

CORRIENTES VISCOGRAVITATORIAS: VALIDEZ DE LA TEORIA DE LUBRICACION

J.Diez^a y R.Gratton^b

*Instituto de Física Arroyo Seco, Facultad de Ciencias Exactas,
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires,
Pinto 399, 7000, Tandil.*

En el contexto de diferentes experimentos realizados con el fin de verificar la aparición de regímenes autosimilares en derrames viscogravitatorios (tratados teóricamente con la teoría de lubricación), aparecieron significativas discrepancias entre la posición del frente prevista por la teoría y la dada por los experimentos. En particular, estas discrepancias aparecen tanto en derrames de una masa finita en canales rectos como en derrames de geometría axial (con el fluido inicialmente contenido por un dique circular). En ambos casos, se obtuvo un excelente acuerdo en el exponente δ de la ley $x_f = \xi_f t^\delta$, pero el valor experimental de ξ_f resulta menor que el valor teórico en alrededor de un 10% y un 20%, respectivamente. Descartadas explicaciones obvias para esta discrepancia, estos resultados sugieren que la teoría de lubricación debe ser corregida de una manera no trivial, ya que los efectos de la no unidireccionalidad del flujo se manifiestan independientemente de la relación de aspecto de la corriente (cociente entre altura y extensión).

Se estudiaron las corrientes viscosas generadas en el derrame de una masa constante con el objeto de observar el grado de precisión con que la teoría de lubricación y las soluciones autosimilares describen estos flujos¹⁻⁹. En todos los experimentos se ha empleado un aceite siliconado comercial (Agip 20W/50), cuya viscosidad ha sido cuidadosamente medida con un viscosímetro de Ostwald y también empleando el método de Stokes, en el rango de temperaturas $18^\circ\text{C} \leq T \leq 24^\circ\text{C}$. Por ejemplo, con $T = 20^\circ\text{C}$ se obtuvo: $v = (4.87 \pm 0.01) \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ para un gradiente de velocidad de 5 s^{-1} . Se hicieron, además, mediciones de v para gradientes de velocidades menores, hasta $5 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$, observándose que el aceite escogido se comporta en forma newtoniana, es decir, el valor de la viscosidad es independiente de la tasa de corte a la que está sometido el fluido.

Se estudió el caso del derrame de una masa constante en un canal de ancho infinito. Este caso corresponde a un exponente de autosimilaridad $\delta = 1/5$ y la posición del frente en función del tiempo viene dada por

$$x_f = \xi_f (gA^3 / 3v)^{1/5} t^{1/5} \quad (1)$$

donde $\xi_f = 1.411 \dots$, y $A_0 = H_0 x_0$, siendo H_0 y x_0 la altura y la longitud inicial del fluido, respectiva-

mente.

Los experimentos se realizaron en un canal de acrílico de 20 cm de ancho y un metro de longitud, debajo del cual se colocó una escala milimetrada para medir la posición del frente en función del tiempo. Estas mediciones se obtuvieron a partir de videografías y su posterior visualización, cuadro por cuadro, en un equipo reproductor profesional. Este método permite apreciar con toda claridad la posición del frente en imágenes fijas disponibles cada 0.02 s. Así, el error en la posición del frente es del orden de la mínima apreciación de la escala ($\approx 0.5 \text{ mm}$) y el tiempo se conoce con un error seguramente menor que 10^{-2} s (el proceso de formación por barrido de cada cuadro es del orden de 10^{-3} s).

En la Fig. 1a se muestra la curva $x_f(t)$ así obtenida del derrame de una masa de aceite de altura $H_0 = 4.4 \text{ cm}$ y longitud inicial $x_0 = 10 \text{ cm}$ ($T = 18.4^\circ\text{C}$). En todas las mediciones realizadas con diversos valores de H_0 y x_0 se obtuvieron valores para el exponente de autosimilaridad δ que difieren en menos de un 1% del valor teórico $\delta = 0.2$. Para el caso de la fig. 1a, se tiene,

$$x_f = (1.249 \pm 0.002) (gA_0^3 / 3v)^{1/5} t^{0.2003 \pm 0.0002} \quad (2)$$

con 119 puntos a partir de $t = 10 \text{ s}$, siendo $t = 0$ el instante de apertura de la compuerta. Puede observarse de la figura que la región para $t < 1 \text{ s}$ se ve fuertemente influenciada por las condiciones inicia-

^a Becario de CONICET

^b Investigador del CONICET

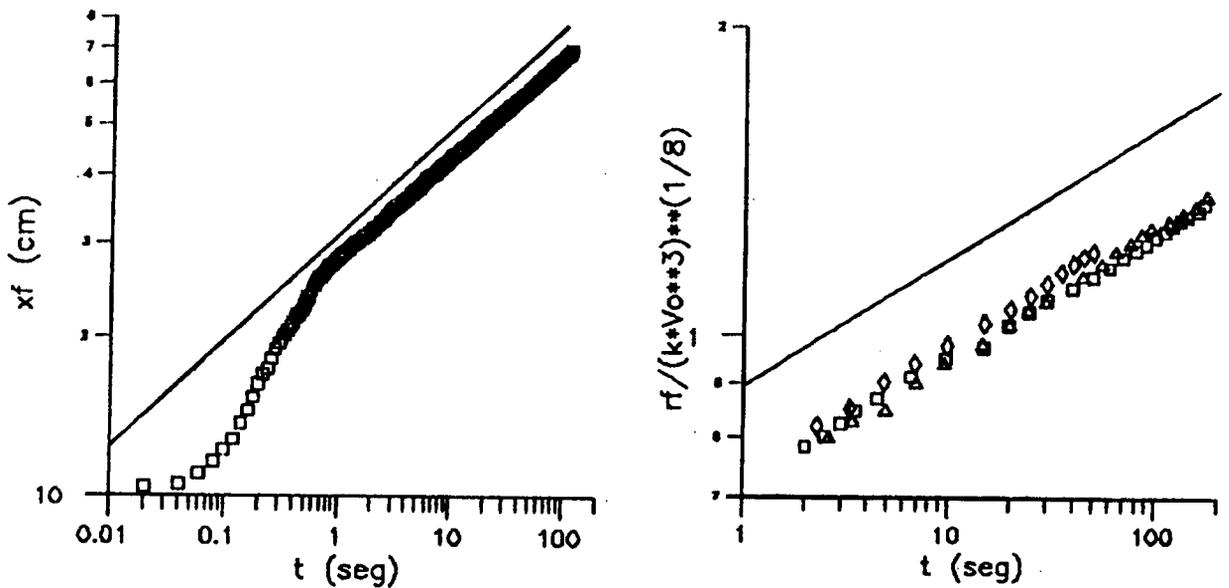


Fig. 1: Mediciones obtenidas por video-filmación de la posición del frente en función del tiempo para: (a) el flujo en el canal con $H_0 = 4.4$ cm y $x_0 = 10$ cm ($T = 18.4$ °C), y (b) el flujo aximétrico con (\square) $V_0 = 10$ cm³, $r_0 = 1.2$; (Δ) $V_0 = 10$ cm³, $r_0 = 1.8$ cm; y (∇) $V_0 = 15$ cm³, $r_0 = 1.8$ cm ($T = 18.5$ C).

les, y que para $t > 10$ s la tendencia hacia la ley de potencia autosimilar, $x_f \propto t^{0.2}$ es notoria. Nótese que, a pesar de que la solución autosimilar corresponde a un canal de ancho infinito, este exponente puede hallarse con muy buena precisión en un canal de ancho finito. Esto se debe a que el frente es recto en casi toda su extensión, no obstante los efectos debidos a la presencia de las paredes laterales.

A pesar de que δ puede obtenerse con gran exactitud, el valor de la constante ξ_r difiere en algo más del 10% de su valor teórico. Esta diferencia podría explicarse, por ejemplo, asumiendo un comportamiento no newtoniano del aceite. Sin embargo, esta hipótesis debe descartarse debido a que seguramente también tendríamos un distinto valor de δ . En efecto, consideremos uno de los modelos no-newtonianos más simples, por ejemplo, la llamada relación constitutiva de ley de potencia: $\sigma_{ij} = B E^{n-1} \epsilon_{ij}$, donde σ_{ij} es el tensor de los esfuerzos, ϵ_{ij} es el tensor tasa de deformación (parte simétrica), $E = [\epsilon_{ij} \epsilon_{ij}]^{1/2}$ es el segundo invariante de ϵ_{ij} ; B y el índice reológico n son constantes ($n=1$, fluido newtoniano). Con esta relación constitutiva, el exponente de autosimilaridad δ para el caso del derrame de una masa constante es (Gratton et. al, 1989): $\delta = n/(3+2n)$. Así, por ejemplo, si el índice reológico fuese $n = 1.1$ en vez de la unidad, tendríamos $\delta = 0.2115$ en vez de $\delta = 0.2$.

Otra razón que podría esgrimirse para explicar la discrepancia es que las paredes laterales afectan, de

alguna manera, el derrame del aceite, dando lugar así a un valor menor de ξ_r . Sin embargo, si este efecto fuese importante el flujo no sería autosimilar debido a la intervención de un nuevo parámetro adimensional: la relación entre el ancho del canal y la altura de la corriente. De todas formas, para clarificar este punto, se realizaron mediciones de la posición del frente en función del tiempo para el caso de un derrame axisimétrico. En este caso, el aceite se encuentra inicialmente contenido en un cilindro circular, el cual es levantado rápidamente dejando que el aceite se derrame en dirección radial. De acuerdo con la solución autosimilar, el radio del frente sigue la ley:

$$r_f = \xi_r (gV_0^3/3v)^{1/8} t^{1/8} \quad (3)$$

donde $\xi_r = 0.894 \dots$, y V_0 es el volumen de aceite empleado. Las mediciones de la posición del frente en función del tiempo, obtenidas con video filmaciones, se presentan en la Fig. 1b y, pueden condensarse en la forma:

$$r_f = (0.72 \pm 0.02) (gV_0^3/3v)^{1/8} t^{0.125 \pm 0.004} \quad (4)$$

Nuevamente, encontramos en valor de ξ_r menor que el valor teórico, en este caso, en un 20%. Esto hecho indica que tampoco podemos atribuir al efecto de las paredes laterales el hecho que la posición del frente sea siempre algo menor que la predicha por la

teoría. De esta manera, llegamos a la conclusión que debe aceptarse que la aproximación de lubricación no proporciona el valor correcto del coeficiente de proporcionalidad en la ley $x_f \propto t^{\delta}$. Más específicamente, podemos decir que la discrepancia entre los valores teóricos y experimentales de este coeficiente tiene su origen en la hipótesis de unidireccionalidad del flujo ($v_z = 0$), la cual es claramente violada cerca del frente.

Por la condición de no deslizamiento en el fondo, la velocidad del fluido en $z = 0$ es nula para todo x , pero sufre un salto en x_f , donde vale $v_f = 0$. Esta indeterminación fue salvada en la teoría utilizando la variable $v = 3/2 v_s$, donde v_s es la velocidad en la superficie libre. Por lo tanto, la velocidad del frente se obtiene del límite,

$$v_f \propto \lim_{H \rightarrow 0} H^2 \frac{\partial H}{\partial x} \quad (5)$$

el cual resulta finito ($\propto x_f / t$), pues $\partial H / \partial x \rightarrow \infty$ para $H \rightarrow 0$. Es decir, la velocidad del frente surge del límite de una expresión que en realidad no es correcta (pues viola las hipótesis básicas) donde $\partial H / \partial x$ toma valores muy grandes. En consecuencia, es de esperar que el valor de dicho límite no corresponda al valor real de la velocidad del frente. Remover esta inconsistencia requiere considerar explícitamente, y desde un comienzo, la componente v_z de la velocidad. Esto complicaría excesivamente las ecuaciones básicas, las cuales, quizás, sólo podrán resolverse mediante

técnicas numéricas.

De acuerdo con estos argumentos, la discrepancia se traduce en un factor constante para la posición del frente; dicho factor parece depender de la dimensionalidad de la geometría, pero no del tiempo. Esto último significa que tampoco depende de la razón de aspecto de la corriente dada por el cociente entre su altura media \bar{H} y su extensión L . Este resultado no es en absoluto trivial, pues a primera vista hubiera sido razonable esperar discrepancias del orden de \bar{H}/L , tendientes a cero con esta relación.

REFERENCIAS

- 1.- J. Diez, R. Gratton y J. Gratton, Anales AFA '89, 161.
- 2.- J. Diez, R. Gratton y J. Gratton, Anales AFA '89, 164.
- 3.- J. Diez, J. Gratton and F. Minotti, ICTP Int. Rep. IC / 89 / 171, 1989, enviado para su publicación a Quarterly Journal of Applied Mathematics.