

Desigualdad entre carga y tamaño en espaciotiempos esféricamente simétricos

Charge–size inequality in spherically symmetric spacetimes

Marcelo E. Rubio^{*a,b}, Sergio Dain^{a,b}

^a Facultad de Matemática, Astronomía y Física – Universidad Nacional de Córdoba
Medina Allende s/n, Ciudad Universitaria, X5000HUA Córdoba, Argentina

^b Instituto de Física Enrique Gaviola. CONICET.
Medina Allende s/n, Ciudad Universitaria, X5000HUA Córdoba, Argentina

Recibido: 09/11/14; Aceptado: 23/04/15

En este trabajo se presenta una desigualdad para objetos ordinarios en Relatividad General, que vincula la carga eléctrica con alguna medida de tamaño. Una desigualdad similar entre carga y área ha sido recientemente demostrada para agujeros negros dinámicos, donde el área correspondiente es la del horizonte de eventos. El objetivo de este estudio es generalizar dicho resultado, o encontrar un contraejemplo explícito. Más precisamente, se discute el caso en simetría esférica, para el cual existen dos medidas de tamaño intuitivas. Finalmente, se prueba la desigualdad dentro de una esfera con densidad constante de carga eléctrica conforme.

Palabras clave: Relatividad General, carga eléctrica, tamaño, objetos.

We present an inequality for ordinary bodies in General Relativity that relates electric charge and some measure of it size. A universal area–charge inequality for arbitrary dynamical black holes was recently proved. Our purpose is to generalize this result for ordinary bodies, or look for an explicit counterexample. Mainly, we discuss the spherical case in which there are two intuitive notions of size, and finally we prove the inequality inside a sphere with constant conformal electric charge density.

Keywords: General Relativity, electric charge, size, bodies.

1. Introducción

El estudio de desigualdades geométricas en Relatividad General ha resultado un área de interés en la investigación de los últimos años. Este tipo de desigualdades permite relacionar cantidades físicas que tienen un significado geométrico preciso (como masa, área, carga eléctrica y momento angular), y predecir, a partir de ellas, el comportamiento y la estabilidad de ciertos sistemas físicos. En un trabajo reciente (ref. 1) se demostró una desigualdad para agujeros negros dinámicos que relaciona el área del horizonte de eventos y la carga eléctrica en su interior, sin asumir ninguna simetría espaciotemporal. En este trabajo se estudia la plausibilidad de extender dicha desigualdad para el caso de objetos ordinarios en el espacio¹.

Considérese un cuerpo estático arbitrario con carga neta \mathcal{Q} y sea \mathcal{R} alguna medida de su tamaño con unida-

des de longitud. Se quiere estudiar si existe alguna relación universal entre \mathcal{Q} y \mathcal{R} . Por supuesto, es necesario dar una definición precisa de tamaño. Por ejemplo, si se considera un cuerpo con simetría esférica, \mathcal{R} podría ser el *radio de área* de la superficie (en general, el radio de área está bien definido para cualquier 2–superficie suave, pero sin simetría esférica no representa una medida de tamaño razonable).

Se propone la siguiente conjetura: *Sea Ω una región tridimensional con carga total $\mathcal{Q}(\Omega)$, y sea $\mathcal{R}(\Omega)$ una medida del tamaño de Ω . Entonces, se cumple que*

$$\mathcal{Q}(\Omega)^2 \leq \frac{c^4}{G} \mathcal{R}(\Omega)^2, \quad (1)$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío y G la constante de Gravitación Universal.

La motivación física de esta conjetura es la siguiente: un objeto cargado tiene un tamaño mínimo dado por la cantidad de carga eléctrica en su interior; ó bien, la cantidad máxima de carga que puede almacenar un objeto no puede superar su tamaño.

^{*} email: merubio@famaf.unc.edu.ar

¹El resultado que se presenta en este artículo es parte del trabajo final de Licenciatura de M. E. Rubio (ref. 2).

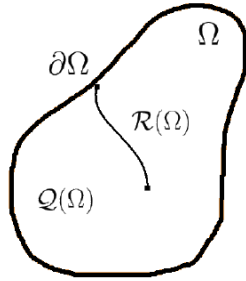


Figura 1. Objeto de tamaño $\mathcal{R}(\Omega)$ y carga $\mathcal{Q}(\Omega)$.

Definir una cantidad que dé cuenta del tamaño de cualquier región del espacio es difícil en general, ya que tal definición requiere argumentos muy sutiles. A menudo, la noción de tamaño suele vincularse con cantidades geométricas como el área o el volumen. Sin embargo, es simple concluir que, en general, dicha relación no es cierta: basta imaginar dos cuerpos de igual área superficial e idéntico volumen, pero con formas arbitrariamente diferentes. Una discusión precisa de medidas de tamaño para objetos de geometría arbitraria puede verse en las referencias 3, 4 y 5. No obstante, hay casos en los que la definición buscada es clara y sin ambigüedades, como por ejemplo en *simetría esférica*.

La búsqueda de una definición apropiada de tamaño ha sido de interés en Relatividad General a partir de los años 70' (ref. 6). Si bien hasta el momento no se han obtenido resultados precisos al respecto, existen conjeturas y evidencias que sugieren condiciones para la formación de agujeros negros luego de un colapso gravitatorio. Este tipo de conjeturas suele ser útil también para estudiar la validez de la famosa *Conjetura del Censor Cósmico*, uno de los problemas más importantes en Relatividad General.

Una conjetura que involucra medidas de tamaño y masa (en lugar de carga eléctrica) es la *conjetura del hoop*. Esta conjetura tiene varias motivaciones físicas. Es sabido que el colapso gravitacional esférico produce un horizonte de eventos, de manera que la materia colapsante no influye en la causalidad del universo exterior a la región de colapso. Además, durante dicho proceso se produce una singularidad en el centro de dicha región, en donde la teoría de Einstein carece de validez. Sin embargo, K. S. Thorne demostró que la formación de horizontes no es una consecuencia necesaria del proceso de colapso no esférico, lo que llevó naturalmente a la pregunta: *¿Bajo qué condiciones se forma un horizonte de eventos durante un colapso gravitatorio?*

Este problema, íntimamente vinculado a la censura cósmica, fue rotulado por S. Hawking como *conjetura del hoop*, la cual establece que *un agujero negro con horizonte de eventos se forma sí y sólo sí cierta cantidad de masa M se compacta en una región cuya circunfe-*

rencia en cualquier dirección satisface $\mathcal{C} \leq 4\pi MG/c^2$, donde \mathcal{C} es la longitud de la circunferencia. Propuesta por Thorne en 1972 de manera general, esta conjetura establece una condición necesaria y suficiente para la formación de un horizonte de eventos durante un colapso gravitatorio general: si un objeto ordinario es capaz de reducir su tamaño lo suficiente, entonces se convierte en un agujero negro dinámico.

La constante 4π no juega ningún rol sustancial aquí. El motivo de tal elección proviene de la solución de *Schwarzschild* para un objeto estático y esféricamente simétrico de masa M , la cual admite un horizonte de eventos en $r = 2MG/c^2$, de manera que la circunferencia máxima es exactamente $\mathcal{C} = 4\pi MG/c^2$. No obstante, es posible reemplazar esta constante por $2\pi MG/c^2$ si se consideran campos electromagnéticos (extendiendo la noción de *masa a energía*).

A pesar de que aún no hay una demostración de la conjetura de Thorne (así como tampoco hay contraejemplos significantes), existen evidencias que insinúan su veracidad: es consistente con el comportamiento esperado en colapsos esféricos, cilíndricos y planos, así como lo es con el resultado de suficientes cálculos numéricos para el problema de agujeros negros no rotantes con simetría axial. Además, existen varios ejemplos de soluciones estáticas de las ecuaciones de campo consistentes con la conjetura.

Una formulación un tanto más precisa de la conjetura del hoop requiere una definición adecuada de tamaño y de masa. En este último caso, es posible una formulación de la conjetura considerando la definición global de masa/energía de ADM (Arnowitt–Deser–Misner).

Durante este trabajo se emplearán unidades geométricas tales que la velocidad de la luz en el vacío y la constante de Gravitación Universal son $c = G = 1$.

2. Tamaño en simetría esférica

Es natural comenzar el estudio de la conjetura de la Ec. (1) en *simetría esférica*; esto es, Ω es una esfera cuyo radio de área r puede tomarse como medida de tamaño. Claramente, esta elección de tamaño no es la más general posible.

En términos geométricos, sea Ω una esfera contenida en un dato inicial asintóticamente plano $(\Sigma, h_{ij}, K_{ij}, \rho, j_i)$ de las ecuaciones de campo. El área de la esfera se obtiene a partir de la métrica h inducida sobre su superficie, por lo que es de esperar que r sea una función monótona creciente de la *distancia propia* o *longitud geodésica* de la esfera, ℓ ; es decir, la distancia entre el centro de la esfera y cualquier punto de su superficie. En particular, esta dependencia resulta ser la identidad en geometría euclídea.

De este modo, la conjetura puede formularse de una manera más precisa en caso de simetría esférica:

Conjetura 2.1. *Sea Ω una esfera contenida en un dato inicial asintóticamente plano de las ecuaciones de campo, tal que satisface la condición de energía dominante $\rho \geq \sqrt{j^j j_j}$. Suponga que Ω tiene longitud propia ℓ y dentro de Ω existe carga total \mathcal{Q} . Entonces se satisface la desigualdad*

$$\mathcal{Q}^2 \leq \ell^2. \quad (2)$$

2.1. Evidencia en geometría euclídea

Para una esfera de radio R con carga neta \mathcal{Q} uniformemente distribuída en su interior, se tiene que

$$\mathcal{Q}(r) = \mathcal{Q} \left(\frac{r}{R} \right)^3, \quad r \leq R. \quad (3)$$

Luego, la energía electrostática de la esfera resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}^2 dV \\ &= \frac{\mathcal{Q}^2}{2} \left[\int_0^R \frac{r^4}{R^6} dr + \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \right] \\ &= \frac{3}{5} \frac{\mathcal{Q}^2}{R}. \end{aligned} \quad (4)$$

Un argumento heurístico que permite entender la desigualdad asumiendo la conjetura del hoop es que, para que no se forme un agujero negro, la energía electrostática debe ser menor o igual a una constante por el radio; esto es

$$\mathcal{W} \leq R/2. \quad (5)$$

El factor $1/2$ proviene de la solución de *Schwarzschild*, para la cual se satisface la igualdad. Esta cota implica directamente que

$$\mathcal{Q} \leq \sqrt{\frac{5}{6}} R < R. \quad (6)$$

2.2. Formulación de las ecuaciones

Se considera como dato inicial una 3–superficie riemanniana Σ con la topología de \mathbb{R}^3 , métrica h_{ij} y *time–symmetric* ($K_{ij} = 0$). Luego, si no hay materia presente en Σ , las ecuaciones de vínculo se reducen a

$$R = 2\mathcal{E}^i \mathcal{E}_i; \quad \mathcal{D}_i \mathcal{E}^i = 4\pi\rho, \quad (7)$$

donde R es el escalar de curvatura de h , \mathcal{E}^i el vector campo eléctrico en Σ generado por la distribución de carga ρ en el interior de la esfera. El símbolo \mathcal{D}_c denota la derivada covariante de Levi-Civita con respecto a h .

La simetría esférica puede imponerse tomando *coordenadas plano-conformes* (r, θ, φ) , tales que el elemento de línea es

$$dh^2 = \Phi^4(r) [dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2)], \quad (8)$$

donde $\Phi > 0$ satisface $\Delta\Phi \leq 0$, en virtud de la primera ecuación de vínculo (Δ es el operador laplaciano *plano*).

Nótese que el radio de área de una 2–superficie $r = r_0$ no coincide con r_0 . La distancia propia es

$$\ell(r_0) = \int_0^{r_0} \Phi^2(s) ds, \quad (9)$$

mientras que el radio de área es

$$r_0^{(A)} := \sqrt{\frac{A(r_0)}{4\pi}} = \Phi^2(r_0)r_0, \quad (10)$$

donde $A(r_0)$ es el área de la superficie. Al integrar por partes en la ecuación (9), se tiene que $\ell \geq r^{(A)}$.

En términos de Φ , se definen nuevas *cantidades conformes*

$$\tilde{\mathcal{E}}^i(r) := \Phi^6 \mathcal{E}^i(r), \quad \tilde{\rho}(r) := \Phi^6 \rho(r), \quad (11)$$

tales que las ecuaciones (7) resultan

$$\tilde{\mathcal{D}}_i \tilde{\mathcal{E}}^i = 4\pi\tilde{\rho}, \quad (12)$$

$$\Delta\Phi = -\frac{\tilde{\mathcal{E}}^2}{4\Phi^3}, \quad (13)$$

donde ahora $\tilde{\mathcal{D}}_c$ es la derivada covariante de Levi-Civita respecto de la métrica euclídea y Δ el operador laplaciano plano.

Nótese que la carga total \mathcal{Q} es *conformemente invariante* bajo la transformación (11).

3. Resultados obtenidos

Sea $(\Sigma, h_{ij}, K_{ij} = 0)$ un dato inicial que contiene una esfera de *radio plano* $r = R$ y *densidad conforme* de carga $\tilde{\rho}$ constante. Se desea resolver las ecuaciones (12) y (13) para $\Phi(r)$, con condición asintóticamente plana en infinito,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(r) = 1. \quad (14)$$

Dado que la ecuación (13) es no lineal, resulta casi imposible encontrar una solución general para la misma. No obstante, el carácter manifiestamente elíptico de dicha ecuación permite estimar la solución exacta, acotándola por funciones que satisfacen problemas *lineales*. Este resultado es un teorema, cuyo enunciado es el siguiente²:

²Para más detalles, consulte 7.

Teorema 3.1. Sea Ω una región acotada y considere el problema

$$\Delta u = f(u), \quad u|_{\partial\Omega} = g, \quad (15)$$

donde $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Sea u_+ una solución de

$$\Delta u_+ \leq f(u_+), \quad u_+|_{\partial\Omega} = g, \quad (16)$$

y u_- una solución de

$$\Delta u_- \geq f(u_-), \quad u_-|_{\partial\Omega} = g. \quad (17)$$

Entonces, existe una solución del problema (15), y más aún,

$$u_- \leq u \leq u_+ \quad (18)$$

en Ω .

Las funciones u_- y u_+ se dicen, respectivamente, *subsolución* y *supersolución* de u .

Considérese ahora una función u tal que

$$\Phi = 1 + u. \quad (19)$$

La ecuación (13) implica que u satisface la ecuación

$$\Delta u = -\frac{\tilde{\mathcal{E}}^2}{4(1+u)^3}. \quad (20)$$

El campo eléctrico conforme puede calcularse explícitamente en virtud de la Ec. (12):

$$\tilde{\mathcal{E}}(r) = \begin{cases} \frac{4\pi\tilde{\rho}}{3}r, & r \leq R \\ \frac{4\pi\tilde{\rho}R^3}{3r^2}, & r > R. \end{cases} \quad (21)$$

Se tiene entonces el siguiente

Lema 3.2. La función u_- que satisface el problema

$$\Delta u_- = -\frac{\tilde{\mathcal{E}}^2}{\left(1 + \frac{\pi^2}{3}\tilde{\rho}^2R^4\right)^3}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} u_- = 0, \quad (22)$$

es una subsolución de u .

Prueba: Nótese primero que la Ec. (22) se trata de un problema *lineal* para u_- . La única solución suave puede calcularse explícitamente. En efecto,

$$u_-(r) = \begin{cases} \frac{2\pi^2\tilde{\rho}^2}{9\left(1 + \frac{\pi^2}{3}\tilde{\rho}^2R^4\right)^3} \left(\frac{3}{2}R^4 - \frac{1}{10}r^4\right), & r \leq R \\ \frac{16\pi^2\tilde{\rho}^2R^5}{9\left(1 + \frac{\pi^2}{3}\tilde{\rho}^2R^4\right)^3} r \left(\frac{3}{10} - \frac{R}{8r}\right), & r > R. \end{cases} \quad (23)$$

Esta función es monótonica decreciente para cualquier valor de $\tilde{\rho}$ y R , y por lo tanto

$$u_-(r) \leq u_-(0) = \frac{\pi^2\tilde{\rho}^2R^4}{3\left(1 + \frac{\pi^2}{3}\tilde{\rho}^2R^4\right)^3} \leq \frac{\pi^2}{3}\tilde{\rho}^2R^4, \quad (24)$$

lo que implica que

$$\Delta u_- = -\frac{\tilde{\mathcal{E}}^2}{\left(1 + \frac{\pi^2}{3}\tilde{\rho}^2R^4\right)^3} \geq -\frac{\tilde{\mathcal{E}}^2}{(1+u_-)^3}, \quad (25)$$

y finalmente se sigue que $u_- \leq u$. \square

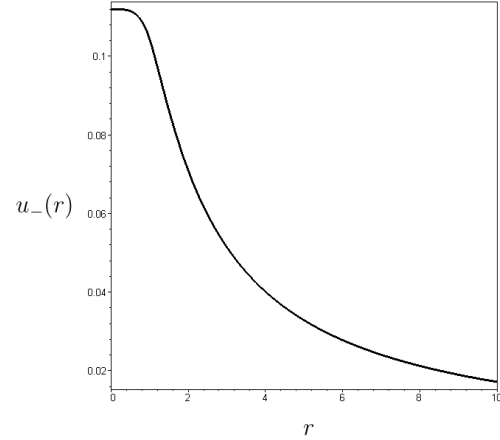


Figura 2. Gráfico de $u_-(r)$ para $\tilde{\rho} = 3/4\pi$ y $R = 1$.

A partir de la subsolución anterior para u , es posible contruir explícitamente una **cota inferior** $r_-^{(A)}$ **para el radio de área** $r^{(A)}$ **de la esfera**. En efecto, definiendo $\Phi_- := 1 + u_-$, se tiene que

$$r_-^{(A)} := r\Phi_-(r)^2 \leq r\Phi(r)^2 = r^{(A)}. \quad (26)$$

La carga eléctrica para $r \leq R$ es $\mathcal{Q}(r) = \frac{4}{3}\pi\tilde{\rho}r^3$. Tomando la diferencia $\Delta := r_-^{(A)} - \mathcal{Q}$ para cualquier $r \leq R$, se obtiene

$$\frac{\Delta}{r} = \frac{\left(\frac{x^2}{5} - 3\Lambda\right)^2}{256\left(1 + \frac{3\Lambda}{16}\right)^6} + \frac{15\Lambda - x^2}{40\left(1 + \frac{3\Lambda}{16}\right)^3} - x + 1, \quad (27)$$

donde se han definido nuevas variables

$$x := \frac{4}{3}\pi\tilde{\rho}r^2, \quad \Lambda := \frac{16\pi^2}{9}\tilde{\rho}^2R^4. \quad (28)$$

Se observa que la diferencia entre la carga y el tamaño de la esfera está dada por un polinomio de cuarto grado en x , $P_\Lambda(x) := \Delta/r$. Dado que $r \geq R$, x varía de 0 a $\sqrt{\Lambda}$, lo que automáticamente implica que

$$P_\Lambda(x) \geq \frac{7\Lambda}{20\left(1 + \frac{3\Lambda}{16}\right)^3} - \sqrt{\Lambda} + 1 \geq -\sqrt{\Lambda} + 1. \quad (29)$$

Luego, si se pide que $\sqrt{\Lambda} \leq 1$, $P_\Lambda(x)$ es positivo para $0 \leq x \leq \sqrt{\Lambda}$. La condición anterior equivale a pedir que

$$\mathcal{Q} \leq R. \quad (30)$$

Con estos argumentos se ha demostrado el resultado principal de este trabajo, enunciado en el siguiente

Teorema 3.3. *Sea $(\Sigma, h_{ij}, K_{ij} = 0)$ un dato inicial asintóticamente plano de las ecuaciones de campo, tal que satisface la condición de energía dominante, el cual contiene una esfera de radio plano R con densidad conforme constante y carga eléctrica total \mathcal{Q} . Suponga que en el borde de la esfera se cumple que*

$$R \geq \mathcal{Q}, \quad (31)$$

entonces se satisface la desigualdad

$$r^{(A)}(r) \geq \mathcal{Q}(r) \quad (32)$$

para todo $r \leq R$.

4. Comentarios finales

Se ha encontrado una evidencia relevante de la validez de una desigualdad universal entre carga eléctrica y tamaño para objetos ordinarios. Recordando la cota $\ell \geq r^{(A)}$ entre las dos medidas de tamaño en simetría esférica, y en virtud del teorema 3.3, la desigualdad de la Ec. (32) se satisface también si se considera la longitud propia como medida de tamaño.

A partir de esta contribución, es posible continuar el estudio de la conjetura con el objetivo de probarla en

general para el caso de simetría esférica, abordando el problema tanto analíticamente como numéricamente si resulta necesario.

5. Agradecimientos

Es un placer agradecer a Emanuel Gallo por el argumento heurístico propuesto para entender la desigualdad en geometría euclídea.

Referencias

- [1] Dain, S., Jaramillo, J. y Reiris, M. *Class. Quant. Grav.*, **29**, 035013 (2012).
- [2] Rubio, M. E. *Desigualdad entre carga y tamaño en Relatividad General*. Facultad de Matemática, Atronomía y Física. Universidad Nacional de Córdoba (2014).
- [3] Galloway, G. y O' Murchadha, N. *Class. Quant. Grav.*, **25**, 105009 (2008).
- [4] Schoen, R. y Yau, S. *Commun. Math.*, **90**, 575 - 579 (1983).
- [5] O' Murchadha, N. *Phys. Rev. Letters*, vol. 57, no. 19 (1986).
- [6] Flanagan, E. *Phys. Rev. D*, vol. 44, no. 8 (1991).
- [7] Evans, L. *Partial Differential Equations*. Graduate Students in Mathematics. Volume 19. Second Edition. American Mathematical Society (2010).