

LA COMPLEJIDAD ESTADÍSTICA Y LA MEDIDA DE FISHER COMO INDICADORES DE TRANSICIÓN AL CAOS EN SISTEMAS DE TIEMPO CONTINUO

STATISTICAL COMPLEXITY AND FISHER INFORMATION MEASURE USED AS INDICATORS OF TRANSITIONS TO CHAOS IN CONTINUOUS TIME SYSTEMS

V.M. San Martín¹, G.L. Ferri¹

¹Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de La Pampa
Peru y Uruguay, Santa Rosa, (6300) La Pampa, Argentina. glferri@exactas.unlpam.edu.ar

Recibido: 15/12/12 – Aceptado: 02/08/13

Usamos una variante de la complejidad estadística en conjunción con la medida de información Fisher para analizar detalles de la dinámica caótica de sistemas de tiempo continuo. La transición al caos se produce al variar uno o más parámetros del sistema. Las herramientas estadísticas utilizadas permiten distinguir entre periodicidad y caos, entre distintos tipos de transiciones al caos.

Palabras clave: Dinámica Caótica, Información de Fisher, Complejidad.

We use a variant of the statistical complexity in addition to Fisher information measure to analyze details of chaotic dynamic of continuum-time systems. The statistical tools used permit to distinguish between periodicity and chaos, between different types of chaos and between distinct types of transitions to chaos.

Keywords: Chaotic dynamics, Fisher information, Complexity.

I. INTRODUCCIÓN

Nos proponemos abordar el estudio de la dinámica de sistemas no lineales de tiempo continuo apelando a dos herramientas estadísticas: La medida de Fisher (F) y la Complejidad estadística (C). La medida de información de Fisher ha merecido gran atención últimamente en una gran variedad de aplicaciones físicas. Véanse, por ejemplo las Refs. [1–8]. La complejidad estadística tiene que ver con patrones intrincados escondidos en la dinámica que emerge de un sistema que son más simples que su dinámica [9]. Ciertamente un movimiento periódico no es complejo. Tampoco lo es un ruido blanco pese a su carácter impredecible dado que no contiene ninguna estructura no trivial. Hay una diversidad de definiciones de complejidad [10–12]. En nuestro trabajo usamos una complejidad que se caracteriza por ser pequeña tanto para un alto grado de orden como para un alto grado de desorden, con un máximo en algún estado intermedio. Una de las primeras definiciones de complejidad con estas características es la así llamada *complejidad LMC* por las iniciales de sus autores, Ref. [13]. Un estudio pormenorizado de las generalizaciones posibles de la complejidad LMC puede verse en Ref. [14] y aplicaciones recientes en Refs. [15–19]. La conjunción de ambas herramientas estadísticas fue utilizada para analizar distintos regímenes caóticos en sistemas de tiempo discreto o mapas [20]. En este trabajo llevamos este tipo de análisis a sistemas de tiempo continuo.

En la presente contribución se analizan dos sistemas de tiempo continuo que alcanzan dinámicas caóticas como consecuencia de sucesivas bifurcaciones de doblamiento de período y demostramos que la complejidad estadística y la medida de información Fisher usadas conjuntamente son una herramienta sensible para detectar y en algunos

casos anticipar bifurcaciones en la dinámica.

II. HERRAMIENTAS TEÓRICAS

A. Medida de información de Fisher

La medida de información de Fisher [2] fue definida inicialmente como una medida que caracteriza a una función de distribución de probabilidades continua. Si $f(x)$ es una función de distribución de probabilidad (FDP), la medida de Fisher asociada con $f(x)$ es [2]

$$F[f(x)] = \int \frac{|\nabla f(x)|^2}{f(x)} dx. \quad (1)$$

En [20] se introduce una versión de medida de Fisher aplicable a una FDP discreta. Sea $P = \{p_j\}_{j=1}^N$ un conjunto discreto de probabilidades, la medida de Fisher es:

$$F[P] = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{N-1} \left[2 \frac{(p_{j+1} - p_j)^2}{(p_{j+1} + p_j)} \right]. \quad (2)$$

El factor 1/4 se incluye a modo de normalización de modo que el máximo valor alcanzable por F es la unidad, y esto ocurre cuando casi todos los p_j -s son ceros y sólo algunos p_j -s son finitos. Siempre que $p_j = p_{j+1} = 0$ para algún j , el j -ésimo término en la Eq. (2) es cero. Algunas de las propiedades de la medida de Fisher original pueden perderse en esta aproximación discreta, lo cual no es importante a los fines de este trabajo. La medida de Fisher discreta es alta (cercana a la unidad) cuando las

probabilidades están concentradas en unos pocos sitios. Es igual a la unidad si la FDP es una función *tipo delta de Dirac* o bien tiene varios picos disjuntos. Es baja si las probabilidades están más distribuidas y es cero para la FDP uniforme.

B. Medidas de la complejidad estadística

En 1995, López-Ruiz, Mancini, y Calbet (LMC) inventaron lo que hoy podría llamarse la forma canónica de la medida de complejidad estadística [13] como el producto de una medida de *desorden*, o entropía multiplicada por un *desequilibrio*:

$$C[P] = H[P]Q[P]. \quad (3)$$

Para un tratamiento exhaustivo de estas medidas, véase la Ref. [14]. Como medida de desorden adoptamos la entropía de Shannon [21]

$$S[P] = - \sum_{j=1}^N p_j \ln p_j, \quad (4)$$

normalizada, o sea:

$$H[P] = S[P]/\ln N \quad (5)$$

dado que $S_{\max} = \ln N$ para el caso de equiprobabilidad. A fin de definir un *desequilibrio*, (cuánto se aparta la distribución P de la distribución uniforme P_e) es necesario definir una *distancia* entre FDP. En el trabajo de LMC usaron la distancia euclídea entre ambas FDP. Resulta más eficaz para este problema [20] medir la distancia entre dos FDP con la divergencia de Jensen-Shannon [14, 22] entre la distribución P y la FDP uniforme P_e :

$$Q[P] = Q_0 D^{JS}[P, P_e], \quad (6)$$

donde

- P_e es la distribución uniforme,
- D^{JS} , la divergencia de Jensen-Shannon, está definida por

$$D^{JS}[P, P_e] = S \left[\frac{P + P_e}{2} \right] - \frac{1}{2} S[P] - \frac{1}{2} \ln N, \quad (7)$$

- y Q_0 es un factor de normalización [14]

$$Q_0 = -2 \left[\left(\frac{N+1}{N} \right) \ln(N+1) - 2 \ln(2N) + \ln N \right]^{-1}, \quad (8)$$

de modo que $0 \leq Q \leq 1$.

C. Distribución de probabilidades

Para evaluar la complejidad estadística, el punto de partida es determinar una distribución de probabilidades P asociada con la dinámica o la serie temporal en estudio. Se han propuesto distintos procedimientos para la elección de P . Pueden mencionarse procedimientos basados en la construcción de histogramas con datos de la serie temporal [23], dinámica simbólica [24], análisis de Fourier [25], transformaciones wavelet [26], o probabilidad de permutaciones [27].

Trabajamos con sistemas no lineales de tiempo continuo cuya dinámica depende de un parámetro de control. A medida que este parámetro va cambiando de valor, la dinámica puede cambiar su comportamiento, pasando por ejemplo de periódica, a biperiódica, caótica con diferentes atractores.

Una vez obtenida la serie temporal mediante integración numérica, para un valor dado del parámetro de control, seleccionamos todos los mínimos locales de la serie. Una dinámica periódica tiene un atractor que consiste en un único punto en este “espacio de mínimos”, dos puntos si la solución es biperiódica o una región del espacio si se trata de una dinámica caótica. La FDP la obtenemos construyendo un histograma con estos mínimos. Así, si la dinámica es periódica, la FDP obtenida a partir del histograma tiene un sólo p_j distinto de cero. En un diagrama de bifurcaciones, donde graficamos todos los mínimos obtenidos para cada valor del parámetro de control, obtenemos una línea única en las regiones donde la dinámica es estrictamente periódica, dos líneas cuando es biperiódica, una línea “gruesa” si la dinámica es cuasiperiódica, o una zona extensa en caso de dinámica caótica.

III. APLICACIONES A SISTEMAS DE TIEMPO CONTINUO

Para cada uno de los sistemas estudiados se realizó un análisis exploratorio de las series temporales y los diagramas de bifurcación de cada uno para determinar la duración de sus regímenes transitorios, la longitud apropiada de los pasos de integración, los distintos intervalos del parámetro de control asociadas con diferentes dinámicas, la extensión de los atractores, etc. Con esto, se seleccionó el rango de valores del parámetro de control de cada sistema a estudiar y el número de unidades temporales a descartar para eliminar el transitorio de las series temporales. En todos los casos estudiados elegimos una región del espacio de mínimos que contuviera a todos los atractores, la dividimos en mil celdas y contamos la cantidad de mínimos que cae en cada una para obtener el histograma.

Para cada valor del parámetro de control de los sistemas estudiados seguimos el siguiente procedimiento.

1. Obtención de la serie temporal: se integra numéri-

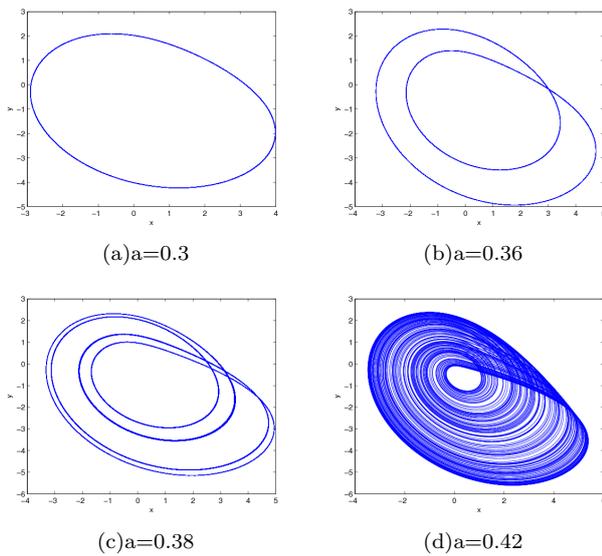


Figura 1: Espacios fase correspondientes al sistema (9), (10) y (11) para distintos valores del parámetro de control.

amente el sistema y se elimina el transitorio de la serie temporal.

2. Obtención de los mínimos de la serie temporal: en primera instancia se calculan los mínimos de la serie por comparación de cada punto de la serie con sus vecinos inmediatos. Luego se toma cada mínimo y los puntos anterior y posterior al mismo, se ajusta una parábola con estos 3 datos y se calcula su vértice, tomándose como mínimo la ordenada de dicho punto.
3. Construcción del histogramas de 1000 celdas en el espacio de mínimos.
4. Cálculo de la medida de información de Fisher y de la complejidad estadística.

A. Rossler

El sistema tridimensional de Rossler es [29, 30]:

$$\dot{x} = -(y + z) \quad (9)$$

$$\dot{y} = x + ay \quad (10)$$

$$\dot{z} = b + (x - c)z. \quad (11)$$

Se mantuvieron fijos los parametros $b = 2$ y $c = 4$. Variando a en el intervalo $0,32 < a < 0,42$ el sistema experimenta una serie de bifurcaciones de doblamiento de período, culminando en una dinámica aperiódica como puede verse en la figura 1.

Para construir el diagrama de bifurcación, integramos el sistema variando el parámetro de control a a lo largo

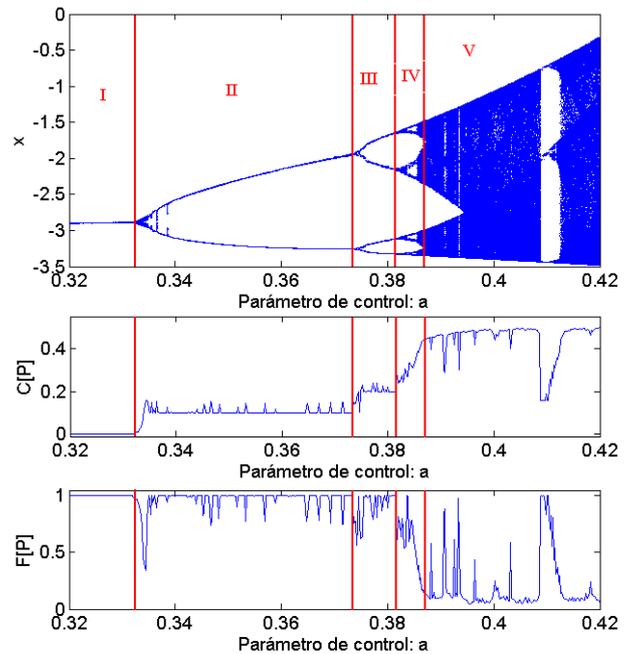


Figura 2: Diagramas de complejidad y Fisher en función del parámetro de control comparados con el diagrama de bifurcación del sistema (9), (10) y (11).

del intervalo indicado más arriba, con incrementos $\Delta a = 0,0007$. La integración se hizo partiendo de condiciones iniciales aleatorias, durante 10000 unidades temporales en pasos $\delta t = 0,01$. Se descartaron luego los valores correspondientes a las primeras 500 unidades temporales a fin de eliminar transitorios. A continuación se construyó la serie temporal con los mínimos locales, y se seleccionó el intervalo $[x_{\min}, x_{\max}] = [-4,2, 2,5]$ del espacio de mínimos, que fue dividido en mil celdas sobre las cuales se construyó el histograma de frecuencias normalizado. El diagrama de bifurcación junto con los gráficos de la complejidad y la medida de Fisher en función del parámetro de control a se muestran en la figura 2.

En la figura 2 puede verse que en la región I el sistema tiene una dinámica periódica de período uno. Como es de esperarse, en esta región la complejidad adopta un valor cero, un movimiento periódico no es complejo, mientras que la medida de Fisher es igual a la unidad. La FDP es lo más abrupta que puede ser: vale uno para un p_j y cero para el resto. En la región II el sistema experimenta una periodicidad de período dos. En esta zona la complejidad adopta un valor aproximado de 0.1 y la medida de Fisher también vale la unidad. La FDP consta de sólo dos picos aislados. En la region III, se distingue un período cuatro. Aquí $C \simeq 0,2$ y $F \simeq 1$.

Si bien, teóricamente, los fenómenos de bifurcación de doblamiento de período ocurren en un punto, la solución es de lenta convergencia antes y después de la bifurcación, por lo tanto, al aproximarse el parámetro de control al punto de bifurcación, la solución tiene alguna inestabilidad que se expresa en un pequeño desplazamiento de

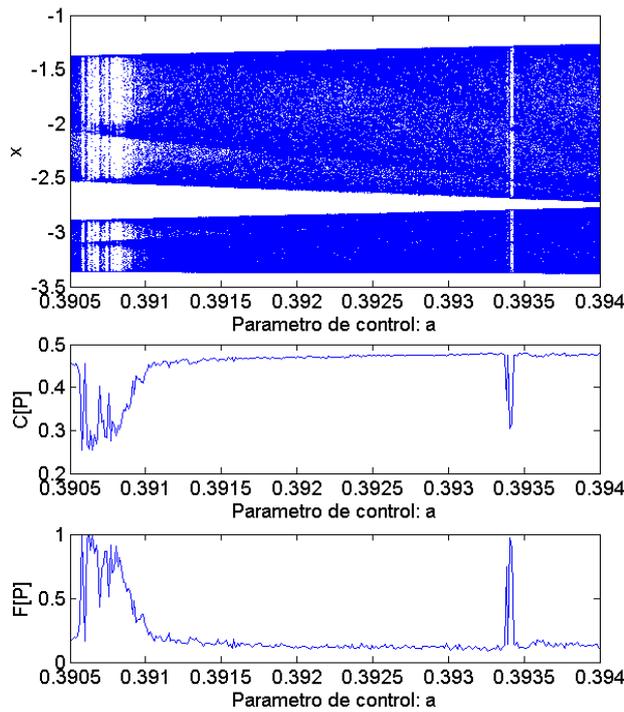


Figura 3: Detalle del diagrama de bifurcación del sistema (9), (10) y (11) en donde se observan ventanas periódicas.

los mínimos, la FDP se ensancha, la medida de Fisher toma valores menores que la unidad y la complejidad aumenta. Aumento de complejidad y disminución de la medida de Fisher son indicadores de que se aproxima una bifurcación de un atractor más simple a uno más complejo como se evidencia en el primer tramo de la zona II del diagrama de bifurcación que se presenta en la figura 2 donde se produce una transición de una dinámica periódica de período un o a otra de período dos.

En la zona indicado como IV se produce una cascada de doblamientos de período, que concluye en una dinámica caótica. Puede verse como la complejidad estadística aumenta su valor rápidamente a medida que transcurre este cambio en la dinámica. Por otro lado, la medida de Fisher va reduciendo su valor a medida que se producen los doblamientos de período.

En la región V se contempla un comportamiento aperiódico del sistema. Dicho comportamiento viene acompañado por una medida de complejidad alta, $C \simeq 0,485$, y una medida de Fisher baja, $F \simeq 0,05$. En esta región hay varias ventanas periódicas. Algunas de ellas se observan en la figura 3 y otras no son visibles debido a la resolución de la figura, pero son detectadas por las medidas de información. En coincidencia con estas ventanas la complejidad estadística adopta abruptamente valores bajos y la medida de Fisher adquiere repentinamente valores altos.

La ventana más notoria dentro de la región estudiada se da para $0,4088 \lesssim a \lesssim 0,4126$. Allí, el atractor caótico converge abruptamente a un atractor de período 3, y a

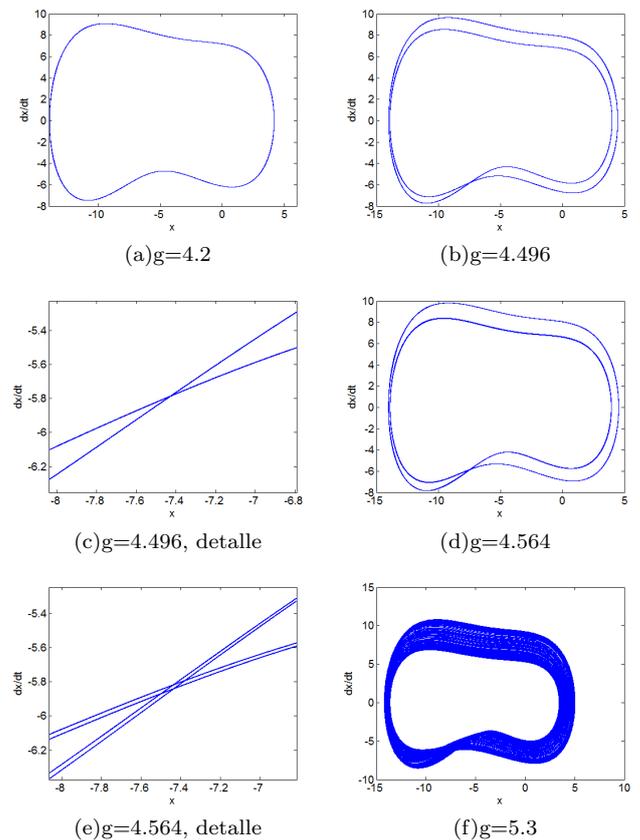


Figura 4: Espacios fase correspondientes al sistema (12) para distintos valores del parámetro de control.

medida que se va aumentando el valor del parámetro de control vuelve a producirse una cascada de doblamientos de período que termina dando lugar a una nueva dinámica caótica. En la región de período 3 tenemos $C \simeq 0,1576$ y $F = 1$. Más tarde, mientras se producen los doblamientos de período, la complejidad aumenta su valor y la medida de Fisher lo reduce.

B. Oscilador no lineal paramétricamente excitado

Como segundo ejemplo analizamos el oscilador no lineal [28, 30]

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \epsilon[2\mu\dot{x} + \delta x^2 + g \cos(\Omega t)x] + \epsilon^2 \alpha x^3 = 0. \quad (12)$$

Manteniendo fijos los parámetros $\epsilon = 0,1$, $\omega_0 = 0,1$, $\delta = 5,0$, $\alpha = 4,0$, $\Omega = 2,0$ y $\mu = 1$ usamos g como parámetro de control. Para $g \in [4,2, 5,3]$ el sistema experimenta una serie de doblamientos de período que desemboca en una dinámica caótica [30].

Este sistema fue integrado para valores de g dentro del rango antes mencionado a pasos $\Delta g = 0,002$. Para

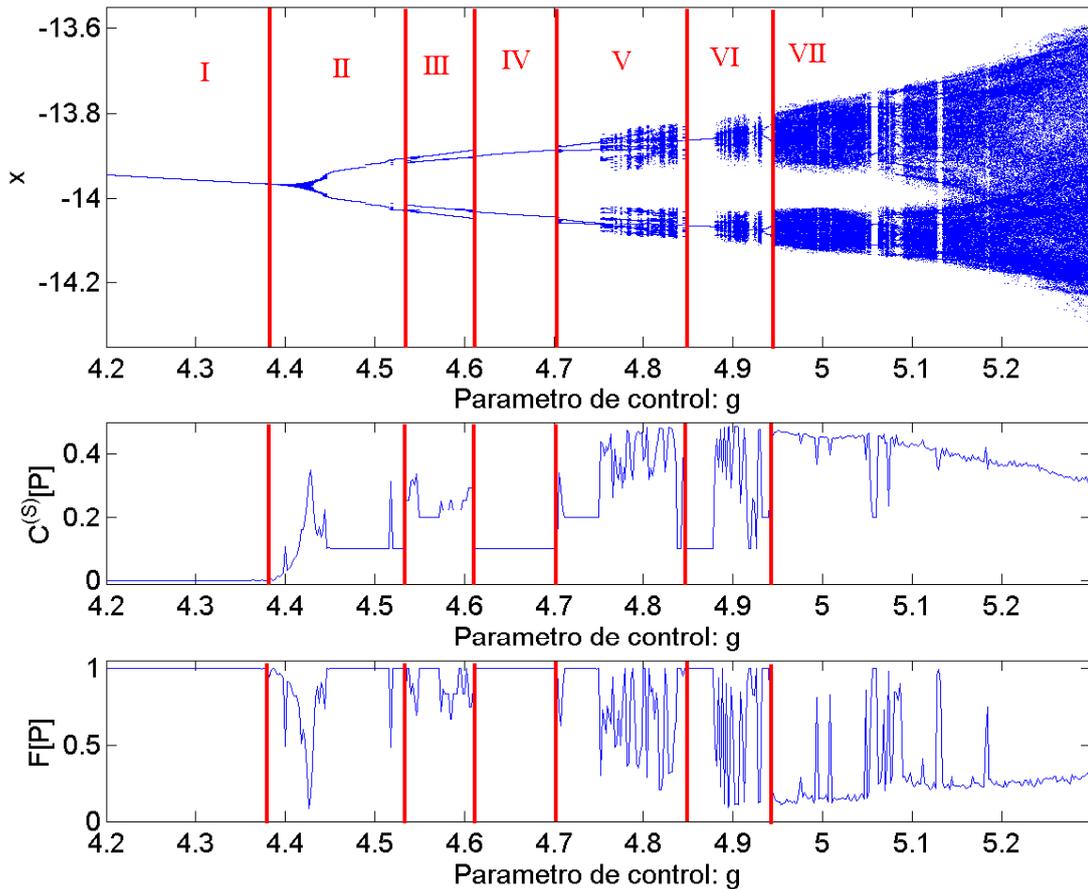


Figura 5: Diagramas de complejidad y Fisher en función del parámetro de control comparados con el diagrama de bifurcación del sistema (12).

cada uno de estos valores de g , se realizó una integración numérica de 7000 unidades temporales a pasos de $\delta t = 0,01$ y con las condiciones iniciales $x_0 = -10$ y $\dot{x}_0 = 10$. De las 7000 unidades temporales se descartaron las 500 primeras para eliminar el transitorio. Como espacio de mínimos se tomó el intervalo $[x_{\min}, x_{\max}] = [-14,5, -13,5]$

En la figura 4 se presentan espacios fase correspondientes a este sistema para los valores del parámetro de control $g = 4,2$, $g = 4,496$, $g = 4,564$ y $g = 5,3$, en los que se ve, respectivamente, una dinámica de período uno, una de período dos, una de período cuatro y una dinámica caótica. Para las dinámicas correspondientes a $g = 4,496$ y $g = 4,564$, se presenta también un detalle del espacio fase que permite diferenciar claramente los dos comportamientos del sistema.

El diagrama de bifurcación y las medidas C y F en función de g están en la figura 5. En ella se puede apreciar que, dentro de la región I, el sistema tiene una dinámica periódica de período uno. Aquí la complejidad adopta el valor cero y la medida de Fisher vale uno. En las regiones II y IV el sistema experimenta una periodicidad de período dos. En estas zonas $C \simeq 0,1$ y $F = 1$. En la región III, se distingue un período cuatro, con $C \simeq 0,2$

y $F = 1$. En este gráfico, al igual que en el correspondiente al sistema de Rossler se puede ver cómo, durante las transiciones entre dos dinámicas periódicas de distintos períodos, tanto C como F presentan picos en sus respectivos gráficos. Es decir, durante estos procesos, la complejidad ha experimentado un aumento de su valor y la medida de Fisher una reducción del mismo.

En la zona VII, la dinámica es claramente aperiódica. Los valores típicos de C y F para esta región son, respectivamente, de 0.44 y 0.58.

En las regiones V y VI, el sistema experimenta una sucesión de doblamientos de período que dan lugar a dinámicas aperiódicas, y luego evolucionan nuevamente a nuevos regímenes periódicos. Vemos como en estas regiones la complejidad estadística va aumentando su valor a medida que se tiende a una dinámica caótica y luego esta cantidad se reduce nuevamente al volver una dinámica periódica. Del mismo modo, la información de Fisher adopta un valor igual a la unidad en los momentos de periodicidad y simultáneamente con la complejización de la dinámica del sistema, va adquiriendo valores cada vez más bajos hasta llegar a medidas típicas del comportamiento caótico. Luego de esto y, de forma coincidente con el retorno a una dinámica periódica, Fisher adopta nuevamente el valor

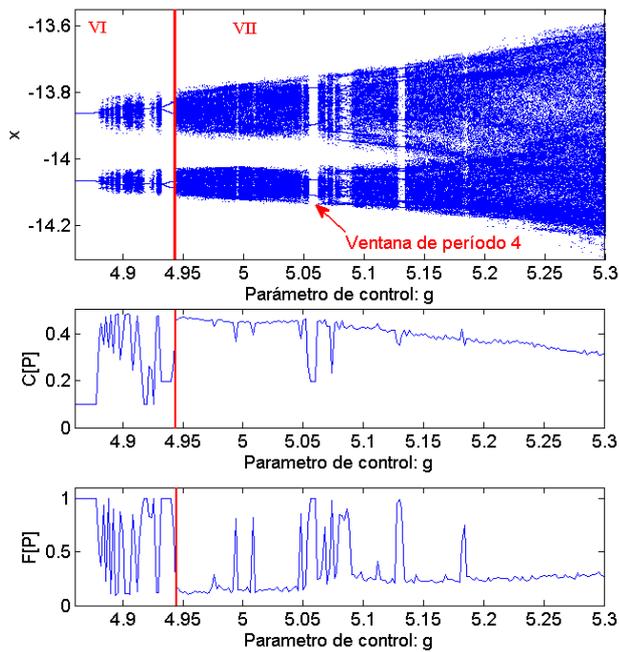


Figura 6: Detalles de los diagramas de complejidad y Fisher y del diagrama de bifurcación del sistema (12) en las regiones VI y VII.

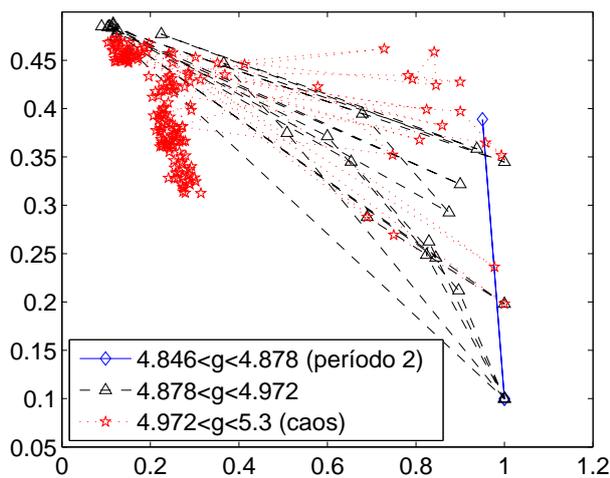


Figura 7: Plano $F - C$ para el sistema (12).

uno. En la figura 6 se presenta en detalle las regiones VI y VII.

C. Diagrama F vs. C

En la figura 7 se presenta un gráfico de C versus F para el sistema 12 en el rango del parámetro de control $4,86 < g < 5,3$. Puede notarse en el diagrama $F - C$, dos puntos asociados a dinámicas periódicas de períodos dos y cuatro

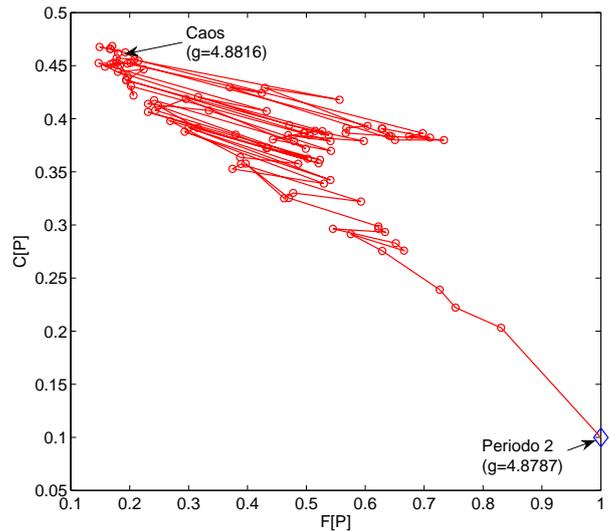


Figura 8: Ruta al caos el sistema (12).

respectivamente que se encuentran ubicados sobre una línea en la que $F = 1$.

Si comenzamos a recorrer el gráfico desde la región de período dos, ubicada en la esquina inferior derecha del mismo, seguimos luego por una línea que da cuenta de una dinámica caótica correspondiente al parámetro de control $4,846 \lesssim g \lesssim 4,878$. Puede verse que los puntos correspondientes a esta línea se concentran mayoritariamente en la región superior izquierda del gráfico, a excepción de algunos correspondientes a la transición entre el régimen periódico y el caótico que se encuentran ubicados dispersos entre las esquinas inferior derecha y superior izquierda. En $4,878 \lesssim g \lesssim 4,918$ hay alternancia de dinámicas caóticas con ventanas periódicas. Eso hace oscilar los puntos en el diagrama $F - C$ de izquierda a derecha.

Luego de esta dinámica caótica nos encontramos de nuevo en presencia de un período dos ($4,918 \lesssim g \lesssim 4,92$), por lo que la curva que estamos siguiendo vuelve a visitar el punto inicial.

Se producen más tarde dos dinámicas caóticas, correspondientes a $4,92 \lesssim g \lesssim 4,926$ y $4,926 \lesssim g \lesssim 4,932$, separadas por una región de período dos ($g \simeq 4,926$). Durante los regímenes caóticos, la línea en el espacio $F - C$ explora la región central del gráfico, orientándose hacia la esquina superior izquierda del mismo. Durante la dinámica periódica la línea vuelve nuevamente al punto de inicio. Después de la última dinámica caótica se vislumbra una nueva dinámica periódica, en este caso, de período cuatro, que corresponde a $4,932 \lesssim g \lesssim 4,94$. Aquí, en la línea alcanza un punto correspondiente a la abscisa $F = 1$ y cuya ordenada es $C \simeq 0,198$.

Por último, en este gráfico se ha representado la dinámica caótica correspondiente al rango $4,94 \lesssim g < 5,3$. Se ve como los puntos correspondientes a estos valores del

parámetro de control se ubican nuevamente próximos a la esquina superior izquierda del gráfico, región típicamente correspondiente a dinámicas caóticas. Dentro de esta región, y en coincidencia con los valores del parámetro de control que tienen asociados ventanas periódicas puede verse como los puntos en el gráfico $F - C$ incursionan a regiones próximas a la línea $F = 1$. Particularmente se distingue con claridad que para los parámetros de control asociados a una ventana periódica de período cuatro, los puntos de la línea se ubican sobre el punto asociado al período cuatro antes ubicado.

Finalmente seleccionamos una de las rutas al caos para visualizarla en el plano $F - C$, la cual puede verse en la figura 8.

IV. CONCLUSIONES

Las medidas de complejidad estadística y de información de Fisher resultaron ser herramienta útiles para distin-

guir entre dinámicas periódicas de distintos períodos y dinámicas caóticas en sistemas de tiempo continuo.

La medida de información de Fisher es sumamente eficaz para distinguir entre dinámicas periódicas y dinámicas caóticas, presentando en las primeras un valor constante igual a la unidad y valores menores en dinámicas más complejas o caóticas. Además, permite detectar y anticipar las transiciones entre comportamientos periódicos de distintos periodos.

Por su parte, la complejidad estadística permite distinguir comportamientos periódicos de distintos períodos, asignandoles a cada uno un valor típico que depende, no obstante, del modo en que es construida la distribución de probabilidades utilizada para analizar el sistema. En este caso, dichos valores son susceptibles al cambio del número de celdas con que se construye el Histograma. También permite distinguir dinámicas periódicas de dinámicas caóticas, ya que estas últimas también poseen valores típicos distintos de los correspondientes a los comportamientos periódicos.

-
- [1] B.R.Frieden, R.A. Gatenby (Eds.) *Exploratory Data Analysis Using Fisher Information* (Springer-Verlag, London, 2007).
 - [2] R. Frieden, *Science from Fisher information* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2004).
 - [3] B.R. Frieden, B.H. Soffer, Phys. Rev. E **52**, (1995) 2274.
 - [4] F. Pennini, A. Plastino, Phys. Rev. E **69**, (2004) 057101.
 - [5] F. Pennini, A.R. Plastino, A. Plastino, Physica A **258**, (1998) 446-457.
 - [6] M.J.W Hall, Phys. Rev. A **62**, (2000) 012107.
 - [7] B. Roy Frieden, A. Plastino, A.R. Plastino, Physica A, **391**, (2012) 2300-2305.
 - [8] A.M. Kowalski, M.T. Martín, A. Plastino, O.A. Rosso, Physica A, **390**, (2011) 2435-2441.
 - [9] H. Kantz, J. Kurths, G. Meyer-Kress, *Nonlinear analysis of physiological data*, (Springer, Berlin, Germany, 1998).
 - [10] J.P. Crutchfield, K. Young, Phys. Rev. Lett. **63**, (1989) 105-108.
 - [11] D.P. Feldman, J.P. Crutchfield, Phys. Lett. A **238**, (1998) 244-252.
 - [12] J.S. Shiner, M. Davison, P.T.Landsberg, Phys. Rev. E **62**, (2000) 3000-3003.
 - [13] R. López-Ruiz, H.L. Mancini, X. Calbet, Phys. Lett. A, **209**, (1995) 321-326.
 - [14] M.T. Martín, A. Plastino, O.A. Rosso, Physica A **369**, (2006) 439-462.
 - [15] O.A. Rosso, H.A. Larrondo, M.T. Martin, A. Plastino, M.A. Fuentes, Phys. Rev. Lett. **99**, (2007) 154102.
 - [16] X. Calbet, R. López-Ruiz, Phys. Rev. E, **63**, (2001) 066116.
 - [17] O.A. Rosso, M.T. Martin, A. Plastino, Physica A, **320**, (2003) 497-511.
 - [18] L. De Micco, J.G. Fernández, H.A. Larrondo, A. Plastino, O.A. Rosso, Physica A, **391**, (2012) 2564-2575.
 - [19] O.A. Rosso, L.C. Carpi, P.M. Saco, M. Gómez Ravetti, A. Plastino, H.A. Larrondo, Physica A, **391**, (2012) 42-55
 - [20] G.L. Ferri, F. Pennini, A. Plastino, Phys. Lett. A, **373**, (2009) 2210-2214.
 - [21] C.E. Shannon, The Bell System Technical Journal, **27**, (1948) 379-423.
 - [22] A. Majtey, P.W. Lamberti, M.T. Martin, A. Plastino, Eur. Phys. Journal D, **32**, (2005) 413-419.
 - [23] M.T. Martin, J. Perez, A. Plastino, Physica A **291**, (2001) 523-532.
 - [24] K. Mischaikow, M. Mrozek, J. Reiss, A. Szymczak, Phys. Rev. Lett. **82**, (1999) 1144.
 - [25] G.E. Powell, I.C. Percival, J. Phys. A: Math. Gen. **12**, (1979) 2053.
 - [26] O.A. Rosso, M.L. Mairal, Physica A **312**, (2002) 469-504.
 - [27] C. Bandt, B. Pompe, Phys. Rev. Lett. **88**, (2002) 174102.
 - [28] L.D. Zavodney, A.H. Nayfeh, N.E. Sanchez, J. Sound Vib., **129**, (1989) 417-442.
 - [29] O.E. Rossler, Phys. Lett. A **57**, (1976) 397-398.
 - [30] A.N. Nayfeh, B. Balachandran, *Applied Nonlinear Dynamics*, (Wiley, New York, USA, 1995).