

UNIVERSALIDAD DEL COMPORTAMIENTO EN LA ETAPA FINAL DE EPISODIOS DE HIPERINFLACIÓN EN ECONOMÍA

UNIVERSALITY OF THE BEHAVIOR AT THE FINAL STAGE OF HYPERINFLATION EPISODES IN ECONOMY

Martín A. Szybisz

*Departamento de Economía, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires,
Av. Córdoba 2122, RA-1120 Buenos Aires, Argentina*

Leszek Szybisz*

*Laboratorio TANDAR, Departamento de Física, Comisión Nacional de Energía Atómica,
Av. del Libertador 8250, RA-1429 Buenos Aires, Argentina
Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,
Universidad de Buenos Aires, Ciudad Universitaria, RA-1428 Buenos Aires, Argentina and
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas,
Av. Rivadavia 1917, RA-1033 Buenos Aires, Argentina*

Recibido: 20/11/2013 / Aceptado: 1/6/2014

Un modelo para describir la dinámica de episodios de hiperinflación en base a “expectativas de inflación adaptativas” con un proceso positivo de retroalimentación no lineal se ha propuesto hace un par de años. En el formalismo se supone que la velocidad de la tasa de crecimiento $r(t)$ del logaritmo del índice de precios acumulados $p(t)$ obedece una ley de potencias dando lugar a una singularidad a tiempo t finito, el valor crítico t_c es un indicador del instante en el cual una economía en crisis colapsa. En el marco de este modelo se examinaron simultáneamente las series temporales de $r(t)$ y $p(t)$ para t cerca de t_c en los casos de graves episodios de hiperinflación. Se encontró que en tales condiciones los sistemas económicos evolucionan con un exponente común β de una ley de potencias. El resultado de β es muy cercano al valor crítico $\beta_c = 1$, lo que conduce a una divergencia logarítmica de $p(t)$ en t_c . Esta singularidad logarítmica es comprobada satisfactoriamente.

Palabras claves: teoría de singularidades, aplicaciones interdisciplinarias de la física, econofísica, sistemas sociales.

A model to describe the dynamics of episodes of hyperinflation based on collective “adaptive inflation expectations” with a positive nonlinear feedback has been proposed a couple of years ago. In such a formalism it is assumed that the velocity of the growth rate $r(t)$ of the logarithm of the cumulated price index $p(t)$ obeys a power law leading to a finite-time singularity at a critical time t_c , which is a signature for an economic crash. In the frame of that model, the time series of $r(t)$ and $p(t)$ for t close to t_c were examined simultaneously in the cases of severe episodes of hyperinflation. It was found that under such conditions the economic systems evolve with a common exponent β of the power law. The result for β is very close to the critical value $\beta_c = 1$, which leads to a logarithmic divergence of $p(t)$ at t_c . This logarithmic singularity is satisfactorily tested.

Keywords: singularity theory, interdisciplinary applications of physics, econophysics, social systems.

I. INTRODUCCIÓN

Desde hace cerca de dos décadas existe un creciente interés en aplicaciones de métodos físicos a las ciencias sociales y económicas [1–3]. En este informe nos dirigimos a la descripción de los regímenes de hiperinflación. Estos contextos son de especial interés porque muestran, de una forma casi pura, el impacto de comportamientos colectivos de personas que interactúan a través de sus expectativas.

Se considera que el primer estudio exhaustivo sobre la hiperinflación y sus efectos han sido efectuado por Cagan en el artículo *The Monetary Dynamics of Hyperinflation* [4] publicado en 1956. Sus supuestos conducen a un crecimiento exponencial del nivel de precios. Hoy día, se sabe que el enfoque de la Cagan es sólo una descripción de orden cero del fenómeno. Un interesante estudio de cuatro episodios de hiperinflación que se produjeron después de la Primera Guerra Mundial se puede encontrar en el trabajo de Sargent (Premio Nobel 2011 en Economía) [5]. Más recientemente, Mizuno, Takayasu, y Takayasu (MTT) [6] propusieron un modelo de realimentación lineal reforzado. Bajo tal supuesto, encontraron que durante una hiperinflación los precios deberían seguir una ley doble-

*Corresponding author: szybisz@tandar.cnea.gov.ar

mente exponencial, que reproduce mejor los datos medidos del índice de precios acumulado (CPI) que la formulación de Cagan. Posteriormente, Sornette, Takayasu, y Zhou (STZ) [7] extendieron el modelo MTT a una retroalimentación no lineal. En esta generalización, la evolución de las series de tiempo del CPI termina con una singularidad en tiempo finito con un tiempo crítico t_c , similar a la observada en varios sistemas físicos.

En trabajos recientes [8–10], volvimos a analizar y entender la aplicación del modelo STZ. En esos estudios incluimos un estudio de la espiral de hiperinflación desarrollada en Zimbabwe. Esta es la primera hiperinflación del siglo 21. En base a nuestros resultados, pudimos prever con una buena aproximación la fecha del quiebre económico de ese país [8, 11, 12].

En el presente informe, hemos de aplicar la versión revisada del modelo de [9] para analizar la evolución en el tiempo cerca del abrupto final de los episodios de hiperinflación. El objetivo de este estudio es la búsqueda de características comunes para estos eventos.

En la Sec. II presentaremos la formulación teórica. La Sección III está dedicada a reportar y analizar los resultados obtenidos. Finalmente, las conclusiones principales son expuestas en la Sec. IV.

II. FORMULACIÓN TEÓRICA

Recordemos que la tasa de inflación $i(t)$ es definida como

$$i(t) = \frac{P(t) - P(t - \Delta t)}{P(t - \Delta t)} = \frac{P(t)}{P(t - \Delta t)} - 1, \quad (1)$$

donde $P(t)$ es el precio en el tiempo t y Δt es el período de medición frecuentemente llamado gap. En la literatura financiera académica, la forma más simple y robusta de contabilizar la inflación es usar la variación logarítmica de $P(t)$. Adoptando la “frog-leap” discretización [13] se puede escribir

$$C(t + \frac{\Delta t}{2}) = \frac{[\ln P(t + \Delta t) - \ln P(t)]}{\Delta t} = \frac{p(t + \Delta t) - p(t)}{\Delta t}, \quad (2)$$

donde la ampliamente usada notación

$$p(t) = \ln P(t) \quad (3)$$

es introducida. La tasa de crecimiento (GR) del log-precio sobre un período (una media de la velocidad de cambio) es definida como

$$r(t + \frac{\Delta t}{2}) \equiv C(t + \frac{\Delta t}{2}) \Delta t = \ln \left[\frac{P(t + \Delta t)}{P(t)} \right] = \ln[1 + i(t + \Delta t)]. \quad (4)$$

El CPI es definido como

$$P(t) = P(t_0) \exp \left[\int_{t_0}^t r(t') \frac{dt'}{\Delta t'} \right], \quad (5)$$

donde para asegurar un exponente sin dimensión el tiempo debería estar medido en las mismas unidades del período $\Delta t'$ de los datos estadísticos (i.e., días, meses, o años).

En su trabajo pionero sobre hiperinflación Cagan [4] propone un modelo basado en el mecanismo de la “expectativas adaptativas” con una simple retroalimentación positiva entre el crecimiento realizado del precio de mercado $P(t)$ y el crecimiento promedio esperado de la población $P^*(t - \Delta t)$

$$\frac{P(t + \Delta t)}{P(t)} = 1 + i(t + \Delta t) = \frac{P^*(t)}{P(t)} = \frac{P^*(t)}{P^*(t - \Delta t)}. \quad (6)$$

La razón $P^*(t)/P(t)$ indica que la adaptación del proceso induce una respuesta no exactamente proporcional debido al hecho que el nivel de precios esperado $P^*(t)$ expande la respuesta al nivel de precios $P(t)$ para predecir e igualar la inflación del período siguiente. Introduciendo la GR de expectativa

$$r^*(t + \frac{\Delta t}{2}) \equiv C^*(t + \frac{\Delta t}{2}) \Delta t = \ln \left[\frac{P^*(t + \Delta t)}{P^*(t)} \right], \quad (7)$$

la Eq. (6) se puede reescribir como

$$r(t + \frac{\Delta t}{2}) = r^*(t - \frac{\Delta t}{2}). \quad (8)$$

En la formulación de Cagan se asume que un cambio positivo del precio de mercado $P(t - \Delta t)$ en una unidad de tiempo Δt induce una alza en las expectativas de precios de la población $P^*(t)$

$$\frac{P^*(t + \Delta t)}{P^*(t)} = \frac{P(t)}{P(t - \Delta t)}, \quad (9)$$

y que dicha anticipación hace crecer el precio de mercado. Sin embargo, hoy es sabido que una hiperinflación no se puede reproducir con este enfoque. La clave es asumir que el índice de precios de expectativa $P^*(t)$ evoluciona con el siguiente mecanismo de retroalimentación no lineal positivo [6–10]

$$\ln \left[\frac{P^*(t + \Delta t)}{P^*(t)} \right] = \ln \left[\frac{P(t)}{P(t - \Delta t)} \right] \times \left(1 + 2 a_p \left\{ \ln \left[\frac{P(t)}{P(t - \Delta t)} \right] \right\}^\beta \right), \quad (10)$$

llevado a

$$r(t + \Delta t) = r(t - \Delta t) + 2 a_p [r(t - \Delta t)]^{1+\beta}. \quad (11)$$

Aquí a_p es un parámetro positivo que mide la intensidad de retroalimentación de la contribución no lineal y $\beta \geq 0$ es el exponente de la ley de potencias. Ya que β puede ser un número real no entero este formalismo requiere $r(t) \geq 0$. Es razonable suponer que esta condición se

cumple estadísticamente en un régimen de hiperinflación. Esta formulación capta bien el proceso intrínsecamente no lineal de la formación de expectativas. Así, cuando la GR adquiere un tamaño significativo, las expectativas de las personas comienzan a amplificar las tasas de crecimiento realizadas, lo cual conduce a un crecimiento super-exponencial. De paso, dejamos señalado que con $\beta = 0$ se obtiene el modelo MTT.

Tomando el límite continuo en Eq. (11) se obtiene la siguiente ecuación para la evolución temporal de r

$$\frac{dr}{dt} = \frac{a_p}{\Delta t} [r(t)]^{1+\beta} = a_1 [r(t)]^{1+\beta}, \quad (12)$$

donde a_1 es un coeficiente positivo de dimensión inversa al tiempo. Asumiendo $\beta > 0$ la solución para la GR sigue una ley de potencias exhibiendo una singularidad a tiempo finito t_c [7–10]

$$r(t) = r_0 \left[\frac{1}{1 - \beta a_p r_0^\beta \left(\frac{t-t_0}{\Delta t} \right)} \right]^{1/\beta} = r_0 \left(\frac{t_c - t_0}{t_c - t} \right)^{1/\beta}. \quad (13)$$

Este enfoque teórico predice una trayectoria hasta el tiempo crítico t_c . El tiempo crítico t_c es determinado por la GR inicial $r(t = t_0) = r_0$, el exponente β y el parámetro de intensidad a_p siendo

$$t_c - t_0 = \frac{1}{\beta a_1 r_0^\beta} = \frac{\Delta t}{\beta a_p r_0^\beta}. \quad (14)$$

El ln-CPI es obtenido integrando $r(t)$ de acuerdo a Eq. (5)

$$p(t) = p_0 + \int_{t_0}^t r(t') \frac{dt'}{\Delta t'}. \quad (15)$$

El cuantificador $p(t)$ exhibe los siguientes regímenes hiperinflacionarios dependiendo del tamaño de β [9]:

(i) Para $0 < \beta < 1$, se obtiene una hiperinflación estándar con una singularidad a tiempo finito en el ln-CPI de acuerdo a la ley de potencias

$$p(t) = p_0 + \frac{\beta r_0}{1 - \beta} \left(\frac{t_c - t_0}{\Delta t} \right) \left[\left(\frac{t_c - t_0}{t_c - t} \right)^{\frac{1-\beta}{\beta}} - 1 \right]. \quad (16)$$

(ii) Para $\beta = 1$, el ln-CPI exhibe una divergencia logarítmica

$$p(t) = p_0 + r_0 \left(\frac{t_c - t_0}{\Delta t} \right) \ln \left(\frac{t_c - t_0}{t_c - t} \right). \quad (17)$$

En ambos regímenes, (i) y (ii) $p(t)$ exhibe una singularidad a tiempo finito en el mismo valor crítico t_c que GR.

III. RESULTADOS Y ANÁLISIS

En el presente trabajo fijamos $p_0 = p(t_0)$ y los restantes parámetros t_c , β , y r_0 fueron determinados de ajustes simultáneos de la GR y el CPI aplicando un ajuste no lineal

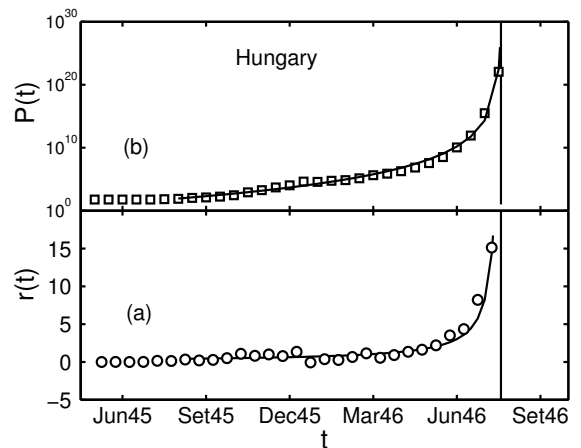


FIG. 1: (a) GR bisemanal en Hungría durante el período 1945:04:30-1946:07:15. (b) Gráfico semilogarítmico del CPI para el mismo período. En ambos paneles la curva continua es el ajuste obtenido con $\beta = 1$ (ver texto y Tabla I). La línea vertical indica la estimación de t_c .

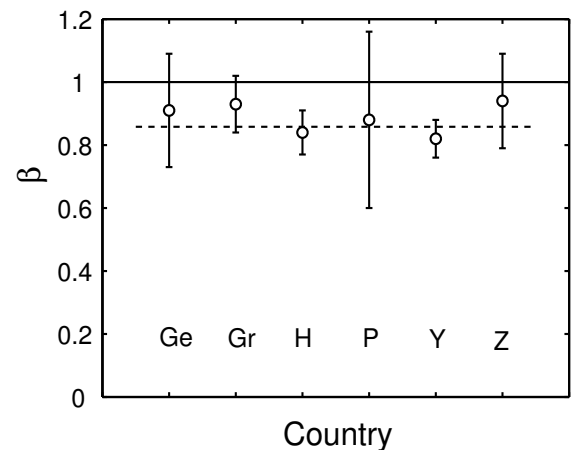
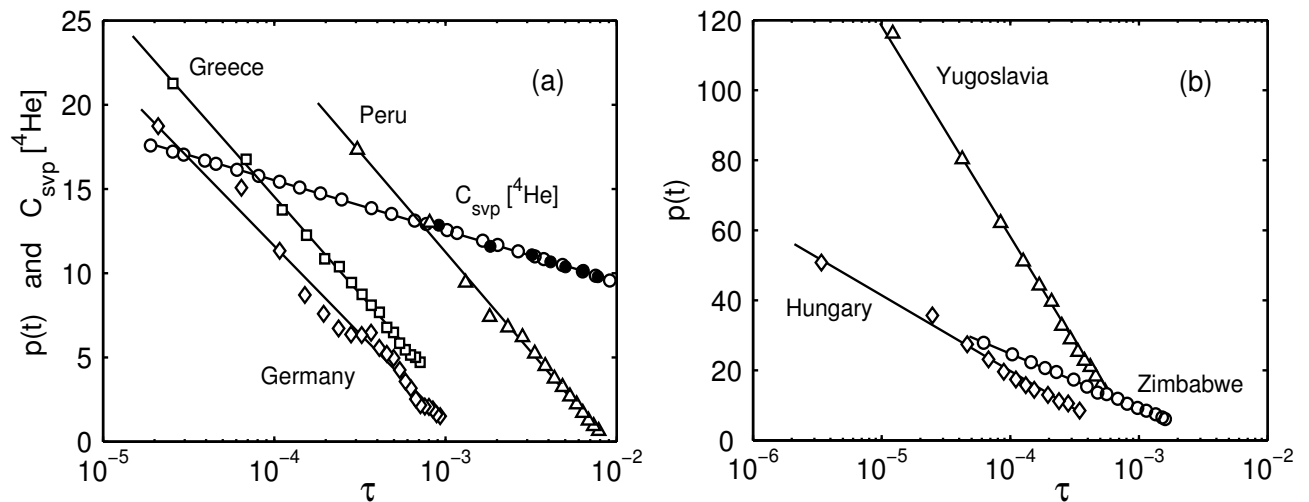


FIG. 2: Exponente β para los episodios ocurridos en: Ge–Alemania; Gr–Grecia; H–Hungría; P–Perú; Y–Yugoslavia; y Z–Zimbabue. La línea de puntos indica el valor medio.

de mínimos cuadrados que minimiza las χ^2 . Este procedimiento permite la verificación de la auto-consistencia de los análisis. La labor numérica se realizó con el uso de una rutina del libro de Bevington [14] citado como primera referencia en los Cap. 15.4 y 15.5 de la más reciente *Numerical Recipes* [15]. La incerteza de cada parámetro se obtuvo directamente del procedimiento de minimización. Los casos de hiperinflación más graves ocurridos en los países que figuran en la tabla I fueron analizados. Para los datos de Alemania fueron tomados de la Tabla G1 de Ref. [5]; para Grecia de la Tabla B6 de Ref. [4]; para Hungría de la Tabla A.1 de Ref. [16]; para Perú de la Tabla del International Monetary Fund (IMF) [17]; para Yugoslavia de Refs. [18] y [19]; y para Zimbabue del Re-

TABLE I: Hiperinflaciones analizadas, tiempo crítico t_c , restantes parámetros con sus incertezas estimadas y χ .

País	Período	t_c	Parámetros			Coeficientes para $p(\tau)$		χ
			β	r_0	p_0	A	B	
Alemania	1922:04-1923:10	1923:11:16±16	0.91±0.18	0.234±0.035	8.756			0.490
		1923:11:09±04	1	0.250±0.014	8.756	-23.91	-4.576	0.490
Grecia	1943:08-1944:11	1944:11:18±04	0.93±0.09	0.355±0.037	5.150			1.276
		1944:11:15±03	1	0.380±0.014	5.150	-35.62	-5.522	1.255
Hungria	1945:09:30-1946:07:15	1946:07:24±04	0.84±0.07	0.454±0.032	5.630			0.835
		1946:07:18±03	1	0.523±0.012	5.630	-72.70	-10.05	0.923
Perú	1975-1990	1992±1	0.88±0.28	0.309±0.053	0.643			0.346
		1991:08±03	1	0.330±0.021	0.643	-24.35	-5.155	0.348
Yugoslavia	1993:00-1994:01	1994:02:21±04	0.82±0.06	1.785±0.056	13.945			0.897
		1994:01:27±02	1	2.006±0.004	13.945	-182.29	-26.106	1.327
Zimbabwe	2005:06-2008:07	2008:10±02	0.94±0.15	0.170±0.015	6.091			0.187
		2008:09:00±03	1	0.175±0.006	6.091	-37.28	-6.735	0.191

FIG. 3: Ln-CPI como función del log de la distancia relativa hasta t_c . Todos los episodios analizados de las hiperinflaciones son expuestos, los símbolos son datos y las líneas rectas fueron calculadas con la Eq. (18). Datos del calor específico C_{svp} para ${}^4\text{He}$ trazados en el panel (a) son: círculos cerrados de [23] y círculos abiertos de [24].

serve Bank of Zimbabwe [20] y Tabla 1 de Ref. [21]. En el caso de Hungría la serie de datos es construida con frecuencia de dos semanas [16]. Se usan los datos de cada día 15 y el último del mes. Para Perú se utilizó datos anuales, mientras que para los otros países se usaron datos mensuales.

En un primer paso, efectuamos ajustes de datos para Eqs. (13) y (16). Los parámetros obtenidos se muestran en la Tabla I junto con el correspondiente χ . Los ajustes para GR y el CPI son de una calidad similar a la reportada en anteriores trabajos [8–10]. Por ejemplo, la Fig. 1 muestra los datos y el ajuste en el episodio ocurrido en Hungría. Además, los resultados para β se muestran en la Fig. 2. Los valores de β están repartidos alrededor del promedio ponderado $0,86 \pm 0.07$, cuyo promedio también se muestra en la Fig. 2. Dado que los resultados para β están cerca o son consistentes con la unidad, examinamos $\beta = 1$, lo que lleva a una singularidad logarítmica para $p(t)$. Así, los datos se ajustaron a las Eqs. (13) and

(17). Los parámetros obtenidos también se incluyen en la Tabla I. El χ de estos ajustes adicionales es bastante razonable. Además, hay una buena concordancia entre ambas predicciones para t_c correspondiente a cada episodio.

Para testear mas precisamente la divergencia logarítmica, Eq. (17) tomamos la forma

$$\begin{aligned}
 p(\tau) &= p_0 + r_0 \left(\frac{t_c - t_0}{\Delta t} \right) \ln \tau_0 - r_0 \left(\frac{t_c - t_0}{\Delta t} \right) \ln \tau \\
 &= A + B \ln \tau,
 \end{aligned} \tag{18}$$

donde $\tau_0 = (t_c - t_0)/t_c$ y $\tau = (t_c - t)/t_c$. Los coeficientes A y B fueron evaluados con los parámetros listados en la Tabla I y estn incluidos en ella. En los paneles(a) y (b) de la Fig. 3 graficamos $p(\tau)$ vs. τ , donde $p(\tau)$ está en una escala lineal mientras que τ está en escala log, y las líneas rectas están dadas por la Eq. (18).

Se puede comparar el comportamiento de $p(\tau)$ con el de una bien conocida variable física. El superfluido ${}^4\text{He}$

exhibe la remarcable transición λ a temperatura crítica $T_c = 2.1768$ K, en la cual el calor específico en presión de vapor saturado, C_{svp} , deviene logarítmicamente infinito, e.g., ver Eq. (7.37) in Ref. [22]. Los datos de $C_{svp}(T)$ tomados de Refs. [23] y [24] son mostrados en la Fig. 3(a) como una función de la temperatura reducida definida como $\tau = (T_c - T)/T_c$. Actualmente este fenómeno es descrito también en términos de la teoría de la renormalización [24].

La cifra para $p(\tau)$ mostrada en los paneles (a) y (b) de Fig. 3 exhibe para todos los regímenes investigados una tendencia lineal similar a $C_{svp}(\tau)$ sobre varias décadas. Estos resultados considerados como un todo dan soporte a la divergencia logarítmica de $p(t)$ en t_c generado por $\beta = 1$. Es de recordar que episodios de muy alta inflación son descritos con $\beta \lesssim 1$. Para valores $\beta > 1$ hay una fase de transición donde el CPI converge a un valor finito $p(t \rightarrow \infty)$ [9]. El caso de Italia analizado en la Fig. 3 de MTT [6] ilustra este tipo de evolución. Por lo tanto, $\beta_c = 1$ es un valor crítico del formalismo.

Es de notar que hay oscilaciones alrededor de las líneas rectas de la Fig. 3. Desafortunadamente, debido a la naturaleza de este tipo de análisis, no se puede efectuar la repetición del experimento para mejorar la precisión. En 1996 dos grupos, en forma independiente, propusieron que leyes de potencia con exponentes complejos son elementos relevantes para modelar la descripción del incremento del precio $p(t)$ antes de crisis sistémicas [25–28]. Estos exponentes complejos llevan a oscilaciones log-

periódicas. Debido a ello sería interesante chequear si las oscilaciones observadas en regímenes hiperinflacionarios pueden ser explicadas con las herramientas de las Refs. [25–28].

IV. CONCLUSIONES

En conclusión, encontramos que cerca a t_c los regímenes severos de hiperinflación evolucionan con valores de β muy cercanos a β_c y en algunos casos son consistentes con éste. En base a estos resultados, se puede afirmar que los observables de una hiperinflación desarrollada se pueden expresar con una buena aproximación en término de dos parámetros. Entonces, asumiendo un exponente crítico común $\beta = \beta_c$ y fijando p_0 , las cantidades $r(t)$ y $p(t)$ se puede escribir como función del factor de escala r_0 y del tiempo crítico t_c , ambos dependiendo del país considerado. Esta característica podría ser útil para los economistas para estimar un t_c en el caso de un desarrollo de la espiral de inflación muy alta.

En un futuro trabajo introduciremos en el modelo descrito en Sec. II oscilaciones debidas a exponentes complejos propuestos en Refs. [25–28].

Este trabajo fue apoyado en parte por Organismos Oficiales de Investigación de la República Argentina a través de los subsidios CONICET PIP No. 0546/10, ANPCyT PICT No. 2011-01217, y UBACYT No. 01/K156.

-
- [1] R. N. Mantegna and H. E. Stanley, *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1999).
- [2] S. Moss de Oliveira, P. M. C. de Oliveira, and D. Stauffer, *Evolution, Money, War and Computers* (Teubner, Stuttgart-Leipzig, 1999).
- [3] D. Sornette, *Why Stock Markets Crash (Critical Events in Complex Financial Systems)* (Princeton University Press, Princeton, 2003).
- [4] P. Cagan, *The Monetary Dynamics of Hyperinflation* in: M. Friedman (Ed.), *Studies in the Quantity Theory of Money*, (University of Chicago Press, Chicago, 1956).
- [5] T. J. Sargent, *The Ends of Four Big Inflation*, in R.E. Hall (Ed.): *Inflation: Causes and Effects* (University of Chicago Press, Chicago, 1982); see also: <http://www.nber.org/chapters/c11452>.
- [6] T. Mizuno, M. Takayasu, and H. Takayasu, *Physica A* **308**, 411 (2002).
- [7] D. Sornette, H. Takayasu, and W.-X. Zhou, *Physica A* **325**, 492 (2003).
- [8] M. A. Szybisz and L. Szybisz, <http://arxiv.org/abs/0802.3553>.
- [9] M. A. Szybisz and L. Szybisz, *Phys. Rev. E* **80**, 026116 (2009).
- [10] L. Szybisz and M. A. Szybisz, *Adv. Applic. Stat. Sciences* **2**, 315 (2010).
- [11] <http://news.bbc.co.uk/2/hi/7859033.stm>
- [12] <http://www.dallasfed.org/assets/documents/institute/annual/2011/annual11b.pdf>
- [13] Computer Notes, *Am. J. Phys.* **39**, 1409 (1971); A. W. Luehrmann, *Am. J. Phys.* **42**, 361 (1974).
- [14] P. R. Bevington, *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences* (McGraw Hill, New York, 1969).
- [15] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran 77* (Cambridge University Press, Cambridge, 1996).
- [16] B. Paal, *Measuring the Inflation of Parallel Currencies: An Empirical Reevaluation of the Second Hungarian Hyperinflation*, Stanford Institute for Economic Policy Research, Discussion Paper No. 00-01, June 2000.
- [17] Table of the International Monetary Fund, <http://www.imf.org/external/pubs/ft/weo/2002/01/data/index.htm>.
- [18] P. Petrović and Z. Mladenović, *Journal of Money, Credit, and Banking* **32**, 785 (2000).
- [19] B. Nielsen, *Money demand in the Yugoslavian hyperinflation 1991-1994*, working paper as e-print at the web site: <http://www.nuffield.ox.ac.uk/economics/papers/2004/w31/NielsenYugo.pdf>.
- [20] Central Statistical Office and Reserve Bank of Zimbabwe, <http://www.rbz.co.zw/about/inflation.asp>.
- [21] S. H. Hanke and A. K. F. Kwok, *Cato Journal* **29**, 353 (2009).
- [22] W. E. Keller, *Helium-3 and Helium-4* (Plenum, New York, 1969) Chapter 7.3.1.

- [23] W. H. Keesom and A. P. Keesom, *Physica* **2**, 557 (1935).
- [24] J. A. Lipa, D. R. Swanson, J. A. Nissen, T. C. P. Chui, and U. E. Israelsson, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 944 (1996).
- [25] D. Sornette, A. Johansen, and J. P. Bouchaud, *J. Phys. I (France)* **6**, 167 (1996).
- [26] D. Sornette and A. Johansen, *Physica A* **245**, 411 (1997).
- [27] J. A. Feigenbaum and P. G. O. Freund, *Int. J. Mod. Phys. B* **10**, 3737 (1996).
- [28] J. A. Feigenbaum and P. G. O. Freund, *Mod. Phys. Lett. B* **12**, 57 (1998).