

ECUACIONES ACOPLADAS EN SISTEMAS DÉBILMENTE LIGADOS

COUPLED-CHANNEL EQUATIONS IN WEAKLY BOUND NUCLEI

R. M. Id Betan*

Instituto de Física de Rosario (IFIR – CONICET)
27 de Febrero 210 bis, S2000EZF Rosario - Argentina
Departamento de Física y Química. Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (UNR)
Av. Pellegrini 250, S2000BTP Rosario - Argentina

Recibido: 31/10/13; aceptado: 11/06/14

El formalismo de ecuaciones acopladas, usado en la teoría de reacciones nucleares, es muy útil para el estudio de la estructura de los núcleos. Para el caso particular de núcleos inestables o débilmente ligados las correlaciones con el espectro continuo de energía tiene particular importancia y deben ser consideradas explícitamente. El objetivo de este trabajo es calcular estados débilmente ligados expandiendo las soluciones en el espectro continuo de las autobases. El método puede aplicarse tanto a la dispersión elástica como inelástica y no hace uso de las condiciones de contorno asintóticas. Utilizando la interacción de Reid reproducimos los parámetros experimentales del deuterón.

Palabras claves: ecuaciones acopladas, núcleos débilmente ligados, resonancias.

The coupled-channel formalism, usually employed to study nuclear reactions, is also useful to study nuclear structure. In the special case of weakly bound nuclei, correlations with the continuum spectrum are important and must be explicitly included. The main purpose of this paper is to calculate weakly bound states by expanding them in the continuum eigenbasis for each channel. The method is well suited to be applied both to elastic and inelastic scattering. Using this method with the neutron-proton Reid interaction, the experimental parameters of the deuteron are reproduced.

Keywords: coupled equations, weakly bound nuclei, resonances.

I. INTRODUCCIÓN

El método de ecuaciones acopladas es un instrumento teórico bien establecido en física nuclear, tanto para el estudio de la estructura de núcleos fuertemente ligados^{1,2}, como para los débilmente ligados^{3,4}. El acoplamiento con el espectro continuo de energía es importante en las reacciones nucleares y sumamente difícil de tratar apropiadamente. Este trabajo es el primer paso en el desarrollo de un método alternativo para el tratamiento de las correlaciones entre los canales de scattering elástico y de ruptura.

Las ecuaciones acopladas pueden resolverse imponiendo las condiciones de contorno asintóticas para la solución que uno está buscando⁵ o alternativamente, expandiendo las soluciones en una base y luego diagonalizando la matriz resultante. Para expandir la función de onda de cada canal, este trabajo usa la base generada por la parte diagonal, de este modo cada canal tiene su propia base. Las bases así generadas, las llamaremos autobases.

En la siguiente sección II introducimos el método tanto para scattering elástico como inelástico. En la sección III aplicamos el método al deuterón y por último, en la sección IV discutimos las ventajas del método y la perspectiva a futuro.

II. FORMALISMO

Consideremos la dispersión entre dos núcleos (a, A) descrito por el Hamiltoniano $H = H_a + T + V$, con $H_a = H_a + H_A$. Donde $H_a(H_A)$ es el Hamiltoniano

intrínseco del proyectil (blanco) a (A),
$$T = \frac{-\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2$$

es la energía cinética relativa proyectil-blanco, μ es la masa reducida y $V = \sum_{i \in a, j \in A} V_{ij}$ es la interacción proyectil-blanco.

Las autofunciones ψ del Hamiltoniano total H : $H\psi = E\psi$, son expandidas en la base de canales Φ_α ,

$$\psi_{J^P M}(\vec{r}, a, A) = \frac{1}{r} \sum u_{\alpha'}^{J^P M}(r) \Phi_{\alpha'}^{J^P M}(\hat{r}, a, A) \quad (1)$$

donde $\alpha = \{(J_a)j, J_A\}$.

$$\Phi_\alpha(\vec{r}, a, A) = [Y_{J_a}^{jm}(\hat{r}, a) \phi_{J_A}(A)]_{F M}$$
$$Y_{J_a}^{jm}(\hat{r}, a) = [Y_l(\hat{r}) \phi_{J_a}(a)]_{jm}$$

Las funciones $\phi_{J_a M_a}$ y $\phi_{J_A M_A}$ son autofunciones de los Hamiltonianos intrínsecos del proyectil y blanco, respectivamente,

* idbetan@ifir-conicet.gov.ar

$$\begin{aligned} H_a \phi_{J_a M_a} &= \varepsilon_a \phi_{J_a M_a} \\ H_A \phi_{J_A M_A} &= \varepsilon_A \phi_{J_A M_A} \\ H_a \Phi_a &= \varepsilon_a \Phi_a \end{aligned}$$

con $\varepsilon_a = \varepsilon_a + \varepsilon_A$.

Reemplazando en la ecuación de Schrödinger resulta el siguiente sistemas de ecuaciones,

$$(\varepsilon_a + h_a - E) u_a(r) + \sum_{a' \neq a} V_{aa'}(r) u_{a'}(r) = 0 \quad (2)$$

donde $V_{aa'} = \int \Phi_a \square V \square \Phi_{a'} \square_{r_{aA}}$ (los subíndices indican las variables que se integran.)

La parte diagonal de la interacción V_{aa} fue separada para definir el Hamiltoniano para el canal α ,

$$h_\alpha = -\frac{\square^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\square^2}{2\mu} \frac{l_\alpha(l_\alpha+1)}{r^2} + V_{aa} \quad (3)$$

Cada función de onda de canal es expandida en su propia autobase,

$$u_{a'}(r) = \sum c_{a'n'} u_{a'n'}^{(0)}(r) \quad (4)$$

donde la suma incluye integración en el espectro continuo de h_α ,

$$h_\alpha u_{an}^{(0)}(r) = \varepsilon_{an}^{(0)}(r) u_{an}^{(0)}(r) \quad (5)$$

Reemplazando en el sistema de ecuaciones resulta la siguiente ecuación de autovalores para el sistema original,

$$\sum \sum [(\varepsilon_a + \varepsilon_{a,n}^{(0)} - E) \delta_{aa'} \delta_{nn'} + (1 - \delta_{aa'}) V_{a,n,a',n'}] c_{a',n'} = 0 \quad (6)$$

donde N es el número de canales y M_α es la dimensión de la base del canal α . La matriz es diagonal por bloques de dimensión M_α para cada canal α . Los elementos diagonales de estos bloques están dados por $\varepsilon_a + \varepsilon_{a,n}^{(0)} - E$, con $n = \{1, 2, \dots, M_\alpha\}$. Mientras los elementos de matriz entre diferentes canales quedan definidos por,

$$V_{a,n,a',n'} = \int dr u_{a,n}^{(0)}(r) V_{aa'}(r) u_{a',n'}^{(0)}(r)$$

III. APLICACIÓN

Como aplicación resolveremos las ecuaciones acopladas para el deuterón utilizando el potencial "soft" de Reid⁶. Para este sistema los parámetros que aparecen en las ecuaciones (2) y (3) toman los siguientes valores: $l_1 = 0$, $l_2 = 2$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$,

$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_n}$, donde m_n y m_p corresponden a la masa de neutrón y protón respectivamente, con $2\mu / \square^2 = 0.0241138 (MeV \cdot fm^2)^{-1}$. El potencial del canal 1 es $V_{11} = V_C(r)$, mientras el del canal 2 es $V_{22} = V_C(r) - 2V_T(r) - 3V_{LS}(r)$, donde $V_C(r)$, $V_T(r)$ y

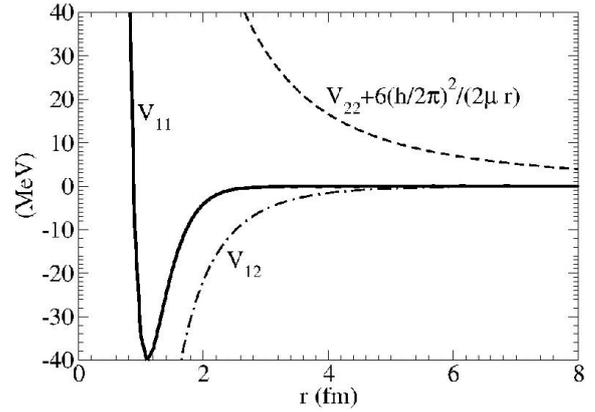


Figura 1: Potenciales que aparecen en las ecuaciones acopladas del sistema protón-neutrón.

$V_{LS}(r)$ están definidos en la ecuación (30) de la referencia⁶. La figura 1 muestra estos potenciales.

La coordenada radial r está dada en Fermi mientras los potenciales están en unidades de MeV. La función de onda del canal 1, $u_S(r)$ corresponde a la componente 3S_1 , mientras la función de onda del canal 2, $u_D(r)$ corresponde a la componente 3D_1 de la función de onda del deuterón.

Tanto V_{11} como V_{22} no soportan estados ligados, por lo que la base para cada canal está formada exclusivamente por estados del continuo. Discretizando el espectro continuo introducimos los

estados $\sqrt{\omega_i} u_a^{(0)}(r; \varepsilon_i)$, donde ω_i son los pesos en la cuadratura de Gauss-Legendre, mientras las energías $\varepsilon_i \in (0, \varepsilon_{max})$, con ε_{max} la energía de corte. La misma partición fue tomada para ambos canales, pero debido a que los potenciales de cada canal son diferentes los autoestados son distintos. Las autofunciones de cada canal fueron calculadas utilizando los programas^{7,8}

El estado fundamental del deuterón fue calculado con la interacción $V_{12} = 2\sqrt{V_T}(r)$. La coordenada radial fue tomada en el intervalo (0, 20) fm con paso 0.02 fm. La estabilidad de la solución fue estudiada para distintos radios máximos entre 18 fm y 24 fm. La estabilidad con respecto al paso en la coordenada radial también fue estudiada con pasos entre 0.02 fm y 0.005 fm, paso mayores no reproducían la energía experimental.

Las funciones u_S y u_D fueron expandidas utilizando la misma energía de corte y el mismo mallado (Gauss-Legendre). Estudiamos la convergencia de la solución discreta como función de la energía de corte y de la densidad del mallado. La figura 2 muestra la convergencia de la energía del deuterón como función de la energía de corte ε_{max} . La energía converge al valor $E_d = -2.206$ MeV.

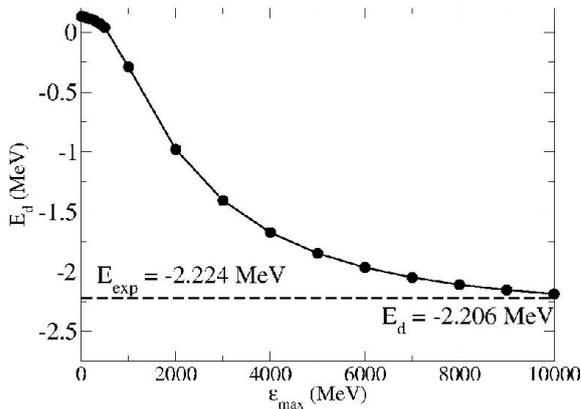


Figura 2: Convergencia de la energía del estado fundamental del deuterón como función de la energía de corte.

La figura 3 muestra las componentes $u_S(r)$ y $u_D(r)$ de la función de onda del deuterón. La componente S contribuye con un 94% a la autofunción, mientras que la componente D lo hace con un 6%.

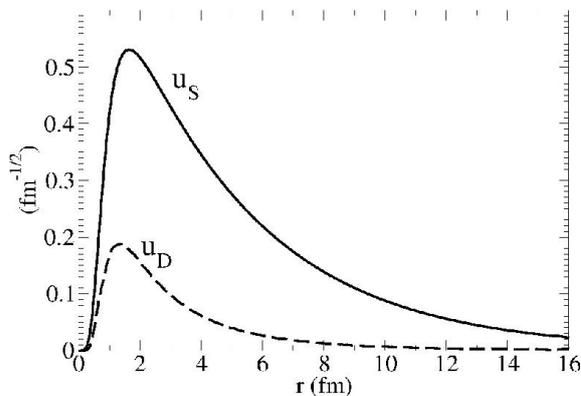


Figura 3: Componentes S y D de la función de onda del deuterón.

IV. CONCLUSIONES

Expandimos las soluciones de cada canal en su propia autobase. En general la base puede incluir tanto estados ligados como estados del continuo. El formalismo presentado puede manejar de igual manera tanto el espectro discreto como continuo. Hemos estudiado la solución para el canal cerrado en función de los distintos parámetros involucrados en el , 217 (1995).

modelo y mostrando su estabilidad y convergencia. No fue necesario introducir ningún parámetro extra para reproducir la energía y la función de onda del deuterón.

La expansión en las autobases minimiza el número de elementos de matriz que debe calcularse. Estos elementos de matriz es la parte que consume mayor tiempo en la resolución de ecuaciones acopladas. El número de elementos de matriz que se ahorra en el cálculo con respecto a una base arbitraria

$$M_{ahorro} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N M_{\alpha}(M_{\alpha}+1)$$

resulta ser . Otra ventaja del método introducido en este trabajo es que no se hace uso de las condiciones de contorno asintóticas, esta característica puede ser útil para tratar sistemas cuya integración numérica diverge . Por último, siendo que el continuo es tratado en forma explícita, este formalismo parece particularmente conveniente para tratar sistemas débilmente ligados más complejos.

El siguiente paso es utilizar la expansión en las autobases del continuo para estudiar scattering de ruptura en el deuterón.

V. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas PIP-77.

VI. REFERENCIAS

- 1 - P. Fröbrich and R. Lipperheide, Theory of Nuclear Reactions, Oxford Studies in Nuclear Physics 18 (Oxford Science Publications, 1996).
- 2 - I. J. Thompson, Comp. Phys. Rep. **7**, 167 (1988).
- 3 - Y. Kikuchi, T. Myo, K. Kato, and K. Ikeda, Phys. Rev. C **87**, 034606 (2013).
- 4 - N. J. Upadhyay, A. Deluva, and F. N. Nunes, Phys. Rev. C **85**, 054621 (2012).
- 5 - S. A. Rakityanasky and S. A. Sofianos, J. Phys. A: Math. Gen. **31**, 5149 (1998).
- 6 - R. V. Reid, Ann. Phys. **50**, 411 (1968).
- 7 - T. Vertse, K. F. Pal, and Z. Balogh, Comp. Phys. Comm. **27**, 309 (1982).
- 8 - L. Gr. Ixaru, M. Rizea, and T. Vertse, Comp. Phys. Comm. **85**