

# ONDAS ROTANTES EN UN TUBO ANULAR INFINITO

## ROTATING WAVES IN A INFINITE ANNULAR TUBE

González R<sup>1</sup>, Sartarelli A S<sup>2</sup>

1,2 Instituto de Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento  
Juan María Gutiérrez 1150 – (1613) Buenos Aires – Argentina  
Recibido 16/06/2015; aceptado 14/07/2015

Las ondas resultantes de la perturbación de un flujo en rotación rígida en un tubo infinito poseen una estructura de modos conocida y están asociadas a un flujo de Beltrami. En este trabajo se estudian las ondas rotantes en un tubo anular infinito. Mostramos que la estructura de Beltrami se preserva y que a medida que la distancia entre tubos disminuye, un modo de oscilación representado en el plano número de onda- frecuencia ( $k - \sigma$ ) que coincide inicialmente (para  $k > 0$  y menor que un cierto límite) con el modo correspondiente al del tubo exterior solo, se desplaza para dicho  $k$  límite, hasta coincidir con el modo vecino de menor frecuencia del tubo solo, resultando globalmente, para un  $k$  dado, en una suerte de contracción de frecuencias con respecto a la estructura de modos del tubo solo.

*Palabras clave:* fluidos rotantes, ondas de kelvin, flujo de Beltrami.

Waves resulting from the perturbation of a solid body rotation flow in an infinite tube have a known mode structure and are associated to a Beltrami flow. In this paper, rotating waves in an annular infinite tube are studied. We show that the Beltrami flow structure is preserved and that as the distance between tubes is decreased, an oscillation mode represented in the plane  $k - \sigma$ , that coincides initially (for  $k > 0$  and less than a limit  $k$ ) with the mode corresponding to the external tube alone, is shifted for such a limit  $k$ , towards the neighboring sub-mode of the tube alone, resulting, globally for a given  $k$ , a kind of frequencies contraction, with regards to the tube alone.

*Keywords:* rotating fluids, Kelvin waves, Beltrami flow.

### I. INTRODUCCIÓN

Las ondas rotantes en un conducto cilíndrico infinito han sido estudiadas desde el trabajo liminar de Kelvin en adelante<sup>1,2,3,4</sup>. Sin embargo uno de los aspectos centrales de su estructura como flujo, ha sido puesto de relieve en los últimos años, en especial el hecho de que las ondas que resultan de la perturbación de una rotación rígida o a la que se le añade una traslación uniforme tienen una estructura de Beltrami<sup>5,6,7,8</sup>. El estudio de las ondas rotantes en un anulo infinito, en un fluido ideal es considerado por Chandrasekhar<sup>2</sup> de modo genérico, pero sin la obtención de la estructura de los modos ni la del flujo. Es por ello que, como un primer paso en esta dirección, nos hemos abocado en este trabajo a obtener la estructura de modos y compararla con el caso de tubo infinito.

### II. OBTENCIÓN DE LA ECUACION DE ONDAS ROTANTES Y SUS SOLUCIONES

Consideramos en un tubo de radio exterior  $l$  y radio interior  $R$  (adimensionalizados con el radio exterior) un flujo consistente en una rotación rígida es decir con  $v_\theta = \Omega r$ , que es perturbado. En un sistema que rote con  $\Omega$  la ecuación de Euler para la perturbación se escribe como

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla H \quad (1)$$

$$\text{siendo } H = p + \frac{v^2}{2} - \frac{1}{2} \rho (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 \quad (2)$$

$$\text{y considerando soluciones del tipo } \{\mathbf{v}, H\} = C\{u_r(r), u_\theta(r), u_z(r), H(r)\} e^{i(kz + m\theta - \sigma t)} \quad (3)$$

luego de despreciar el término de segundo orden  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \cong 0$ , podemos poner estas ecuaciones en la forma

$$u_r = -\frac{i\sigma}{\tilde{\Omega}^2} \frac{d\hat{H}}{dr} - \frac{2im\Omega}{r\tilde{\Omega}^2} \hat{H} \quad (4a)$$

$$u_\theta = \frac{2\Omega}{\tilde{\Omega}^2} \frac{d\hat{H}}{dr} + \frac{m\sigma}{r\tilde{\Omega}^2} \hat{H} \quad (4b)$$

$$iu_z = -\frac{k}{\sigma} \hat{H} \quad (4c)$$

$$\frac{d^2 \hat{H}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\hat{H}}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \hat{H} + k^2 \frac{\tilde{\Omega}^2}{\sigma^2} = 0 \quad (4d)$$

$$\text{con } \tilde{\Omega}^2 = \Omega^2 - \sigma^2.$$

Y de (4d) obtenemos la solución correspondiente al espacio tubular

$$\hat{H} = A_m J_m(\alpha r) + B_m Y_m(\alpha r). \quad (5)$$

$$\text{con } \alpha^2 = \left( \frac{2\Omega k}{\sigma} \right)^2 - k^2 = (\gamma)^2 - k^2, \quad \gamma = \frac{2\Omega k}{\sigma}.$$

Las condiciones de borde correspondientes a esta configuración son

$$u_r(1) = u_r(R) = 0. \quad (6)$$

Y reemplazando (5) en (4a-4c) obtenemos

$$\mathbf{u}(r) = A_m \{f(J_m(\alpha r)), g(J_m(\alpha r)), h(J_m(\alpha r))\} + B_m \{f(Y_m(\alpha r)), g(Y_m(\alpha r)), h(Y_m(\alpha r))\} \quad (7)$$

donde

$$f(x_m(\alpha r)) = i \left( \frac{m}{r} x_m(\alpha r) + \frac{\alpha k}{\gamma} x'_m(\alpha r) \right),$$

$$g(x_m(\alpha r)) = \left( -\alpha x'_m(\alpha r) - \frac{mk}{r\gamma} x_m(\alpha r) \right),$$

$$h(x) = \frac{(\alpha k)^2}{\gamma} x_m(\alpha r), \quad (8)$$

y donde  $x_m = J_m$  o  $Y_m$ . Con el campo dado por (7) y (8) se verifica la relación  $\nabla \times \mathbf{v} = \gamma \mathbf{v}$  y entonces  $\mathbf{v}$  es un flujo de Beltrami, por lo que la relación  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = 0$  es exacta y luego las ondas resultantes pueden tener amplitud finita. Al aplicarles a estas soluciones las condiciones de borde

(6), obtenemos entonces la relación de dispersión  $\sigma = \sigma(k)$ . Esta condición se escribe finalmente como

$$\chi(Y_m(\alpha R)) \chi(J_m(\alpha)) - \chi(J_m(\alpha R)) \chi(Y_m(\alpha)) = 0, \quad (9)$$

donde

$$\chi(x_m(x)) = \sigma x x_m(x) + 2m\Omega x_m(x) \quad (10)$$

### III. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

1- La solución dada por (7) cumple la condición de Beltrami  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} = \gamma \mathbf{v}$  y por lo tanto el vector de Lamb de la perturbación  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , es decir que la solución encontrada cumple exactamente la ecuación no lineal y puede ser de amplitud finita.

2- La relación de dispersión. Para un tubo de radio  $l$  sin tubo interno, la relación  $\sigma = \sigma(k)$  está representada en la Fig.1

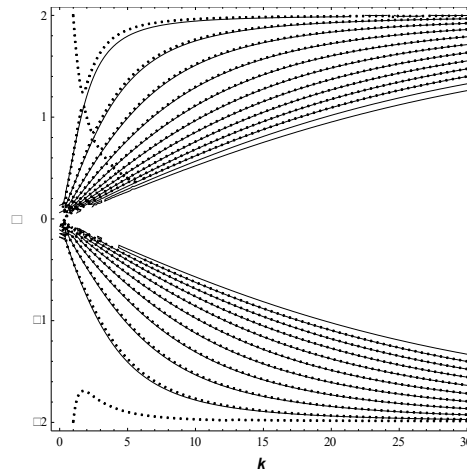


Fig.1-Relación de dispersión  $\sigma = \sigma(k)$  correspondiente a los sub-modos del modo  $m=1$  para el tubo (línea continua) y para el ánulo con  $R=0.01$  (línea de puntos)

en línea continua para  $m=1$ , con dos ramas  $\sigma^+$  para las frecuencias positivas y  $\sigma^-$  para las frecuencias negativas. El modo más externo o de mayor pendiente (en valor absoluto) corresponde al primer sub-modo  $i=1$  y los siguientes sub-modos  $i=2,3\dots$  son los subsiguientes en

ambas ramas a medida que la pendiente disminuye. Llamémoslos sub-modos del tubo. También en la Fig.1 se representan en línea de puntos, los sub-modos correspondientes a  $m=1$  para un anulo de radio interno  $R=0.01$ . Llamémoslos sub-modos del ánulo para el radio interior especificado. Vemos que hay una “contracción” de sub-modos del ánulo para  $\sigma^+$  con respecto a los sub-modos del tubo, es decir que para un mismo  $k$  (y a partir de un  $k$  dado) la frecuencia de los sub-modos del anulo, son menores que las del tubo, con un mecanismo que cualitativamente podría describirse de la siguiente forma: el primer sub-modo del ánulo coincide con el primer sub-modo del tubo hasta cierto  $k_s$ , a partir del cual el sub-modo del ánulo se separa y pasa a ocupar el lugar (en el plano  $k - \sigma$ ) del sub-modo siguiente del tubo. Se observa que lo mismo ocurre para cada uno de los sub-modos del ánulo. En la rama inferior, para este valor del radio, apenas se nota un desplazamiento (en el sentido contractivo mencionado)

A medida que el radio  $R$  aumenta, este proceso de “contracción” continúa pero lo que llamamos  $k_s$  disminuye (Fig. 2) y además el sub-modo  $i=1$  del ánulo comienza coincidiendo con un sub-modo  $i>1$  del tubo. Por ejemplo el sub-modo  $i=1$  del ánulo

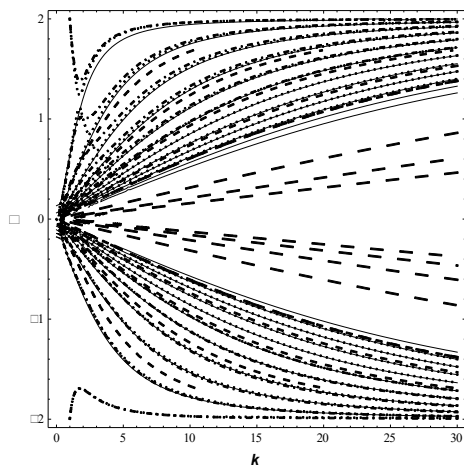


Fig.3-Relación de dispersión  $\sigma = \sigma(k)$  correspondiente a los sub-modos del modo  $m=1$  para el tubo (línea continua) y para los ánuos con  $R=0.01$ (línea de puntos)  $R=0.1$  (línea de trazos y puntos),  $R=0.5$  (línea de trazos cortos) y  $R=0.9$  (línea de trazos largos)

de radio  $R=0.5$  (Fig.3, (línea de trazos cortos) comienza coincidiendo con el sub-modo  $i=2$  del tubo. Y el sub-modo  $i=1$  del ánulo de radio  $R=0.9$  (Fig.3, línea de trazos largos) comienza coincidiendo con el sub-modo  $i=10$  del tubo. Lo mismo ocurre con los sub-modos del ánulo para modos  $m>1$ .

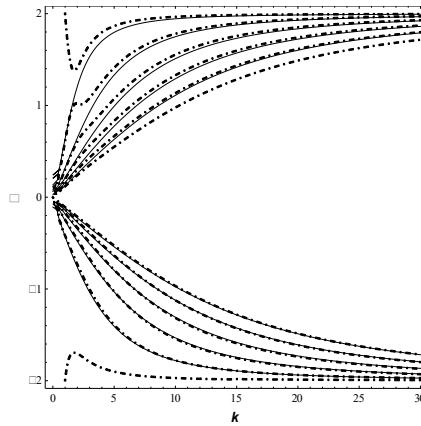


Fig.2-Relación de dispersión  $\sigma = \sigma(k)$  correspondiente a los sub-modos del modo  $m=1$  para el tubo (línea continua) y para el ánulo con  $R=0.1$  (línea de trazos y puntos)

En conclusión, en un ánulo los modos de las ondas de Kelvin obtenidos son *análogos* a los del tubo de igual radio que el del exterior del ánulo (en este caso  $1$ ). El efecto del tubo interior se manifiesta en que un aumento del radio interno del ánulo, produce una “contracción” de sub-modos con un proceso como el descrito previamente.

#### IV. REFERENCIAS

- 1- Lord Kelvin, “Vibrations of a columnar vortex,” *Philos. Mag.* **10**, 155 (1880).
- 2- S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* (Oxford University Press, 1961).
- 3- L. D. Landau and E. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Butterworth Heinemann, 1987).
- 4- G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluids Dynamics* (Cambridge University Press, 1967).
- 5- R. Gonzalez and E. S. Santini, “The dynamics of beltramized flows and its relation with the kelvin waves,” *J. Phys.: Conf.Ser.* **296**, 012024 (2011).
- 6- D. G. Dritschel, “Generalized helical Beltrami flows in hydrodynamics and magnetohydrodynamics,” *J. Fluid Mech.* **222**,525 (1991).