

# TOMA SIMULTANEA DE NUTRIENTES Y AGUA POR RAICES DE CULTIVOS

## SIMULTANEOUS NUTRIENT AND WATER UPTAKE BY ROOTS OF CROPS

J.C. Reginato <sup>a</sup>, J.L. Blengino Albrieu <sup>a</sup>, M.A. Bettera <sup>a</sup>, D.A. Tarzia <sup>b</sup>

<sup>a</sup> Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas Físico – Químicas y Naturales – Universidad Nacional de Río Cuarto – Córdoba – Argentina

<sup>b</sup> CONICET – Departamento de Matemática – Facultad de Ciencias Empresariales – Universidad Austral – Rosario – Argentina

Recibido: 15/11/2013; Aceptado: 26/05/2014

Se examina la toma simultánea de nutrientes y agua por raíces de cultivos creciendo en volúmenes fijos de suelo (macetas). A diferencia de modelos previos se propone un modelo de toma de agua, nutrientes y crecimiento de raíz acoplados mediante la formulación de un problema de frontera móvil unidimensional que involucra el radio del rizocilindro de suelo adyacente a la raíz. Para el transporte de agua en suelo se utiliza el modelo de Darcy – van Genuchten – Mualem y para el transporte de nutrientes el modelo de Cushman – Barber. Las ecuaciones resultantes son resueltas mediante la aplicación del método de inmovilización de dominio y del método de elementos finitos no lineales. Los parámetros de los modelos de transporte se obtienen a partir de datos experimentales obtenidos por Personne (2003) para el modelo de van Genuchten – Mualem (1981) y de Samal (2010) para el modelo de Cushman – Barber (1979). Se presentan resultados comparativos para la toma de nutrientes para un mismo suelo con diferentes contenidos de agua así como para la toma de nutrientes para bajas y altas concentraciones de nutriente a un mismo contenido de agua de suelo en función de parámetros característicos del sistema suelo- planta-agua-nutrientes.

*Palabras clave: toma de nutrientes y agua, modelo de frontera móvil.*

It is examined the simultaneous nutrients and water uptake by roots of crops growing in fixed volumes of soil (pots). Unlike previous models it is proposed a model of coupled water, nutrients and growth through the formulation of an one-dimensional mobile moving boundary problem involving the radius of the rhizocylinder of soil adjacent to the root. Cushman-Barber model is used for the transport of ions in soil and Darcy – van Genuchten – Mualem for the water transport. The resulting equations are solved through the application of the method of immobilization of domain and the method of non-linear finite elements. The parameters of the transport models are provide by experimental data obtained by Personne (2003) for the model of van Genuchten – Mualem (1980) and Samal (2010) for the Cushman – Barber (1979) model. Comparative results for the nutrient uptake for an unique soil with different water contents as well as the nutrient uptake for low and high concentrations of nutrients to a same water content of soil as a function of typical parameters of the system soil – plant – water – nutrient are presented.

*Keywords: nutrient and water uptake, moving boundary model.*

### I. INTRODUCCIÓN

Durante las pasadas cuatro décadas diferentes modelos mecanísticos de toma de nutrientes han sido desarrollados para simular la toma de nutrientes. Usualmente estos modelos consisten de tres componentes básicos<sup>1</sup>: (i) movimiento de solutos en suelo hacia las raíces de las plantas descritas por una ecuación de continuidad; (ii) una cinética de toma de nutrientes descrita por la ecuación tipo Michaelis-Menten; (iii) la toma de nutrientes como resultado del crecimiento de raíces y competición entre raíces introduciendo crecimiento de raíces y parámetros morfológicos. Dos categorías de modelos han evolucionado, de estado estacionario y transientes<sup>2</sup>. NUTRIENT UPTAKE and NST 3.0 son ejemplos de

modelos transientes con soluciones numéricas, mientras los modelos SSAND<sup>3</sup> y PCATS<sup>4</sup> son modelos de estado estacionario. Los modelos transientes utilizan soluciones numéricas como una muy bien establecida aproximación a los modelos mecanísticos de toma de nutrientes<sup>2</sup>. El modelo de Barber-Cushman es muy conocido y ampliamente usado en esta categoría. Los modelos NUTRIENT UPTAKE<sup>5</sup> y NST 3.0<sup>6</sup> son la versión para PC del modelo de Barber-Cushman. Desde otro punto de vista, problemas de transferencia de masa y calor con cambio de fase tales como evaporación, condensación, congelamiento, fusión, sublimación han tenido una amplia aplicación en procesos de separación, tecnología de alimentos, calor y migración en suelos. Este tipo de problemas se conocen como problemas de frontera libre o móvil dependiendo si la interface es conocida o no a

\*Correspondencia autor: reginato.juancarlos@gmail.com

priori. Una extensa bibliografía y una revisión de soluciones explícitas sobre problemas de frontera libre y móvil para la ecuación del calor-difusión ha sido dada por Tarzia<sup>7,8</sup>. Debido a la no linealidad de los problemas, las soluciones usualmente involucran dificultades matemáticas y los métodos analíticos pueden ser solo aplicados para sistemas idealizados. Los métodos numéricos, en cambio permiten considerar características estructurales y composicionales mediante modelos detallados. La metodología de los problemas de frontera libre y móvil también ha sido aplicada a problemas agronómicos. Así, existen trabajos previos en esta área para la cual la toma de nutrientes y agua ha sido implícitamente modelada mediante problemas de frontera móvil<sup>9,10</sup>. Modelos de frontera libre y móvil han sido presentados por Reginato et al.<sup>11,12</sup> y Jonard et al.<sup>13</sup>. En este trabajo, el objetivo es considerar una versión mejorada de nuestro modelo de frontera móvil pero ahora aplicado a la toma simultánea de nutrientes y agua. En particular, estudiamos y comparamos la toma de nutrientes a diferentes contenidos de agua del suelo y comparamos la toma de nutrientes obtenidas mediante el modelo de frontera fija NST 3.0 y nuestro modelo mejorado de frontera móvil.

## II. METODOS

### El modelo de frontera móvil

Este modelo está basado en las mismas suposiciones formuladas por el modelo de Barber-Cushman, pero ahora, el modelo incorpora una nueva condición de borde para la competición de raíces (entre raíces de un sistema radical) la cual representa un flujo neto de nutrientes sobre la frontera móvil  $R(t)$ . Esta frontera móvil está dada por la semidistancia instantánea entre ejes de raíces la cual resulta de la variación de longitud de raíces. Así, la frontera móvil es función de la longitud instantánea de raíz  $\ell(t)$  la cual es una función del tiempo conocida a priori. Una representación de la nueva condición puede ser visualizada asumiendo un volumen fijo de suelo en el cual el sistema radical está distribuido como un apilamiento homogéneo de raíces, es decir, proponemos un sistema radical idealizado sumergido en un volumen fijo de suelo (macetas) en lugar de una única raíz en un volumen infinito de suelo (Figura 1)

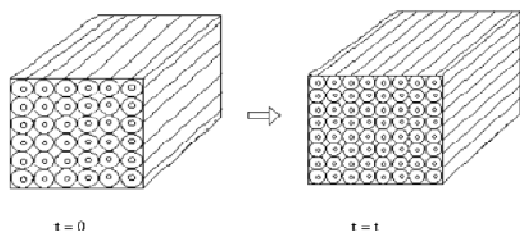


Figura 1. Enraizamiento uniforme en suelo y su evolución en el tiempo

Las condiciones de luz y temperatura son asumidas como controladas (como en una cámara de siembra). Los pelos radicales no son tenidos en cuenta. Con estas

\*Correspondencia autor: reginato.juancarlos@gmail.com

hipótesis, proponemos el siguiente método para estimar los flujos de nutrientes y agua sobre la raíz (y en consecuencia la toma de nutrientes) mediante un modelo de frontera móvil unidimensional a una fase (el suelo) en coordenadas cilíndricas:

$$[\theta(\psi) + b] \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\theta(\psi)D}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial C}{\partial r} \right) + \frac{v(\psi)s_o}{r} \frac{\partial C}{\partial r}, \quad (1)$$

$$s_o < r < R(t), \quad t > 0.$$

$$C(r, 0) = C_o(r), \quad s_o < r < R_o. \quad (2)$$

$$D\theta(\psi(s_o, t)) \frac{\partial C(s_o, t)}{\partial r} + v(\psi(s_o, t))C(s_o, t) = \frac{J_m [C(s_o, t) - C_u]}{K_m + [C(s_o, t) - C_u]}, \quad t > 0. \quad (3)$$

$$D\theta(\psi(R(t), t)) \frac{\partial C(R(t), t)}{\partial r} + \frac{v(\psi(R(t), t))}{R(t)} C(R(t), t) = 0, \quad t > 0. \quad (4)$$

$$C_h((\psi(r, t)) \frac{\partial \psi(r, t)}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ rk(\psi(r, t)) \frac{\partial \psi(r, t)}{\partial r} \right], \quad (5)$$

$$s_o < r < R(t), \quad t > 0.$$

$$\psi(r, 0) = \psi_o(r), \quad s_o < r < R_o. \quad (6)$$

$$G(\psi(s_o, t)) = 2\pi s_o k(\psi(s_o, t)) \frac{\partial \psi(s_o, t)}{\partial r}, \quad (7)$$

$$t > 0.$$

$$\psi(R(t), t) = \varphi(R_o), \quad t > 0. \quad (8)$$

Con la frontera móvil  $R(t)$  dada por:

$$R(t) = \sqrt{\frac{\ell_o}{\ell(t)} (R_o^2 - s_o^2) + s_o^2}, \quad t > 0. \quad (9)$$

y

$$v = v(\psi(r, t)) = k(\psi(r, t)) \frac{\partial \psi(r, t)}{\partial r} \quad (10)$$

donde  $r$  es la distancia radial desde el eje de la raíz [cm];  $t$  es el tiempo [s];  $b$  es el poder buffer del nutriente en suelo [adimensional], con  $b$  dado por el cambio  $dC_s / dC$  siendo  $C$  la concentración de ion en solución suelo [mol cm<sup>-3</sup> de solución suelo] y  $C_s$  la concentración de ion intercambiabile con el suelo [mol cm<sup>-3</sup> suelo];  $D$  es el coeficiente de difusión [cm<sup>2</sup> s<sup>-1</sup>];  $\theta$  es el contenido de agua del suelo [adimensional],  $s_o$  es el radio de la raíz [cm] (para ciertos cultivos es constante);  $v$  es la velocidad efectiva de flujo de solución suelo [cm s<sup>-1</sup>];  $R_o$  es la semidistancia inicial entre raíces [cm];  $J_m$  es el influjo máximo de nutrientes [mol cm<sup>-2</sup> s<sup>-1</sup>];  $K_m$  es la concentración para la cual el influjo es  $J_m / 2$  [mol cm<sup>-3</sup>];  $C_u$  es la concentración

umbral para la cual el influjo se detiene [ $\text{mol cm}^{-3}$ ];  $R(t)$  es la semidistancia entre ejes de la raíces [cm];  $C_0(r)$  es la concentración inicial en [ $s_0, R_0$ ] [ $\text{mol cm}^{-3}$ ] y  $\ell(t)$  es la longitud de raíz en función del tiempo [cm] (la ley conocida a priori de crecimiento radical puede ser lineal, exponencial o sigmoidea); en los resultados obtenidos hemos usado crecimiento exponencial definido por  $\ell(t) = \ell_0 e^{k t}$  con unidades de  $k$  en [ $s^{-1}$ ]. La expresión (1) es la ecuación de transporte difusivo y convectivo de iones en suelo y la ecuación (2) corresponde al perfil inicial de concentraciones. La ecuación (3) representa el balance de masa sobre la superficie de la raíz donde todo el nutriente que arriba es incorporado mediante una cinética tipo Michaelis-Menten. La ecuación (4) representa una condición de flujo nulo de nutrientes sobre el límite móvil de no transferencia (puede entrar agua pero no nutrientes). Hacemos notar que la ecuación (4) es una versión corregida con respecto a una similar usada en nuestro trabajo previo<sup>12</sup>. La ecuación (5) representa el transporte de agua en suelo, donde  $\psi$  es el potencial agua [cm],  $k$  es la conductividad hidráulica [ $s^{-1}$ ] y  $C_h (=d\theta/d\psi)$  es la capacidad hídrica diferencial [ $\text{cm}^{-1}$ ]. Las funciones  $\theta(\psi)$ ,  $k(\psi)$  y  $C_h(\psi)$  obedecen las ecuaciones del modelo van Genuchten de conductividad hidráulica en suelos no saturados<sup>14</sup>. La ecuación (6) es el perfil inicial de potenciales agua en suelo. La ecuación (7) representa el proceso de absorción de agua por la raíz y la ecuación (8) representa una condición de potencial agua constante sobre la frontera móvil (asegura un contenido de agua constante). La ecuación (9) para la frontera móvil es una versión mejorada de una condición similar usada en nuestro modelo previo e introduce un menor error en el algoritmo computacional que resuelve el problema de frontera móvil (Ver Apéndice I). A diferencia de la expresión propuesta para  $R(t)$  en nuestro modelo previo la cual estaba basada en consideraciones de volumen constante de suelo incluyendo raíces (si el volumen total de suelo más raíces permanece constante, entonces la cantidad de suelo disponible para las raíces no será constante en el tiempo, es decir, las raíces crecen a expensas de la disminución del volumen de suelo), ahora es considerado solo un volumen constante de suelo excluyendo las raíces. Una vez resuelto nuestro problema de frontera móvil se obtienen las concentraciones y potenciales agua sobre la superficie de la raíz y se estiman los correspondientes flujos entrantes de agua y nutrientes. La ecuación (10) representa el acoplamiento entre el flujo masal (hidráulico) y el potencial agua. Con estos flujos y mediante una integración sobre un dominio variable (la raíz creciendo) se obtienen las siguientes fórmulas de toma acumulada de nutrientes<sup>15,16,17</sup> y agua<sup>18</sup> respectivamente. Para la toma de nutrientes se ha verificado que la fórmula (10) es correcta comparada a las usadas por Claassen-Barber y Cushman<sup>17,19</sup>

$$U_{\text{ion}}(t_f - t_i) = 2\pi s_0 \int_{t_i}^{t_f} J(C(s_0, t)) \ell(t) dt$$

$$\text{con } J(C(s_0, t)) = \frac{J_m [C(s_0, t) - C_u]}{K_m + [C(s_0, t) - C_u]} \quad (11)$$

$$U_{\text{agua}}(t_f - t_i) = \int_{t_i}^{t_f} G(\psi(s_0, t)) \ell(t) dt$$

$$\text{con } G(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 > \psi > \psi_1 \\ S_{\text{max}} & \text{si } \psi_1 > \psi > \psi_2 \\ S_{\text{max}} \frac{\psi(s_0, t) - \psi_3}{\psi_2 - \psi_3} & \text{si } \psi_2 > \psi > \psi_3 \\ 0 & \text{si } \psi > \psi_3 \end{cases} \quad (12)$$

Para ambas fórmula de toma acumulada la longitud de raíz es dada por  $\ell(t) = \ell_0 e^{k t}$ . Una representación gráfica de la función  $G(t)$ <sup>20</sup> es dada en la Figura 2.

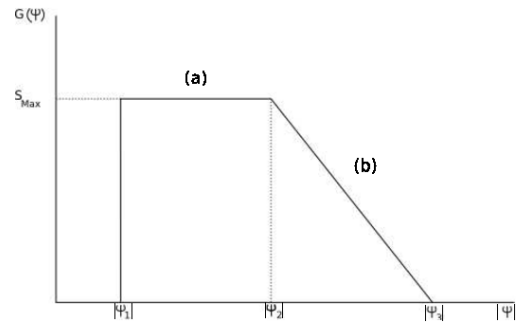


Figura 2: Función de toma de agua por la raíz propuesta por Feddes. (a) representa la zona de máxima toma de agua, mientras (b) es la zona de toma lineal de agua.  $\psi_1$  es el potencial agua de anaerobiosis y  $\psi_3$  es el potencial agua de marchitez.

Previo a la obtención de la solución de nuestro modelo (1) – (9) se adimensionaliza e inmoviliza el dominio móvil ( $s_0, R(t)$ ) al dominio fijo (0,1) mediante la siguiente transformación de variables:

$$C^*(r^*, t^*) = \frac{C(r, t)}{K_m}, \quad \psi^*(r^*, t^*) = \frac{\psi(r, t)}{\psi_e}$$

$$r^* = \frac{r - s_0}{R(t) - s_0}, \quad t^* = \frac{t}{\tau}, \quad l(t^*) = \frac{l(t)}{s_0}, \quad (13)$$

$$R^*(t^*) = \frac{R(t)}{s_0}$$

Y nuestro modelo transforma a:

$$C_{t^*}^* = \frac{T \left[ 1 + r^* (R^*(t^*) - 1) \right]^{-1}}{\left( \theta^*(\psi^*(r^*, t^*)) + b \right) s_0^2 (R^*(t^*) - 1)} \cdot \left\{ D\theta^*(\psi^*) \left[ 1 + r^* (R^*(t^*) - 1) \right] \frac{C_r^*}{R^*(t^*) - 1} \right\} + \left\{ +v^*(\psi^*(r^*, t^*)) s_0 \left[ 1 + r^* (R^*(t^*) - 1) \right] C^* \right\}_{r^*} \quad (14)$$

$$+ \frac{r^*}{(R^*(t^*) - 1)} \frac{dR^*}{dt^*} \quad 0 < r^* < 1, \quad t^* > 0$$

\*Correspondencia autor: reginato.juancarlos@gmail.com

$$C^*(r^*, 0) = C_o^*(r^*), \quad 0 < r^* < 1 \quad (15)$$

$$\frac{C_r^*(0, t^*)}{R^*(t^*) - 1} = \lambda \frac{[C^*(0, t^*) - C_u^*]}{1 + C^*(0, t^*) - C_u^*} - P_e (\psi(0, t)) C^*(0, t^*), \quad t^* > 0 \quad (16)$$

$$\frac{C_r^*(1, t^*)}{R^*(t^*) - 1} + P_e (\psi(1, t)) \frac{C^*(1, t^*)}{R^*(t^*)} = 0, \quad t^* > 0 \quad (17)$$

$$\begin{aligned} c^* (\psi^*(r^*, t^*), r^*, t^*) \frac{\partial \psi^*(r^*, t^*)}{\partial t^*} &= \\ = \tilde{c} (\psi^*(r^*, t^*), r^*, t^*) \frac{\partial \psi^*(r^*, t^*)}{\partial r^*} &- \\ - \frac{\gamma}{(R^*(t^*) - 1)} \frac{\partial}{\partial r^*} \bullet & \\ \bullet \left[ k^* (\psi^*(r^*, t^*), r^*, t^*) \frac{\partial \psi^*(r^*, t^*)}{\partial r^*} \right], & \\ 0 < r^* < 1, \quad t^* > 0. & \end{aligned} \quad (18)$$

$$\psi^*(r^*, 0) = \psi_o^*(r^*), \quad 0 < r^* < 1. \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \sigma G^* (\psi^*(0, t^*)) &= - \frac{1}{(R^*(t^*) - 1)} k^* (\psi^*(0, t^*), 0, t^*) \bullet \\ \bullet \frac{\partial \psi^*(0, t^*)}{\partial r^*}, & \quad t^* > 0. \end{aligned} \quad (20)$$

$$\frac{\partial \psi^*(1, t^*)}{\partial r^*} = \psi_o^*(1), \quad t^* > 0. \quad (21)$$

$$R^*(t^*) = \sqrt{\frac{1 + \left[ \left( \frac{R_o}{s_o} \right)^2 - 1 \right]}{e^{k_1 t^*}}}, \quad t^* > 0 \quad (22)$$

donde  $P_e$  (número de Peclet),  $\lambda$ ,  $\gamma$  y  $\sigma$  son números adimensionales dados por:

$$\begin{aligned} Pe(\psi(r, t)) &= s_o v (\psi(r, t)) / D\theta(\psi(r, t)), \\ \lambda &= \frac{J_m s_o}{D\theta(\psi(r, t)) K_m}, \quad \gamma = \frac{T \psi_e k_s}{(\theta_s - \theta_s)(1-n) s_o^2}, \quad (23) \\ \sigma &= \frac{S_{max}}{2\pi \psi_e k_s} \end{aligned}$$

Y donde  $\theta^*$ ,  $v^*$ ,  $c^*$ ,  $\tilde{c}$  y  $k^*$  son funciones adimensionales relacionadas con la capacidad hidráulica diferencial y la conductividad hidráulicas expresadas en función de los parámetros de suelo del modelo de van Genuchten. Una descripción más detallada se encuentra en Blengino et al.<sup>21</sup>

Hacemos notar que mediante este cambio de variables el problema de frontera móvil (1) - (9) fue transformado en el problema de frontera fija (14) - (22) pero ahora las ecuaciones diferenciales (14) y (19) tienen en cuenta la frontera móvil  $R(t)$  (o  $R^*(t^*)$  en el dominio adimensional). Además, la ecuación

\*Correspondencia autor: reginato.juancarlos@gmail.com

adimensional (14) se reduce la ecuación adimensional de Roose<sup>22</sup> cuando  $R(t) = R_o = \text{constante}$  (dominio fijo) y el radio  $s_o$  es pequeño con respecto a la semidistancia entre raíces  $R_o$ . De esta manera, la formulación de frontera móvil es una generalización del modelo de frontera fija<sup>15,16</sup>. La solución del sistema de ecuaciones diferenciales parciales acopladas en dominio móvil (14) - (17), en dominio fijo es obtenida mediante un más estable y eficiente método que satisface el balance de masa entre los iones incorporados por el sistema radical y los iones restantes en suelo. Así, aplicamos el método de elementos finitos usando el software FlexPDE (pdesolutions.com, Schnepf<sup>23</sup>).

### La simulación

Para la toma de nutrientes y agua se utilizaron datos experimentales típicos extractados de la literatura. Para los datos de nutrientes se utilizaron datos de Samal<sup>24</sup> y para los de agua de Personne<sup>25</sup>. Así se predijo la toma de K por maíz a bajas concentraciones (sin adición de K) y con adición de K a un mismo contenido de agua y contenidos de agua variables. Los inlfujos de nutrientes obtenidos fueron calculados mediante nuestro programa de elementos finitos y el software NST 3.0 (que resuelve el problema en dominios fijos y los mismos fueron utilizados para el cálculo de la toma acumulada de nutrientes mediante la fórmula (10). La Tabla 1 muestra los resultados obtenidos

TABLA 1: TOMA DE K CON Y SIN ADICIÓN DE K A CONTENIDO DE AGUA CONSTANTE Y VARIABLE

Maíz	Toma K (µmoles)	Toma K con adición (µmoles)
Frontera móvil Coef. Var.		
MB-FE ( $\Theta = 0.15$ )	352.8	1447.9
MB-FE ( $\Theta = 0.2$ )	362.2	1488.2
MB-FE ( $\Theta = 0.25$ )	369.1	1517.9
MB-FE ( $\Theta = 0.3$ )	374.6	1542
MB-FE ( $\Theta = 0.35$ )	379.14	1562.9
MB-FE ( $\Theta = 0.4$ )	385.1	1581.2
Frontera móvil Coef. Ctes.		
MB-FD ( $\Theta = 0.3$ )	403.5	1594.6
Frontera fija (NST 3)		
FB-FD ( $\Theta = 0.3$ )	1421	18445
Resultado Experimental		
( $\Theta = 0.3$ )	678	1633
Toma Acumulada Agua (cm <sup>3</sup> )	980.75	3974.25
Número de Peclet	0.0061	0.0998

MB-FE: Frontera móvil - Elementos Finitos

FB-FD: Frontera Fija - Diferencias Finitas

En la figura 3 se muestra la toma acumulada en función del tiempo a diferentes contenidos de agua con datos obtenidos por el modelo acoplado de agua y nutrientes así como la toma acumulada de nutrientes con contenido de agua constante con resultados obtenidos por el modelo de toma de nutrientes únicamente a un contenido de agua constante.

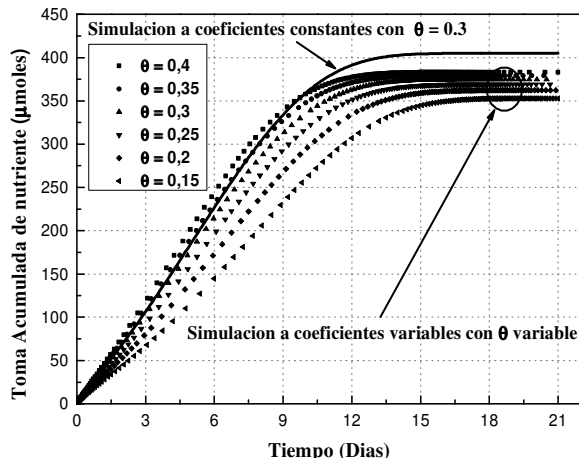


Figura 3. Toma acumulada de K en función del tiempo a diferentes contenidos de agua del suelo

#### IV. CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos muestran que tanto para el modelo de toma de nutrientes únicamente, así como para el modelo acoplado de toma de agua y nutrientes, los valores obtenidos mejoran sensiblemente con respecto los obtenidos por el modelo de frontera fija. Por otro lado para la toma simultánea de agua y nutrientes el modelo de frontera móvil describe adecuadamente la toma de nutriente en función del contenido de agua. Asimismo de la Tabla 1 se concluye que tanto a bajas como a altas concentraciones el modelo de frontera móvil sin acoplamiento con el transporte de agua predice por debajo y con errores menores (del 2.3 al 40 % respecto del valor experimental sin adición y con adición de K) mientras que el modelo de frontera fija predice por encima con errores mayores sin adición de K (110%) y con errores muy grandes con adición de K (2600%), aun usando una fórmula correcta de toma acumulada. Por otro lado, en el modelo de frontera móvil con toma simultánea de agua y nutrientes los errores de las predicciones varían de 43 a 48% en el caso de ninguna adición de K y de 3 a 11% con adición de K). Como puede observarse las predicciones del modelo de frontera móvil son mejores a altas concentraciones (adición de K) mientras que a bajas concentraciones las discrepancias observadas sean debidas probablemente a una descripción incompleta del modelo como procesos no tenidos en cuenta en las suposiciones del mismo (efectos de liberación de iones por cambios en pH debido a la presencia de exudados y el uso de una representación arquitectónica inadecuada de la ocupación del suelo por las raíces como un apilamiento homogéneo de sistema radical). Las mejoras obtenidas son debidas fundamentalmente a tres factores: a) el uso de una fórmula correcta para la toma acumulada de nutrientes, b) los influjos obtenidos por el modelo de frontera móvil y la toma acumulada, la cual es obtenida mediante una integración en dominio móvil, son representados mediante la misma dinámica, mientras que para el modelo NST 3.0 los influjos son obtenidos en un dominio fijo y la toma acumulada sobre un dominio variable, c) el uso de un método numérico

\*Correspondencia autor: reginato.juancarlos@gmail.com

(elementos finitos) que asegura el balance de masa entre los iones absorbidos y los restantes en suelo mientras que el método de diferencias finitas no lo satisface. Finalmente, y a la luz de estos resultados, conclusiones obtenidas por trabajos previos<sup>26,27</sup> podrían ser reinterpretadas.

**Apéndice I.** La ecuación (9) es obtenida asumiendo un volumen de suelo constante, es decir:

$$V_{\text{suelo}}(t_1) = V_{\text{suelo}}(t)$$

$$\pi(R_o^2 - s_o^2)\ell_o = \pi(R^2(t) - s_o^2)\ell(t)$$

$$R^2(t) = (R_o^2 - s_o^2) \frac{\ell_o}{\ell(t)} + s_o^2$$

$$R(t) = \sqrt{(R_o^2 - s_o^2) \frac{\ell_o}{\ell(t)} + s_o^2}$$

#### III. REFERENCIAS

- 1 - Barber, S. A., Soil Nutrient Bioavailability. A Mechanistic Approach, J. Wiley, New York (1995)
- 2 - Nye, P.H. y P.B. Tinker., Solute Movement in the Rhizosphere, Oxford University Press, Oxford, England. (2000)
- 3 - Comerford, N. B., W.P. Cropper, H. Li, P.J. Smethurst, K.C.J. Van Rees, E.J. Jokela, H. Adegbid y N.F Barros, Canadian Journal of Soil Science. **86**(4), 665-673 (2006)
- 4 - Smethurst, P. y N.B. Comerford, N. B. Soil Sci. Soc. Am. J. **57**, 1361-1367 (1993)
- 5 - Oates, K. y S.A. Barber, S.A., Journal of Agronomic Education, **16**(2), 65-68 (1987)
- 6 - Comunicación Personal, Heidelberg, Junio 2003
- 7 - Tarzia, D.A., A bibliography on moving-free boundary problems for the heat-diffusion equation. The Stefan and related problems, MAT - Serie A, Rosario, # 2 (2000)
- 8 - Tarzia, D.A., In Advanced Topics in Mass Transfer, El-Amin (Ed.), InTech Open Access Publisher, Rijeka, 439-484 (2011)
- 9 - Abbès, C. L.E. Parent y J.L. Robert, J. L., Soil Sci. Soc. Am. J. **60**, 1160-1167 (1996)
- 10 - Huguenin-Elie, O., G. J. D. Kirk y E. Frossard. European Journal of Soil Science. **54**, 77-90 (2003)
- 11 - Reginato, J.C., D.A. Tarzia y A. Cantero, A. Soil Science, **150**(4), 722-725 (1990)
- 12- Reginato, J.C., M.C. Palumbo. I.Ch. Bernardo, I. Moreno y D.A. Tarzia, Soil Sci. Soc. Am. J. **64**, 1363-1367 (2000)
- 13- Jonard, M., L. Augusto, E. Hanert, D.L. Achat, M.R. Bakker, C. Morel, A. Mollier y S. Pellerin. Ecological Modelling, **221**, 927-935 (2010)
- 14 - Van Genuchten, M. Soil Science Society of America Journal **44**, 892-896 (1980)
- 15 - Claassen, N. y S.A. Barber, Agron. J. **68**, 961-964 (1976)
- 16 - Cushman, J.H., Soil Sci. Soc. Am. J. **43**, 1087-1090 (1979)
- 17 - Reginato, J.C y D.A. Tarzia, Commun. Soil Sci. Plant Anal. **33** (5y6), 821-830 (2002)
- 18 - Blengino, J.L., J.C. Reginato and D.A. Tarzia, Mecánica Computacional, **26**, 1556-1568 (2007).

- 19 - Blengino, J.L., J.C. Reginato and D.A. Tarzia, enviado para publicación a *Plant and Soil* (2013)
- 20 - Feddes, R., P. Kowalik y H. Zaradny, *Simulation of field water use and crop yield*, Centre for Agricultural Publishing and Documentation, Wageningen, Netherlands, (1978)
- 21 - Blengino, J.L., J.C. Reginato and D.A. Tarzia, enviado para publicación a *Applied Mathematical Modeling* (2013)
- 22 - Roose T. y G.J.D. Kirk, *Plant Soil*, **316**, 257–264 (2009)
- 23 - Schnepf, A., T. Schrefl y W.W. Wenzel. *J. Plant Nutr. Soil Sc.* **165**, 713-718 (2002)
- 24 - Samal, D., J.L. Kovar, B. Steingrobe, U.S. Sadana, P.S. Bhadoria y N. Claassen, *Plant Soil*, **332**, 105–121 (2010)
- 25 - Personne, E., A. Perrier y A. Tuzet, *Agronomie* **23**, 153–168 (2003)
- 26 - Hinsinger P., A. Brauman, N. Devau, F. Gerard, C. Jourdan, J.P Laclau, E. Le Cadre, J. Jaillard y C. Plassard, *Plant and Soil*, **348**(1-2), 29-61 (2011)
- 27 - Mollier A., P. De Willigen, M. Heinen, C. Morel, A. Scheinder y S. Pellerin, *Eco. Mod.*, **210**, 453-464 (2008)

\*Correspondencia autor: [reginato.juancarlos@gmail.com](mailto:reginato.juancarlos@gmail.com)