_G\ \mathbf{p}\ \Lambda_G, \tag{12a}$$
$$\mathbf{J}_G\Lambda_G = \Lambda_G\ \mathbf{J}\ \Lambda_G, \tag{12b}$$

sean equivalentes a

$$\mathbf{p}_G\Lambda_G = \mathbf{p}\ \Lambda_G, \tag{13a}$$
$$\mathbf{J}_G\Lambda_G = \mathbf{J}\ \Lambda_G = (\mathbf{x}_G \mathbf{x}\ \mathbf{p} + \sigma_G/2)\Lambda_G \tag{13b}$$

donde

$$\sigma_G\Lambda_G = \Lambda_G\ \sigma\ \Lambda_G, \tag{13c}$$

Vemos que $\mathbf{p}_G$ y $\mathbf{J}_G$ son, respectivamente, los generadores de las traslaciones y rotaciones en el subespacio de interés. Efectivamente, se pueden probar las siguientes reglas de conmutación

$$[x_G{}^r, p_G{}^s]\ \Lambda_G = i\delta^{rs}\ \Lambda_G \quad (= \Lambda_G[x^r, p^s]\ \Lambda_G), \tag{14a}$$
$$[x_G{}^r, J_G{}^s]\ \Lambda_G = i\varepsilon^{rst}x_G{}^t\ \Lambda_G \quad (= \Lambda_G[x^r, J^s]\ \Lambda_G), \tag{14b}$$
$$[p_G{}^r, J_G{}^s]\ \Lambda_G = i\varepsilon^{rst}p_G{}^t\ \Lambda_G \quad (= \Lambda_G[p^r, J^s]\ \Lambda_G), \tag{14c}$$
$$[J_G{}^r, J_G{}^s]\ \Lambda_G = i\varepsilon^{rst}J_G{}^t\ \Lambda_G \quad (= \Lambda_G[J^r, J^s]\ \Lambda_G), \tag{14d}$$

y que $\mathbf{x}_G$ restringido a dicho subespacio, se transforma ante traslaciones y rotaciones de la misma manera que $\mathbf{x}$.

Las consideraciones de simetría arriba mencionadas, sumadas a la invariancia de Λ_G ante 3-reflexiones e inversión temporal, permiten determinar que la expresión más general para el proyector genérico es del tipo[22]

$$\Lambda_G = I/2 + i\gamma . \mathbf{p}B/m + \beta C + \alpha . \mathbf{p}D/m \qquad (15)$$

donde los coeficientes adimensionales B, C y D son funciones arbitrarias de p^2/m^2 y satisfacen la ecuación de la cónica

$$(p^2/m^2)D^2 + (p^2/m^2)B^2 + C^2 = 1/4. \qquad (16)$$

Podemos elegir los coeficientes B, C, y D de modo de obtener operadores de proyección conocidos en la literatura, por ejemplo, para

$$B = i/2, \qquad C = p^0/2m \ \text{ y } D = 0,$$

recuperamos el proyector (4b), al cual le corresponde el operador posición

$$\mathbf{x}_I\Lambda_I = (\mathbf{x} + i\gamma/2m - i\beta\mathbf{p}/2mp^0)\, \Lambda_I \qquad (17)$$

cuya parte hermítica al igual que (7), corresponde al operador posición de Bunge.

Con la elección de los coeficientes

$$B = 0 \ \text{ y } \ C = D = m/2p^0,$$

obtenemos el proyector (3) cuyo operador posición asociado es

$$\mathbf{x}_+\Lambda_+ = (\mathbf{x} - i\alpha/2p^0 + i\mathbf{p}/2(p^0)^2)\, \Lambda_+ \qquad (18)$$

que, al igual que (7) y (17), es de componentes no compatibles y de tipo extenso. Dicho operador en representación de Foldy es discutido en un trabajo de Feshbach y Villars [23].

Para concluir, hacemos una reseña comparada de las principales variables dinámicas que se obtienen de ambos proyectores.

De (3) es inmediato probar que

$$H\, \Lambda_+ = p^0\Lambda_+\, , \qquad (19a)$$

por lo que la proyección de la energía es

$$H_+\Lambda_+ = \Lambda_+ H\, \Lambda_+ = p^0\Lambda_+, \qquad (19b)$$

al igual que en el caso del proyector (4b).

Dado que el proyector Λ_+ conmuta con el hamiltoniano, se sigue que para cualquier variable dinámica Ω

$$(d\Omega/dt)_+\Lambda_+ = (d\Omega_+/dt)\Lambda_+. \qquad (20)$$

En particular la proyección del operador velocidad es

$$(d\mathbf{x}/dt)_+\Lambda_+ = (d\mathbf{x}_+/dt)\Lambda_+ = (\mathbf{p}/p^0)\Lambda_+ \qquad (21)$$

de evidente análogo clásico.

El proyector (4b), en cambio, sólo satisface la última de las igualdades (17)

$$(d\mathbf{x}_I/dt)\Lambda_I = (\mathbf{p}/p^0)\Lambda_I \qquad (22)$$

Finalmente la proyección del *spin* resulta para los respectivos casos

$$\sigma_+\Lambda_+ = [\sigma + i(\alpha \times \mathbf{p})/p^0]\Lambda_+ \qquad (23)$$
$$\sigma_I\Lambda_I = [\sigma + i(\gamma \times \mathbf{p})/m]\Lambda_I \qquad (24)$$

coincidiendo la última de las expresiones con el *spin* de Hilgewoord-Wouthuysen,[24].

REFERENCIAS

1. M.H.Pryce, Proc. Roy. Soc. **A195**, 62 (1948).
2. R.J.Finkelstein, Phys. Rev. **75**, 1079 (1949).
3. L.L.Foldy y S. A. Wouthuysen, Phys. Rev. **78**, 29 (1950)
4. H.Bacry, Phys Letters **5**, 37 (1963), J. Math. Phys. **5**, 109 (1964).
5. T.O.Philips, Phys. Rev. **136**, B893 (1964).
6. T.D.Newton y E.P. Wigner, Rev. Mod Phys. **21**, 400 (1949).
7. V.Bargmann y E.P. Wigner, Proc. Natl. Acad. Sci USA **34**, 211 (1948).
8. Véase por ejemplo A. Messiah, *Mecánica Cuántica* (Tecnos, Madrid, 1975), pág 893.
9. Véase por ejemplo V.B. Berestetskii, E.M. Lifshitz y Pitaevskii, *Teoría Cuántica Relativista*, (Reverté, Madrid, 1971), Pág. 3.
10. A.J. Kálnay y T.F. Toledo, Nuovo Cimento **48**, 997 (1967).
11. Intentos recientes fueron realizados en esa dirección, véase P. Bandyopadhyay, Int. J.Theor. Phys. **26**, 131 (1987).
12. Para una discusión acerca del uso de operadores no normales en el formalismo de la mecánica cuántica véase E.C. Kemble, *The Fundamental Principles of Quantum Mechanics with Elementary Applications* (Dover, New York, 1958); W.E. Brittin, Am. J. Phys, **34**, 957 (1966): sec. 3.0. de la ref. 10 y A.J. Kálnay, *Complex Physical*

Quantities and Space-Like States, en *Tachyons, Lonopoles and Related Topics*, editado por E. Recami (North Holland Pub. Co., Amsterdan, 1978).
13.A. J. Kálnay, Phys. Rev. D **1**, 1092 (1970)14. A. J. Kálnay y P.L. Torres, Phys. Rev. D **9**,1671 (1974).
15.Exceptuando la notación $p^\mu \equiv (p^0, \mathbf{p})$, con $p^0 = (p^2 + m^2)^{1/2}$, utilizamos el mismo sistema de unidades y convenciones que las adoptadas por A. Messiah en ref. 8, cap. XX.
16.Véase por ejemplo J.D. Bjorken y S.D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics* (Mc Graw-Hill,New York, 1964), Pág. 33.
17.Nos referimos al producto escalar utilizado, por ejemplo, en ref. 8, pág. 873.
18.La expresión (6) es análoga a la expresión del operador impulso en coordenada curvilíneas $\mathbf{p}_k = -i(\partial/\partial q^k) - (i/2J)\partial J/\partial q^k$ en la cual el término adicional se debe a la presencia del jacobiano que figura en el producto escalar

$$<\varphi|\psi> = \iiint J\, \varphi(\mathbf{q})^* \, \psi(\mathbf{Q})]dp^3.$$

Véase por ejemplo, W. Pauli, *Wellenmechanik*, Handbuch der Physik, Band 24, I, 120 (1933).
19.M. Bunge, Nuovo Cimento **1**, 977 (1955).
20.M. Bunge y A.J. Kálnay, Prog. Theor. Phys. **42**, 1445 (1969).
21.Esta expresión es mencionada por R.P. Feynman, en *Quantum Electrodynamics*, (W. A. Benjamin, New York, 1961), Pág, 48.
22.No imponemos la invariancia explícita ante transformaciones de Lorentz, ya que esto limita *a priori* el número de soluciones posibles determinando unívocamente el proyector. En efecto, la expresión más general para Λ_G que satisface todas las condiciones mencionadas es $\Lambda_G = aI + b\gamma^\mu p_\mu$, lo cual sumado al requerimiento $\Lambda_G^{\,2} = \Lambda_G$ determina los coeficientes a y b modo que Λ_G resulta igual al proyector (4b).
23.H.Feshbach y F.Villars, Rev.Mod.Phys. **30**, 24 (1958).
24.H. Hilgewoord y S. A. Wouthuysen, Nucl. Phys. **40**, 1 (1963).