DERIVACION CUANTICA GENERALIZADA CON RESPECTO AL TIEMPO PROPIO

J.P.Aparicio, C.D'Negri, F.H.Gaioli*,E.T.Garcia Alvarez*, M.Guerrero, D.F.Hurtado de Mendoza, A.J.Kálnay***, R.F.Krasnopolsky, M.D.Melita y A.C.Tonina.**

Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Pabellón I, Ciudad Universitaria, 1428 Buenos Aires.

Se generaliza la derivada con respecto al tiempo propio propuesta por Guido Beck, para el caso de una partícula masiva de *spin* 1/2, utilizando la ecuación de Dirac modificada por un término adicional de tipo Pauli. Se estudian las diversas variables dinámicas de la teoría encontrándose resultados satisfactorios para tal generalización.

INTRODUCCION

Es bien conocido el rol fundamental que juega el tiempo propio en una formulación covariante de la Mecánica Clásica. Sin embargo, la Mecánica Cuántica Relativista, en su presentación usual, prescinde por completo de este concepto.

Para la ecuación de Dirac libre, un operador representativo del tiempo propio ya ha sido introducido[1]. Este operador cumple con los requerimientos esperables de un tiempo propio y ha sido aplicado en el estudio de operadores posición covariante.

Diversas propiedades se espera que cumpla un tiempo propio. Como señaló Moller[2], éste no puede ser un número, ya que se obtiene de la lectura de un reloj que viaja junto a la partícula; por lo tanto depende de la velocidad, que en Mecánica Cuántica está representada por un operador. Además, se espera que sea invariante frente a transformaciones de Lorentz homogéneas y que se reduzca de alguna forma al tiempo ordinario en el referencial de reposo de la partícula. Es esencial también, para la descripción de la dinámica de los sistemas, que tenga asociada una derivada.

En este trabajo se extiende la derivación con respecto al tiempo propio propuesta por G.Beck[3] para el caso de una partícula con momento magnético anómalo.

GENERALIZACION DE LA DERIVADA CON RESPECTO AL TIEMPO PROPIO.

G.Beck introdujo un operador de derivación con respecto al tiempo propio para el caso de una partícula de Dirac libre. En la ref.12 dicha derivada fue extendida para el caso en que la partícula esté acoplada mínimamente al campo electromagnético. Para toda variable dinámica Q, esta derivada se define[4] como:

$$\frac{dQ}{ds} = -i\,[\,\gamma^{\mu}\Pi_{\mu}\,,\,Q],\qquad (1)$$

la cual se reduce a la derivada temporal ordinaria en el límite no relativista. Además, en el marco de la teoría de Dirac, puede introducirse un operador de tiempo propio[1] al cual se le asocia de manera natural la derivación dada por (1).

Pauli[5] fue el primero en notar que los principios de invariancia de Lorentz y de *gauge* no impiden modificar a la ecuación de Dirac agregando un acoplamiento del tipo:

$$\left(\gamma^{\mu}\Pi_{\mu} - \frac{\kappa}{2}\mu_{B}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)\Psi = m\,\Psi.\qquad (2)$$

Esta ecuación describe una partícula de *spin* 1/2, masiva, con momento magnético anómalo, y fue utilizada para modelar al protón y al neutrón.[6] En la actualidad, ecuaciones modificadas de esta forma siguen teniendo interés, por ejemplo, en el problema de los neutrinos solares.[7]

---

* Becarios de la Universidad de Buenos Aires.

** Nueva Dirección: Department of Physics, University of California, Irvine, Irvine CA 92717.

*** Becario de la Fundación Guggenheim. Nueva dirección: Laboratorio de Física Teórica, Instituto Venezolano de Física Teórica (IVIC), Apartado Postal 21827, Caracas 1020-A, Venezuela.

La ecuación (2) sugiere una generalización de la derivada con respecto al tiempo propio

$$\frac{dQ}{ds} = -i\,[\gamma^{\mu}\,\Pi_{\mu} - \frac{\kappa}{2}\,\mu_B{}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\,,\,Q] \qquad (3)$$

Al igual que (1) esta generalización conserva las propiedades de invariancia Lorentz y de *gauge*, y la ley de derivación del producto[8]:

$$\frac{d}{ds}\,(AB) = \frac{dA}{ds}B + A\,\frac{dB}{ds}\,. \qquad (4)$$

Podemos escribir la ec.(1) en forma hamiltoniana,

$$i\,\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H_G\Psi \qquad (5a)$$

donde H_G es el hamiltoniano generalizado:

$$H_G = \alpha.\Pi + \beta\,m + e\,A_0 + \kappa\mu_B\beta\,(i\,\alpha.\mathbf{E} - \sigma.\mathbf{B}). \quad (5b)$$

De (5) obtenemos la derivada con respecto al tiempo ordinario de los operadores en la representación de Heisenberg:

$$\frac{dQ}{dt} = i\,[H_G, Q] + \frac{\partial Q}{\partial t}\,. \qquad (6)$$

EVOLUCION DE LAS PRINCIPALES VARIABLES DINAMICAS

Utilizando (6) y (3) estudiamos las evoluciones con respecto al tiempo ordinario y propio de las principales variables dinámicas.

La velocidad asociada al operador posición de Dirac no sufre modificaciones debido al cambio de hamiltoniano,

$$\frac{d\mathbf{x}_D}{dt} = \alpha \qquad (7a)$$

Pero a la fuerza se le añaden dos términos,

$$\frac{d\Pi}{dt} = e\,(\mathbf{E} + \alpha\mathbf{x}\beta) + \quad (\kappa\mu_B\beta\,\sigma.\mathbf{B}) + \quad (-i\kappa\mu_B\beta\,\alpha.\mathbf{E}). \qquad (7b)$$

Para el momento angular total se tiene,

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = x_D\,\mathbf{x}\,\frac{d\Pi}{dt} + (\kappa\mu_B\beta\sigma)\,\mathbf{x}\,\mathbf{B} + (-i\kappa\mu_B\beta\alpha)\,\mathbf{x}\,\mathbf{E}. \quad (7c)$$

Los términos adicionales a la fuerza de Lorentz y a su momento en (7b) y (7c), son la fuerza y el momento que ejerce el campo electromagnético sobre un dipolo magnético y eléctrico dados por:

$$\mu_m = \kappa\mu_B\beta\sigma, \qquad (8a)$$

$$\mu_e = +i\,\kappa\mu_B\beta\alpha \qquad (8b)$$

Realizando las derivadas generalizadas con respecto al tiempo propio obtenemos:

$$\frac{dx^{\mu}}{ds^{D}} = \gamma^{\mu}\,, \qquad (9a)$$

$$\frac{d\Pi^{\mu}}{ds} = eF^{\mu\nu}\gamma_{\nu} + \frac{\kappa}{2}\,\mu_B\partial^{\mu}(\sigma^{\alpha\nu}F_{\alpha\nu})\,, \qquad (9b)$$

$$\frac{dJ^{\mu\nu}}{ds} = x_D\,\frac{d\Pi^{\nu}}{ds} + x_D^{\nu}\,\frac{d\Pi^{\mu}}{ds} + \kappa\mu\,(\sigma^{\mu\alpha}\,F^{\nu}{}_{\alpha} - \sigma^{\nu\alpha}\,F^{\mu}{}_{\alpha}). \quad (9c)$$

DISCUSION

a) Desde un punto de vista cualitativo, la fuerza adquiere la forma correcta para una partícula cargada con momentos dipolares dados por las ecuaciones (8a) y (8b). Sin embargo, éstos corresponden a la parte anómala ya que, por ejemplo, el valor del momento magnético en el límite no relativista es $\mu = \mu_B(1+\kappa)$, donde μ_B es el magnetón de Bohr.

b) Comparando la parte espacial de las ecuaciones (9) con las (7) vemos que se cumple,

$$\frac{dQ}{ds} = \beta\frac{dQ}{dt}, \qquad (10)$$

relación análoga a la clásica si identificamos[9] a β con

$$\sqrt{1 - v_{CL}^2}\,\Big|_{op}.$$

En general, ocurre que si $[\beta, Q]=0$, (10) es consecuencia de la definición (3).
Si $[\beta, Q] \neq 0$, siempre podemos escribir

$$\frac{dQ}{ds} = -i\,[\gamma^{\mu}\Pi_{\mu} - \frac{\kappa}{2}\,\mu_B\,\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, Q] =$$
$$= \beta\,\frac{dQ}{dt} + i\,[\beta, Q](-i\,\partial_0 + H_0).$$

De lo cual se sigue que si ϕ satiaface $H_G\phi = \frac{\partial\phi}{\partial t}$ se obtiene

$$\langle\phi|\,\frac{dQ}{ds}\,|\phi\rangle = \langle\phi|\beta\,\frac{dQ}{dt}\,|\phi\rangle\,.$$

Estos hechos refuerzan la identificación de (3) con la derivada con respecto al tiempo propio.

c) La ecuación (2) se puede pensar como una ecuación de autovalores,

$$m_{op}\psi = m\,\psi\,,$$

de un operador de masa

$$m_{op} = \gamma^{\mu}\,\Pi_{\mu} - \frac{1}{2}\,\kappa\,\mu_B\,\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}.$$

Como la energía se corresponde con la masa en el referencial de reposo (caso libre), así como el tiempo propio con el tiempo ordinario, la ecuación

$$\frac{dQ}{dt} = i\,[H, Q]$$

es análoga a la derivada con respecto al tiempo propio propuesta en (3),

$$\frac{dQ}{ds} = -i\,[m_{op}, Q].$$

Esta "idea guía" provee un método sencillo para obtener derivadas con respecto al tiempo propio con propiedades satisfactorias.

d) El operador d/ds es el único representable por un conmutador conteniendo sólo derivadas de primer orden, que se reduce a d/dt en el límite no relativista y que es invariante de Lorentz y de *gauge*.

e) Para el caso de la partícula libre, el problema de la localización puede ser abordado con el uso de primeros principios.[10,11] Sin embargo, cuando hay campos, este tratamiento se complica. Una forma de aproximarse a la solución puede ser la adoptada en la ref.12, donde el operador posición propuesto es

$$x^{\mu}_{B} = x^{\mu}_{D} + \frac{i}{2m}\,\frac{dx^{\mu}}{ds^{D}}.$$

REFERENCIAS

1.- A.J.Kálnay and E.Mac Cotrina, Prog.Theor. Phys.. **42**, 1922 (1969)

2.- C.Moller, Communications of the Dublin Institute for Advanced Studies A N°5 (1949).

3.- G.Beck, Rev.Facultade de Ciencias de Coimbra **10**, 66 (1942).

4.- Utilizamos el mismo sistema de unidades y convenciones que las adoptadas por A.Messiah en: *Mecánica Cuántica*, (Tecnos, Madrid, 1975), cap. XX.

5.- W. Pauli, *Wellenmechanics*, Hanbuch der Physik, Band 24, I (1933).

6.- Véase, por ejemplo, R.P. Feynman, *Quantum Electrodynamics* (W.A.Benjamin, New York, 1961).

7.- A.O.Barut and M.Bozic, Reflection, Transsmision and Spin Rotation of Dirac Neutrinos in Magnetic Fields. PREPRINT I.C.T.P. IC/89/148 (1989).

8.- No todas las propuestas de derivación con respecto al tiempo propio cumplen con la ecuación [4], por ejemplo, la expresión [10] que es la definición dada por Corben. Véase H.C.Corben, Phys. Rev. **121**, 1833 (1961).

9.- W.Heitler, *The Quantum Theory of Radiation* (Oxford, 1954).

10.-Véase, por ejemplo, A.J.Kálnay, Phys.Rev. D **1**, 1092 (1970)

11.-T.D.Newton and E.P.Wigner, Rev. Mod. Phys. **21**, 400 (1949)

12.-Véase, por ejemplo, M.Bunge and A.J.Kálnay, Prog. Theor. Phys. **42**, 1445 (1969).

13.- H.C. Corben, Phys. Rev. **121**, 1833 (1961).