

# ESTUDIO DE UN FLUJO ROTANTE QUE ATRAVIESA UNA CONTRACCIÓN

## STUDY OF A ROTATING FLOW THROUGH A CONTRACTION

R. González<sup>a,\*</sup> L. Binda<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Instituto de Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento

Juan María Gutiérrez 1150 (1613) Buenos Aires Argentina

\*rgonzale@ungs.edu.ar, levtski@gmail.com

Recibido: 11/12/12 - Aprobado: 26/07/13

Dado un flujo de Rankine que consiste en una rotación rígida con traslación uniforme, rodeada de un flujo potencial, en un cilindro aguas arriba, que atraviesa una contracción axisimétrica hacia un cilindro de radio menor, obtenemos las características del equilibrio aguas abajo, en función del número de Rossby (cociente entre velocidades de traslación y azimutal características). Asimismo estudiamos la estabilidad del equilibrio frente a perturbaciones axisimétricas y helicoidales y la inestabilidad frente a perturbaciones no axisimétricas. Mientras que encontramos una solución exacta y neutralmente estable para el caso con simetría helicoidal, vemos que el equilibrio resulta estable frente a perturbaciones axisimétricas. Para el caso de perturbaciones no axisimétricas se verifica que hay un Rossby crítico por debajo del cual el flujo es inestable en un rango del parámetro de contracción (cociente entre los radios de los cilindros de menor y mayor radio) que va de 0.77 a 0.99 y es inestable para cualquier Rossby mayor, siendo inestable para contracciones fuera de ese rango. Además vemos que el flujo de equilibrio rotacional y las perturbaciones con simetría helicoidal del núcleo vorticoso, constituyen flujos de Beltrami (velocidad paralela a la vorticidad) en el sistema roto traslatorio dado aguas arriba.

*Palabras clave:* flujo rotante, Beltrami, contracción axisimétrica.

For a Rankine flow, that is to say a uniform solid body rotation plus a uniform translation surrounded by a potential flow, in a cylinder upstream, that goes towards another cylinder downstream with a radius less than the upstream one, through an axisymmetric contraction, we obtain the downstream equilibrium features in function of the Rossby number (ratio between characteristics axial and azimuthal velocities). Besides we study the equilibrium stability with regards to axisymmetric and helical perturbations and the instability with regards to non axisymmetric perturbations. While finding exact and neutrally stable solutions for the helical case, we see the the equilibrium is stable for axisymmetric perturbations. For the non axisymmetric case, it is verified that there is a critical Rossby number below which, the equilibrium is unstable for a contraction parameter (ratio between downstream and upstream cylinders) rank between 0.77 and 0.99, and is unstable outside this rank. On the other hand, we see that the rotational equilibrium, and the helical perturbations of the vortex core, are Beltrami flows (the vorticity parallel to the velocity) in a reference frame with translate and rotate with the Rankine vortex velocities.

*Keywords:* swirling flow, Beltrami, axisymmetric contraction

### I. INTRODUCCIÓN

En trabajos previos<sup>1,2,3</sup> hemos considerado flujos rotantes en un fluido ideal pasando de un cilindro a otro de mayor radio a través de una expansión axisimétrica. Abordamos en especial, un vórtice de Rankine<sup>1</sup> o un flujo formado por una rotación sólida más una traslación uniforme<sup>3</sup>, aguas arriba. En esos casos el flujo rotacional aguas abajo de la expansión es un flujo de Beltrami en un sistema solidario con la roto-traslación. En este trabajo consideramos la misma

configuración geométrica pero con una contracción axisimétrica en lugar de una expansión, y un flujo de Rankine aguas arriba. Las características del núcleo vorticoso aguas abajo y por lo tanto del flujo completo dependerán entonces del número de Rossby  $\mathcal{R} = U/(b\Omega)$  donde  $\Omega$  es la velocidad de rotación  $\Omega$  y  $U$  la velocidad axial de traslación del vórtice de Rankine, siendo  $b$  el radio del cilindro aguas arriba.

En el caso de la configuración con expansión, el equilibrio obtenido aguas abajo de la expansión, en el segundo cilindro, la componente de Beltrami posee un

autovalor  $\gamma=2\Omega/U$  o adimensionalizado  $\gamma=2/\mathcal{G}$ . El flujo aguas abajo alcanza un punto de estancamiento en el eje y para números de Rossby menores que ciertos valores críticos  $\mathcal{G}_c$  y  $\mathcal{G}_{cc}^1$  el flujo axisimétrico desaparece en el primer caso y deviene inestable en el segundo, abriendo la posibilidad de vortex breakdown.

En el presente trabajo, queremos determinar por un lado, las características del equilibrio, esto es el radio del núcleo vorticoso y el campo de velocidades aguas abajo en función del número de Rossby, del parámetro de contracción  $\eta=b_0/b$ , y del radio del núcleo vorticoso aguas arriba  $\iota=a/b$  (Fig. 1). Y por otro lado la estabilidad

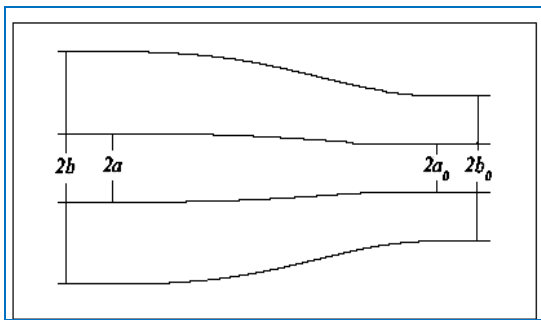


Figura 1. Configuración axisimétrica de la transición entre los tubos de radio  $b$  y radio  $b_0$  con  $b_0 < b$ . El flujo aguas arriba es un Rankine con un radio del núcleo vorticoso  $a$ , que adquiere un radio  $a_0$  aguas abajo.

de los equilibrios encontrados frente a perturbaciones axisimétricas y con simetría helicoidal y la inestabilidad frente a perturbaciones no axisimétricas.

En este trabajo desarrollamos tres secciones. En la sección 2 desarrollamos las expresiones del equilibrio axisimétrico en función de los parámetros mencionados previamente.

En la sección 3 estudiamos la estabilidad del equilibrio frente a perturbaciones helicoidales y aplicamos los criterios de estabilidad de Rayleigh y de inestabilidad de Leibovich-Stewartson<sup>4,5,6</sup> para estudiar la estabilidad frente a perturbaciones axisimétricas y la inestabilidad frente a perturbaciones no axisimétricas, respectivamente.

En la sección 4 presentamos los resultados y en la sección 5 las conclusiones.

## II. EQUILIBRIO DEL FLUJO AGUAS ABAJO

Para el flujo de Rankine aguas arriba:

$$V_\theta = \Omega r, \quad V_z = U, \quad V_r = 0, \quad 0 \leq r \leq a \quad (1a)$$

$$V_\theta = \Omega a^2 / 2\pi r, \quad V_z = U, \quad V_r = 0, \quad a \leq r \leq b \quad (1b)$$

Debido a la axisimetría, es posible obtener una ecuación de equilibrio estacionario para la función de corriente  $\psi$  ( $V_r = -1/r \partial\psi/\partial z$ ,  $V_z = 1/r \partial\psi/\partial r$ ) válida en la región completa (ecuación de Bragg-Hawthorne)<sup>1,3,7</sup> a partir de las ecuaciones de Euler y de las conservaciones

de la circulación y de la energía de Bernoulli y resolver esta ecuación con respecto a  $\psi$ . Tomando la continuidad aguas arriba-abajo de la solución  $\psi$  (conservación del caudal), así como las conservaciones mencionadas, obtenemos el flujo aguas abajo

$$V_\theta = \Omega r + \gamma A J_1(\gamma r), \quad V_z = U + \gamma A J_0(\gamma r), \quad V_r = 0, \quad 0 \leq r \leq a_0, \quad (2a)$$

$$V_\theta = \Omega a^2 / 2\pi r, \quad V_z = BU, \quad V_r = 0, \quad a_0 \leq r \leq b_0,$$

$$B = (b^2 - a^2) / (b_0^2 - a_0^2) \quad (2b)$$

Verificamos que es un flujo de Beltrami del tipo  $\nabla \times \mathbf{v} = \gamma \mathbf{v}$  visto desde un sistema de referencia trasladándose con velocidad  $U$  y girando con velocidad  $\Omega$  constantes, con un autovalor  $\gamma = 2U/\Omega$ . Imponiendo la igualdad de las velocidades axiales rotacional e irrotacional en la frontera resulta la ecuación para la contracción:

$$0 = (1 - \iota^2) / (\eta^2 - \xi^2) - 1 + (\iota^2 - \xi^2) \cdot J_0(2\xi/\mathcal{G}) / \mathcal{G} \cdot \xi \cdot J_1(2\xi/\mathcal{G}) \quad (3)$$

en función de los parámetros  $\iota = a/b$ ,  $\eta = b_0/b$ ,  $\gamma = 2/\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{G} = U/(a\Omega)$  y donde  $\xi = a_0/b$  es la contracción adimensionalizada del núcleo y la ec. 3 da una relación implícita de  $\xi$  con  $\mathcal{G}$ . De esta forma hemos hallado el equilibrio axisimétrico aguas abajo.

## III. ESTABILIDAD E INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO

### Estabilidad frente a perturbaciones helicoidales

Perturbamos el equilibrio hallado en forma helicoidal:

$$\{\delta V_r, \delta V_\theta, \delta V_z, \delta p\} = \{f(r), g(r), h(r), (r)\} e^{i\phi - i\sigma t} \quad (4)$$

donde  $\phi = \theta - kz$ , siendo  $2\pi/k$  el paso de la hélice, que reemplazadas en las ecuaciones de Euler y linealizadas conducen a las ecuaciones 16-19 de la primera referencia<sup>1</sup>, cuyas soluciones para  $\sigma = n\Omega$ , corresponden a un flujo de Beltrami con simetría helicoidal<sup>1</sup>. Por lo tanto, el equilibrio frente a este tipo de perturbaciones es neutralmente estable

### Criterio de estabilidad de Rayleigh

Frente a perturbaciones axisimétricas del equilibrio, una condición necesaria y suficiente de estabilidad es que cumpla la condición<sup>4,6</sup>

$$fR = \Gamma \cdot \delta\Gamma \geq 0, \quad \Gamma = V_\theta r \quad (5)$$

### Criterio de inestabilidad de Leibovich-Sewartson

Frente a perturbaciones no axisimétricas del equilibrio, una condición suficiente de inestabilidad es que cumpla la condición<sup>4,5</sup>:

$$fLS = V_{\theta} \delta\Omega [\delta\Gamma \delta\Omega + (\delta V_z)^2] < 0, \quad \Omega = V_{\theta}/r, \quad \delta = d/dr + 1/r. \quad (6)$$

## IV. RESULTADOS

### Equilibrio

Para diferentes valores del radio del núcleo vorticoso aguas arriba  $\iota$ , obtenemos el radio de la contracción  $\xi$  en función de  $\vartheta$ . Los resultados se presentan en las figuras 1 y 2.

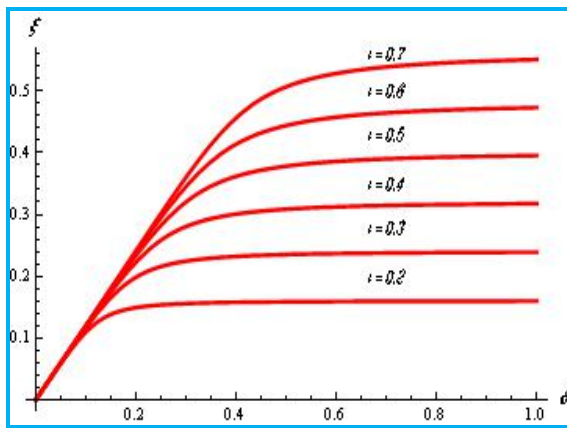


Figura 1. Contracciones del núcleo como función del número de Rossby, correspondientes a diferentes valores del parámetro  $\iota$ , para  $\eta=0.8$ . Soluciones válidas sin reversión de flujo es decir  $V_z \geq 0$ .

En este caso no hay reversión de flujo, es decir, velocidad axial negativa, y vemos un comportamiento lineal para Rossbys chicos y casi constante a partir de un  $\vartheta$  dado que crece con  $\iota$ , estimativamente de  $\vartheta=0.2$  para  $\iota=0.2$ , a  $\vartheta=0.6$  para  $\iota=0.7$ .

En la figura 2 se representan soluciones de la ec. 3 que no son válidas en el sentido de poseer reversión de flujo. La velocidad axial, para un  $\vartheta$  dado, es máxima en el centro y comienza a disminuir cuando  $r$  crece, de forma que si el radio del núcleo tiende a aproximarse a  $\eta$ , entonces en algún punto esta velocidad se anula y deviene negativa. De aquí se ve con claridad que no se dan las condiciones para el vortex breakdown que requiere un perfil de velocidades creciente con  $r$ , al no existir una segunda solución tampoco se presentan bifurcaciones como en el caso de la expansión<sup>1</sup>.

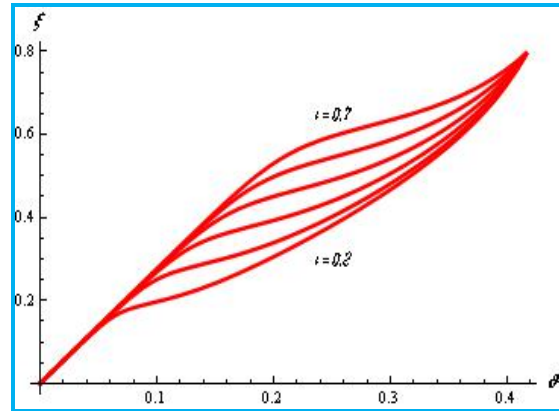


Figura 2. Contracciones del núcleo como función del número de Rossby, correspondientes a diferentes valores del parámetro  $\iota$ , para  $\eta=0.8$ . Soluciones no válidas pues poseen reversión de flujo es decir  $V_z < 0$ .

### Estabilidad frente a perturbaciones helicoidales

Para el tipo de perturbaciones de Beltrami con el mismo autovalor  $\gamma$  que el del flujo base, lo que ocurre cuando se cumple que  $\sigma = n\Omega$  en la ec. 4, el equilibrio es neutralmente estable. La figura 3 muestra el parámetro  $k$  de la hélice como función de  $\vartheta$  para el modo  $n=1$  en la ec. 4 y  $\eta=0.8$ .

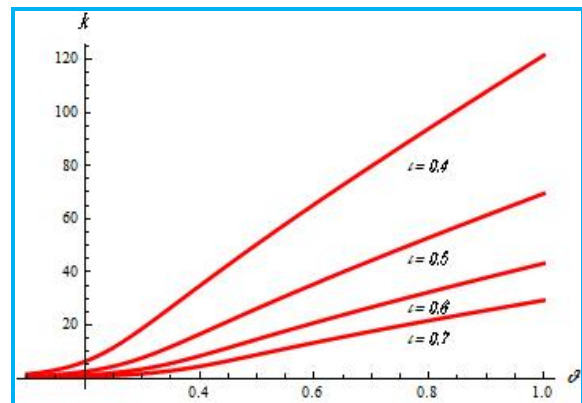


Figura 3. Parámetro  $k$  de la hélice como función de  $\vartheta$  para el modo  $n=1$  y  $\eta=0.8$ .

### Criterio de estabilidad de Rayleigh

Para los diferentes valores de los parámetros se observa que el valor de la funcional del criterio es siempre positivo en el rango  $0 \leq r \leq \xi$  del núcleo, lo que muestra que este equilibrio es estable frente a perturbaciones axisimétricas.

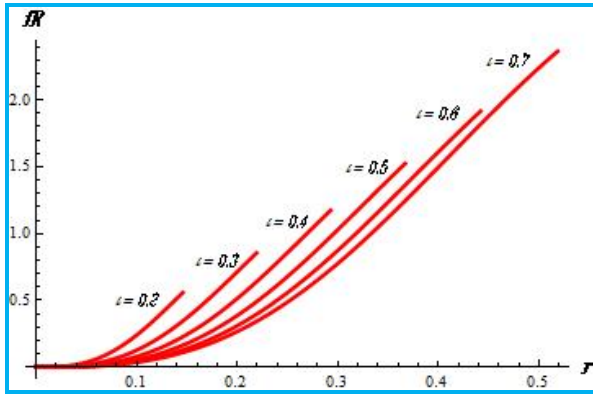


Figura 4. Funcional del criterio de Rayleigh en función de  $r$  para  $\eta=0.8$ .

### Criterio de inestabilidad de Leibovich-Stewartson

La figura 5 muestra la funcional del criterio de Leibovich-Stewartson en función de  $r$  en el rango  $0 \leq r \leq \xi$  del núcleo, para diferentes  $\tau$ , lo que da diferentes valores críticos de  $\mathcal{R}$ , por debajo de los cuales tenemos inestabilidad. La relación entre los Rossby críticos y parámetros  $\tau$ , para  $0.77 \leq \eta \leq 0.99$  se observa en la figura 6.

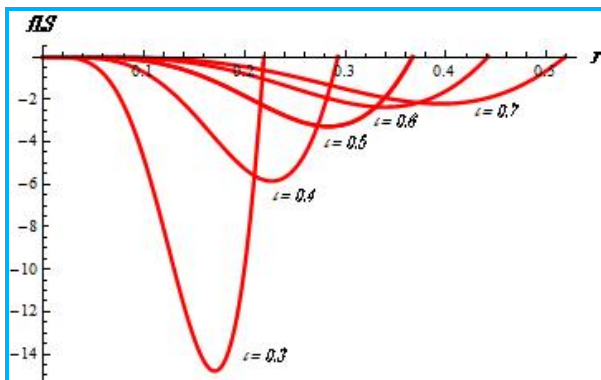


Figura 5. Funcional del criterio de Leibovich-Stewartson en función de  $r$  para  $\eta=0.8$ .

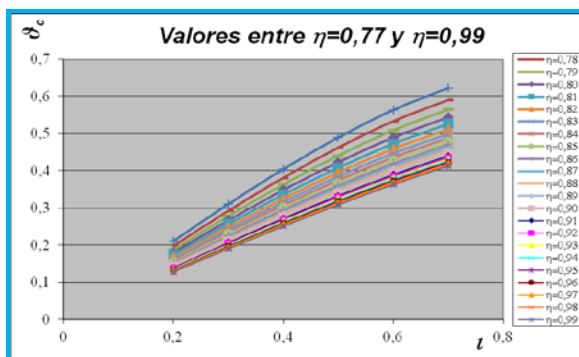


Figura 6. Rossby críticos ( $\mathcal{R}_c$ ) del criterio de Leibovich-Stewartson en función de  $\tau$ , para  $0.77 \leq \eta \leq 0.99$ .

Vemos que los  $\mathcal{R}_c$  son crecientes con  $\eta$  y con  $\tau$ . Por otro lado, fuera de este rango de  $\eta$ , vemos que la funcional es siempre negativa para todos los  $\tau$ . De forma que sólo es plausible la existencia de estabilidad frente a estas perturbaciones, para valores de  $\mathcal{R} > \mathcal{R}_c$  en el rango  $0.77 \leq \eta \leq 0.99$ .

### V. CONCLUSIONES

Los equilibrios admisibles que son los del tipo de la figura 1., son estables frente a perturbaciones axisimétricas o perturbaciones helicoidales con estructura de Beltrami e igual autovalor que el del flujo base. Estas se verifican en todo el rango de estudio de  $\eta$  de 0.2 a 0.99 y los  $\tau$  correspondientes. En cambio, para perturbaciones no axisimétricas, ni helicoidales beltramizadas, resulta inestable para todo ese rango, excepto en el rango de  $\eta$  de 0.77 a 0.99, para el que se puede asegurar inestabilidad para números de Rossby inferiores a los críticos, aunque sin poder garantizar estabilidad para los números superiores a los críticos. Estos Rossby críticos se ven aumentar con el valor de  $\eta$  y de  $\tau$ . Para un  $\eta$  fijo, el crecimiento de  $\mathcal{R}_c$  con  $\tau$ , estaría indicando un aumento de la curvatura del vórtice en la entrada con un rol creciente de la vorticidad azimutal y su interacción con la velocidad axial, lo que incidiría directamente en la estabilidad del flujo. Por lo que un estudio más detallado se plantea en adelante.

### VI. REFERENCIAS

- 1- R. González, L.G. Sarasúa and A. Costa. Phys. Fluids **20**, 24106, (2008).
- 2- R. González, A. Costa and E. S. Santini, Phys. Fluids **22**, 074102 (2010).
- 3- R. González, R. Page, S. S. Sartarelli. Papers in Physics, **4**, 040002 (2012)
- 4- S. Leibovich, AIAA J. **22**, 1192 (1984)
- 5- S. Leibovich, K. Stewartson, JFM, 126, 335 (1983)
- 6- Rayleigh, Lord, Proceedings of the Royal Society of London, A93, 148 (1916)
- 7- G. K. Batchelor. An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press. Cambridge, 1967.