

Supersimetría y formulación de De la Peña

Supersymmetry and De la Peña formulation

Luis Canderle^(a) – Angel Plastino^(b)

(a) Dpto. de Física – Universidad Nacional de La Pampa (UNLPam), c.c. 57, 6300 Santa Rosa (L.P.), Argentina, e-mail: importac@cpenet.com.ar

(b) Universidad Nacional de La Plata (UNLP), IFLP-CCT-CONICET c.c. 727, 1900 La Plata, Argentina

Recibido: 18/11/2013; aceptado: 19/11/2014

En un trabajo previo⁽¹⁾ se vincularon dos técnicas de factorización frecuentemente usadas para resolver la ecuación de Schrodinger unidimensional, la técnica supersimetrica (SUSY) y la formulación de De La Peña. En este trabajo se usa la simplicidad de la primera de ellas para resolver el potencial de Morse. Los auto valores encontrados presentan las mismas características encontradas usando métodos de resolución tradicionales.

Palabras claves: SUSY, De La Peña, potencial de Morse

In a previous paper ⁽¹⁾ two factorization techniques were linked to solve the one-dimensional Schrodinger equation, the supersymmetric technique (SUSY) and the De La Peña formulation. In this work we use the simplicity of the first of them to solve the Morse potential. The eigenvalues obtained present the same characteristics found using traditional resolution methods.

Keywords: SUSY, De La Peña, Morse potential

I. INTRODUCCION. POTENCIAL DE MORSE Y SUS CARACTERISTICAS

Las vibraciones de dos átomos en equilibrio son excelentemente descriptas por el potencial de Morse

$$V(r) = D[1 - e^{-\gamma(r-r_0)}]^2 = D(1 - 2e^{-\gamma(r-r_0)} + e^{-2\gamma(r-r_0)}) = D(1 - 2e^{-\alpha x} + e^{-2\alpha x}) \quad (1)$$

$$\text{con } x = \frac{r - r_0}{r} \quad ya = \gamma r_0$$

donde r es la distancia entre átomos, r_0 es la distancia de equilibrio entre los átomos, D es la profundidad del pozo (relativa a átomos disociados) o energía de disociación, y γ controla el "ancho del pozo" relacionada a la frecuencia vibracional.

Este potencial es atractivo a grandes distancias, tiene un mínimo $-D$ en $x=0$, o $r = r_0$ pero produce una fuerte repulsión si los dos núcleos se aproximan mucho.

Alrededor de $x=0$ puede expandirse en una serie:

$$V(r) = D(-1 + \alpha^2 x^2 \dots) = -D + \frac{1}{2} M \omega^2 (r - r_0)^2 + \dots \quad (2)$$

con

$$\omega^2 = \frac{2D\alpha^2}{Mr_0^2} = \frac{2\gamma^2 D}{M} \quad (3a)$$

$$\omega = \gamma \sqrt{\frac{2D}{M}} \quad (3b)$$

para los términos que corresponden a vibraciones de baja energía podemos esperar un espectro que no se desvía mucho del de un oscilador armónico

$$E(v) = -D + \hbar\omega(v + \frac{1}{2}); \quad v=0,1,2,\dots \quad (4)$$

donde v es el numero cuántico vibracional, los términos casi equidistantes se vuelven progresivamente más densos con el incremento de la energía, como consecuencia de la anarmonicidad despreciada

Si ignoramos los grados de libertad correspondiente a la rotación y nos concentramos sobre la ecuación de Schrodinger vibracional, observamos que el problema es equivalente al de

un campo central con $l=0$. Entonces la ecuación de Schrodinger es

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + V(r) \right] R(r) = ER(r) \quad (5)$$

haciendo el cambio de variables $R(r) = \frac{u(r)}{r}$ en (4) queda

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + V(r) \right] u(r) = Eu(r) \quad (6)$$

introduciendo la ecuación (1) en (5) y haciendo un cambio de variables

$$y = e^{-\mathbf{V}(r-r_0)}$$

la ecuación (6) queda:

$$\left[-\frac{\hbar^2 \mathbf{V}}{2m} \left(y^2 \frac{d^2}{dy^2} + y \frac{d}{dy} \right) + D_e [1 - y]^2 \right] u(r) = Eu(r) \quad (7)$$

$$Hu = Eu \quad (8)$$

Donde H es

$$\left[-\frac{\hbar^2 \mathbf{V}}{2m} \left(y^2 \frac{d^2}{dy^2} + y \frac{d}{dy} \right) + D_e [1 - y]^2 \right] \quad (9)$$

y esta es una ecuación que ya ha sido resuelta mediante la SUSY. Sin embargo el método de De La Peña es mucho más sencillo.

II. Metodo de factorizacion de De La Peña

Este método de factorización⁽³⁾ proporciona un algoritmo que es muy fácil de implementar, que se basa en el conmutador y anti conmutador de los operadores de creación y destrucción que afectan la factorización y que también juegan el rol de los potenciales asociados de la SUSY, lo cual implica que son equivalentes. Esta equivalencia da el respaldo teórico a la formulación de De La Peña a través de la SUSY⁽¹⁾.

De La Peña construye un operador P que luego es identificado con el Hamiltoniano del sistema bajo consideración. La forma de este operador es

$$P = q_0 + q_c A + q_s S$$

$$A = -i[\alpha, \beta]; \quad S = \alpha^2 + \beta^2 \quad (10)$$

La utilidad de esta fórmula es que puede hacerse casi evidente, la forma de los operadores α y β , y de ahí, de los operadores A y S .

De La Peña muestra que el espectro de los operadores A y S denominados $\{a_k\}$ y $\{s_k\}$ respectivamente, satisfacen un conjunto de relaciones de consistencia que se pueden escribir en una forma redundante pero conveniente:

$$s_k \geq 0; \quad s_k + a_k \geq 0; \quad s_k - a_k \geq 0 \quad (11)$$

además existen relaciones entre ambos conjuntos de auto valores

$$s_{k+1} - s_k = a_{k+1} + a_k; \quad s_0 = a_0 \quad y \quad s_N = -a_N \quad (12)$$

las ecuaciones (11) muestran que el espectro de S es no degenerado y está acotado por abajo por $|a_0|$. La primera ecuación de las tres de (12) es la ecuación fundamental que fija la estructura del espectro de P . Las otras dos condiciones en (12) determinan los límites inferior y superior del espectro de P . Si ninguna contradicción está involucrada con la aplicación de la última condición en (12), entonces existe un límite superior y está determinado por ella. El conjunto de relaciones (12) contiene toda la información del espectro de P .

III. El método de de la Peña para resolver el potencial de Morse

Usando el formalismo de De La Peña e identificando el operador P con H probamos con la selección:

$$\alpha = \sqrt{D(1-y)}; \quad \beta = i\hbar \mathbf{V} \sqrt{\frac{1}{2m}} y \frac{d}{dy} \quad (13)$$

Para esta selección tenemos

$$A = -i[\alpha, \beta] = \hbar \mathbf{V} \sqrt{\frac{D}{2m}} y \quad (14)$$

$$S = \alpha^2 + \beta^2 = -\frac{\hbar^2 \mathbf{V}}{2m} \left(y^2 \frac{d^2}{dy^2} + y \frac{d}{dy} \right) + D[1 - y]^2 \quad (15)$$

vemos que S es idéntico al Hamiltoniano H si tomamos

$$q_0 = q_a = 0; \quad q_s = 1. \quad \text{Por lo tanto } s_k = E_k.$$

Para un valor fijo de $r = r_k$ los autovalores de A son

$$a_k = \hbar \mathbf{Y} \sqrt{\frac{D}{2m}} y_k = \hbar \mathbf{Y} y_k$$

(16)

con

$$y_k = e^{-\mathbf{Y}(r_k - r_0)}$$

(17)

Aplicando las condiciones de consistencia del formalismo de De La Peña, vemos que la más fuerte es

$$s_k - a_k \geq 0$$

es decir

$$E_k \geq \hbar \mathbf{Y} y_k$$

(18)

Para fijar el límite inferior, del formalismo de De La Peña usamos $s_0 = a_0$ y queda

$$E_k = \hbar \mathbf{Y} \sqrt{\frac{D}{2m}} \frac{1}{2} \hbar \omega$$

(19)

si tomamos en cuenta la ec. (3), que es la energía del estado fundamental, es igual a la del oscilador armónico.

La relación

$$s_{k+1} - s_k = a_{k+1} + a_k$$

(20)

fija la estructura del espectro del operador de De La Peña P que como en nuestro caso es H , fija el espectro de energías.

$$E_{k+1} - E_k = a_{k+1} + a_k$$

(21)

es decir

$$E_{k+1} - E_k = \hbar \omega (y_{k+1} + y_k)$$

desarrollando en series alrededor de r_0

$$E_{k+1} - E_k = \hbar \omega \left(\left[1 - \mathbf{Y}(r) \right]_{k+1} (r_0) + \dots + \left[1 + \mathbf{Y}(r) \right]_k (r_0) + \dots \right) \quad (22)$$

en primer orden

$$E_{k+1} - E_k = \hbar \omega \left[1 - \mathbf{Y} \left(\left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 - 1 \right] \right) \right]_{k+1} + \dots + \left[1 + \mathbf{Y} \left(\left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 - 1 \right] \right) \right]_k \quad (23)$$

para $k \rightarrow 0$

$$E_1 - E_0 = \hbar \omega [1 - \mathbf{Y}(r_1 - r_0)]$$

$$E_1 = \frac{3}{2} \hbar \omega - \frac{\mathbf{Y}}{2} \hbar \omega (r_1 - r_0)$$

para $k=1$

$$E_2 - E_1 = \hbar \omega \left[1 - \frac{\mathbf{Y}}{2} (r_2 + r_1 - 2r_0) \right]$$

$$E_2 = \frac{5}{2} \hbar \omega - \frac{\mathbf{Y}}{2} \hbar \omega (r_2 + 2r_1 - 3r_0)$$

la formula general es

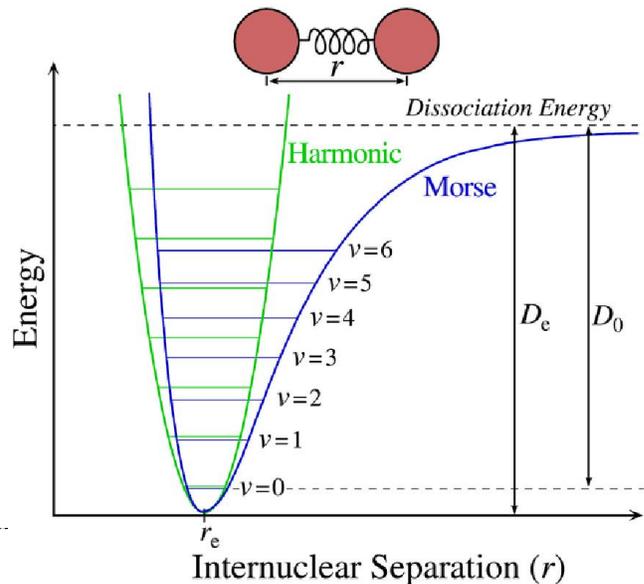
$$E_k = \left(k + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega - \frac{\mathbf{Y}}{2} \hbar \omega (r_k + r_{k+1} + r_{k+2} + 2r_1 - (k-1)r_0) \quad (24)$$

es decir

$$E_k = \left(k + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega - \frac{\mathbf{Y}}{2} \hbar \omega \left(r_k + 2 \sum_{i=1}^{k-1} r_i - (k-1)r_0 \right)$$

(25)

Si $\gamma=0$, nos queda la ecuación de auto valores del oscilador armónico. También se ve que si γ es pequeño, los niveles de energía no difieren mucho de los del oscilador armónico pues la contribución es muy pequeña, pero a medida que los valores de k van creciendo los niveles de energía del potencial de Morse se van haciendo más planos como se ve en el siguiente gráfico:



El potencial de Morse (azul) y el potencial oscilador armónico (verde). A diferencia de los niveles de energía del oscilador armónico que están igualmente espaciados por $\hbar \omega$, el espaciamiento de los niveles del potencial de Morse decrece a medida que la energía se aproxima a la de disociación.

Además, de la relación de consistencia de De La Peña para $k=N$

$$E_N = -a_N$$

es decir

$$E_N = -\hbar\omega y_N = -\hbar\gamma \sqrt{\frac{D}{2m}} e^{-\gamma(r_N - r_0)}$$

(26)

Esta ecuación no es satisfecha por ninguno de los auto valores anteriores (ver ec. 25), por lo tanto no hay límite superior.

IV. Conclusión

La simplicidad del método de De La Peña se hace evidente en este trabajo para la obtención de los valores de la energía para el Potencial de Morse, lo cual lo hace muy útil para resolver muchos problemas que presentan una dificultad matemática importante.

V. Referencias

- (1) L. Canderle, A. Plastino, M. Casas, A. R. Plastino, "Universal Forms for One-Dimensional Quantum Hamiltonians: A Comparison of the SUSY and the De La Peña Factorization Approaches" International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences - Volume 2009 (2009), Article ID 575217
- (2) S. Flugge "Practical quantum mechanics" - Springer (1970)
- (3) L. de la Peña and R. Montemayor, "Raising and lowering operators and spectral structure: a concise algebraic technique," American Journal of Physics, vol. 48, no. 10, pp. 855--860, 1980