

# CORRIENTES VISCOGRAVITATORIAS: RESOLUCION NUMERICA DE LA ECUACION DE DIFUSION NO LINEAL.

J.Diez\* y R.Gratton\*\*.

*Instituto de Física Arroyo Seco, Facultad de Ciencias Exactas,  
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires,  
Pinto 399, 7000, Tandil.*

Se presentan resultados de un código de simulación elaborado para resolver la ecuación de difusión no lineal que describe (entre otras aplicaciones) las corrientes viscogravitatorias. Los resultados obtenidos con este método mostraron que es posible obtener un muy buen acuerdo con las soluciones autosimilares de primera especie conocidas, lo cual hizo que el código resultara confiable para tratar otros flujos. Las simulaciones numéricas de un flujo axial convergente, cuya asintótica es una solución autosimilar de segunda especie, permitieron obtener el valor del exponente de autosimilaridad  $\delta$ , en concordancia con los cálculos teóricos. Se corroboró que, tal como se había mostrado experimentalmente, el flujo entra en el régimen autosimilar para radios del frente menores que 0.35 del radio del dique.

Se ha desarrollado un código de simulación para estudiar flujos viscosos de lubricación, con el objeto de mostrar numéricamente de qué forma el flujo tiende asintóticamente a una solución autosimilar, de primera o de segunda especie<sup>1,2</sup>.

En primer lugar, se estudió un problema de primera especie, el flujo plano de una masa constante, para comprobar la calidad del esquema numérico empleado, y luego, un problema de segunda especie: el flujo axial convergente.

En ambos problemas se dispone de una dada cantidad inicial de fluido (expresada como un área si  $\alpha = 0$  o como un volumen si  $\alpha = 1$ ) con una longitud característica  $x_0$  y una altura característica  $H_0$ . Esto permite adimensionalizar la coordenada  $x$  con  $x_0$ , la altura  $H$  con  $H_0$ , la velocidad  $v$  con  $v_0 = k H_0^m / x_0$  y el tiempo  $t$  con  $t_0 = x_0^2 / k H_0^m$  ( $m=3$  corresponde a los flujos viscogravitatorios). De esta forma, las ecuaciones que gobiernan el flujo se escriben como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + x^{-\alpha} \frac{\partial}{\partial x} (x^\alpha u w) = 0, \quad u^{m-1} \frac{\partial u}{\partial x} + w = 0 \quad (1)$$

que puede resumirse en:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = x^{-\alpha} \frac{\partial}{\partial x} (x^\alpha u^m \frac{\partial u}{\partial x}) \quad (2)$$

donde  $u = H / H_0$ ,  $w = v/v_0$  y  $x, t$  deben entenderse como variables adimensionales. Aquí, se ha empleado un esquema (en diferencias finitas) implícito

\* Becario de CONICET

\*\* Investigador del CONICET

de tiempo ponderado, según el cual las derivadas espaciales se expresan como un promedio pesado del operador en diferencias entre el paso temporal  $n$  y  $n+1$ . La no-linealidad se expresa en base a una extrapolación lineal definida también como un promedio pesado de  $\omega$  entre el paso  $n-1$  y  $n$ , lo que genera, como consecuencia, un esquema de tres niveles.

Consideremos la solución numérica del derrame de una masa constante de fluido en un canal. En las variables adimensionales la solución autosimilar de primera especie puede expresarse como:

$$\frac{u}{u_0} = (1 - \eta^2)^{1/m}, \quad v = \frac{\delta x_f}{t} \eta, \quad \eta = x/x_f \quad (3)$$

donde,

$$u_0 = u(0, t) = \left[ \frac{m}{2(m+2)} \frac{x_f}{t} \right]^{1/m},$$

$$x_f = \xi_f t^\delta \quad (\xi_f = 1.411...) \quad (4)$$

y el exponente de autosimilaridad es  $\delta = 1/5$  para  $m=3$ . En la Fig. 1a se ha representado la posición del frente en función del tiempo, lo que permite verificar la tendencia hacia la ley de potencias de la ec.(4). El valor del exponente calculado para  $t > 3$  es,  $\delta = 0.19 \pm 0.001$ , es decir, 0.95 del valor teórico  $\delta = 0.2$ . En la fig. 1b se compara el perfil de altura autosimilar con el dado por la solución numérica en  $t=2.5$ . Cabe destacar que el perfil numérico así representado en unidades de  $u_0$  y  $x_f$ , ha permanecido prácticamente inalterado desde  $t \approx 1$ , lo cual indica que el flujo ya ha

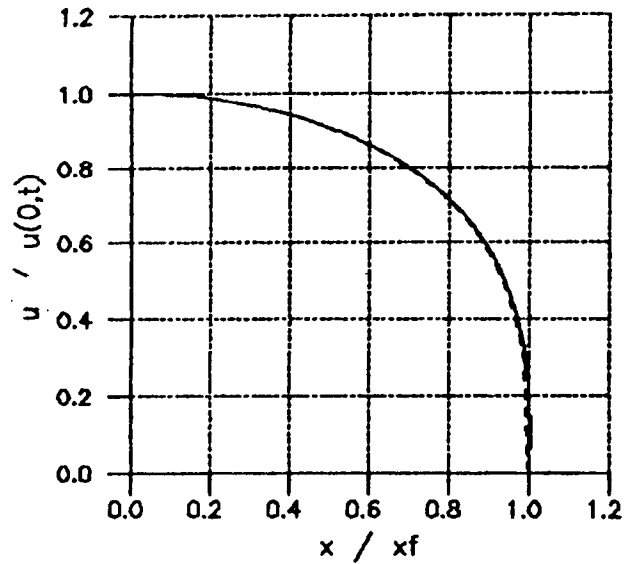
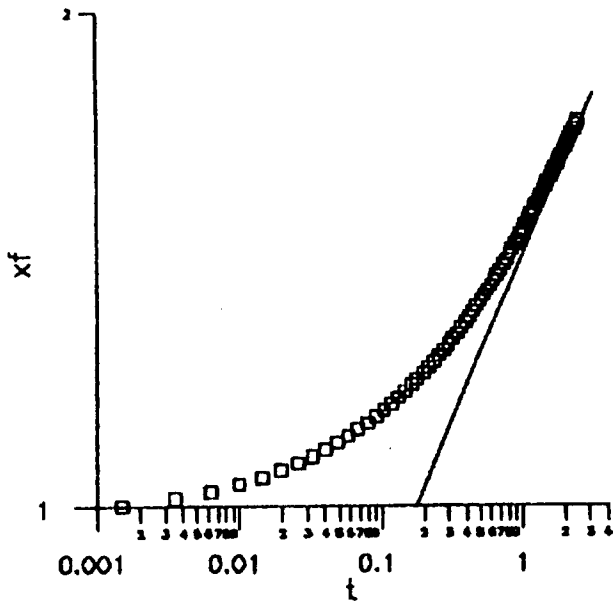


Fig. 1: (a) Posición del frente  $x_f(t)$  en función del tiempo y (b) perfil de altura numérico ( $t=2.5$ ). La línea de puntos corresponde a la solución autosimilar.

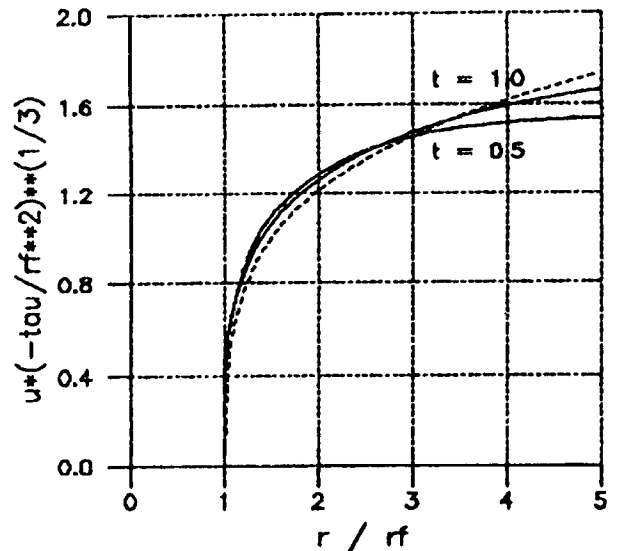
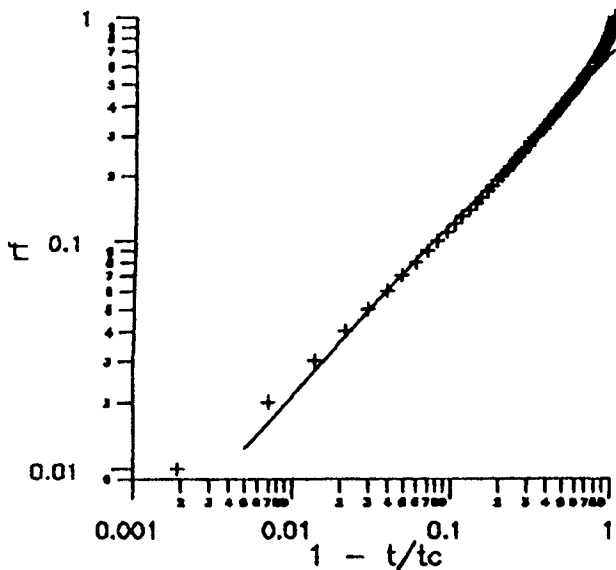


Fig. 2: (a) Posición del frente  $r_f(t)$  en función del tiempo y (b) perfiles de alturas numéricas. Las líneas sólidas corresponden a la solución autosimilar y  $t_c = 1.8452$ .

entrado en el régimen autosimilar. Entonces, puede decirse que el esquema numérico planteado da resultados aceptables, lo suficientemente precisos como para obtener la solución asintótica del problema.

Considérese, ahora, el flujo axisimétrico de un fluido muy viscoso hacia el origen. En las últimas etapas del proceso ( $\tau = t - t_c < 0$ ,  $t_c$ : tiempo de colapso), cerca del colapso del frente ( $\tau = 0$ ) y en los instantes posteriores ( $\tau > 0$ ), el flujo puede describirse me-

dante una solución autosimilar de segunda especie. Esta solución debe ser válida para radios pequeños comparados con cualquier radio que caracterice las condiciones iniciales, digamos, por ejemplo, el radio  $r_0$  de la pared circular que contiene inicialmente al fluido de la altura  $H_0$ .

Para observar la transición del flujo hacia el régimen autosimilar, consideremos la posición del frente en función del tiempo. En forma dimensional,

ésta viene dada por:  $r_f = \xi_f b (-\tau)^\delta (\tau < 0)$ , donde  $b$  es una constante dimensional ( $[b] = LT^{-\delta}$ ),  $\delta$  es el exponente de autosimilaridad y  $\xi_f$  es una constante sin dimensiones. El exponente ha sido calculado en la teoría y vale  $\delta = 0.7621156 \dots$  para  $m = 3$ . La comparación de la posición del frente obtenida numéricamente, con la dada por la teoría, permite verificar el valor exponente de autosimilaridad  $\delta$  y obtener la constante  $\xi_f$  para el problema particular resuelto. En la Fig. 2a se ha representado  $r_f$  (adimensionalizado con  $r_0$ ) en función de  $(1-t/t_0) = (-\tau/t_0)$ . Si aproximamos linealmente esta curva en el rango  $0.1 \leq r_f \leq 0.35$ , obtenemos,

$$r_f = (0.702 \pm 0.001) (-\tau/t_0)^{0.76 \pm 0.003} \quad (5)$$

correspondiendo a un exponente de autosimilaridad  $\delta$  que difiere en sólo un 0.2% del valor teórico. De esta manera, se observa que el movimiento del frente queda bien descrito por la solución autosimilar para

radios menores que 0.35 del radio del dique.

La comparación entre los perfiles de altura numérico y autosimilar, se muestra en la Fig. 2b. Allí, se ha representado  $[u(\tau/r_f^2)]^{1/m}$  en función de  $\eta = r/r_f$  para varios instantes antes del colapso ( $\tau < 0$ ), verificándose así nuevamente el carácter asintótico de la solución autosimilar.

## REFERENCIAS

- 1.- J.Diez, R.Gratton y J.Gratton, Anales AFA '89, 161.
- 2.- J.Diez, R.Gratton y J.Gratton, Anales AFA '89, 164.