

# Mejora del sistema de medición de la balanza gravitatoria (Cavendish)

## Improved measurement system for gravitational balance (Cavendish)

E. Farías de la Torre<sup>1</sup>, M. Tempo<sup>2</sup>, D. González Dondo<sup>2,\*</sup>

<sup>1</sup>Facultad Regional Córdoba (UTN)- Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales(UNC).

<sup>2</sup>Facultad Regional Córdoba (UTN).  
Ciudad Universitaria-Córdoba-Argentina.

Recibido: 19/03/2013; aceptado: 05/04/2016

Se propone una mejora del método utilizado en la medición de la constante de gravitación por medio de la balanza gravitatoria (Cavendish). Se incorpora, a tal fin, un sistema opto-digital aplicado, previamente, a experiencias de dinámica en 2D. Con esta modificación se logra una mas exacta medición del periodo de oscilación de la balanza.

*Palabras claves:* Cavendish, balanza gravitatoria, constante gravitatoria.

We proposes an improved method for measuring the gravitational constant through gravitational balance (Cavendish). It is incorporated for this purpose, an opto-digital system applied previously to 2D dynamic experience. This modification achieves a more accurate measurement of the oscillation period balance.

*Keywords:* Cavendish, gravitational balance, gravitational constant.

### I. INTRODUCCIÓN

Como es ampliamente conocido, la experiencia de la balanza gravitatoria tiene por objeto la medición de la constante de gravitación universal,  $G$ , que interviene en la expresión para la interacción entre masas:

$$f = G \frac{mM}{d^2} \quad (1)$$

donde,  $f$  es la fuerza de atracción entre  $m$  y  $M$ ;  $d$  es la distancia entre sus centros y  $G$  es la constante que vincula la primera con las restantes variables físicas.

En la actualidad se dispone de varios tipos de equipos comerciales <sup>(1,2)</sup> destinados a este fin y todos ellos basan su principio de funcionamiento en la medición del efecto del torque gravitatorio sobre un péndulo de torsión, fundamento de la experiencia realizada por H. Cavendish hacia 1798 <sup>(3)</sup>.

Desde el punto de vista didáctico, la importancia de esta experiencia reside en que la misma pone al alumno en contacto con la medición de la fuerza de interacción gravitatoria entre masas relativamente pequeñas teniendo en cuenta que su familiarización con el tema se ha referido a la aplicación de la ley para el caso de la interacción entre masas de magnitud importante como planetas, estrellas etc.

Por otra parte y, en relación a los conceptos físicos utilizados, permite al alumno introducirse en la dinámica del péndulo de torsión; las oscilaciones amortiguadas y la medición del periodo y el coeficiente de amortiguamiento para estas últimas.

En el presente trabajo se propone la utilización del método de medición opto-digital aplicado, previamente, para experiencias de dinámica en 2D: choque elástico de discos <sup>(4)</sup> y tiro oblicuo <sup>(5)</sup> extendiendo el mismo, para el

caso en cuestión, a la dinámica unidimensional: oscilación del brazo de palanca del péndulo de torsión en la experiencia de Cavendish.

Finalmente, por las características de la experiencia, se exige, por parte del alumno, una importante dosis de paciencia y perseverancia para la obtención de los resultados, modelando con ello su carácter como futuro investigador.

### II. ECUACIONES BÁSICAS

Consideremos un péndulo de torsión constituido por un brazo de palanca con dos masas extremas  $m$  y suspendido en su punto medio por un hilo de torsión.

La ecuación diferencial que vincula el desplazamiento angular,  $\theta$ , y el torque aplicado,  $\tau_e$ , resulta <sup>(6)</sup>:

$$\ddot{\theta} + \frac{c}{I}\dot{\theta} + \frac{k_{\theta}}{I}\theta = \frac{\tau_e}{I} \quad (2)$$

donde  $\theta$  representa el desplazamiento angular;  $c$  el coeficiente de fricción viscosa;  $I$  el momento de inercia del sistema respecto del centro de la barra (masas y eje que las une);  $k_{\theta}$  la constante de torsión del alambre y, finalmente,  $\tau_e$  es el torque externo aplicado.

La solución de la ec.2 es la suma de una función transitoria,  $\theta_{tr}$ , y una estacionaria,  $\theta_{ss}$ :

$$\theta(t) = \theta_{tr}(t) + \theta_{ss} \quad (3)$$

siendo:

$$\theta_{tr} = Ae^{-\frac{c}{2I}t} \sin(\omega_d t + \varphi) \quad (4)$$

y,

\*fariasdelatorre@gmail.com

$$\theta_{ss} = \frac{\tau_e}{k_\theta} \quad (5)$$

con  $A$  y  $\varphi$  constantes determinadas a partir de las condiciones iniciales y  $\omega_a$  es la pulsación de la componente oscilatoria de la función amortiguada (ec. 4):

$$\omega_a = \omega_n \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_c^2}} \quad (6)$$

$\omega_n$ , por su parte, representa la pulsación de la oscilación libre ( $c = 0$ ):

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_\theta}{I}} \quad (7)$$

Finalmente,  $c_c$  es el coeficiente de amortiguamiento crítico el cual determina si el comportamiento de la solución es oscilante ( $c < c_c$ ) o monótona decreciente ( $c \geq c_c$ ), correspondiendo nuestro caso al primero.

$$c_c = 2\sqrt{k_\theta I} \quad (8)$$

La medición de la constante de gravitación,  $G$ , se realiza a partir de la utilización de la información que proporcionan las soluciones transitoria y estacionaria. De la ec. 5 y, teniendo en cuenta que:

$$\tau_e = G \frac{mM}{d^2} l \quad (9)$$

siendo  $l$  la longitud del brazo de palanca. Se obtiene para  $G$ :

$$G = \frac{y_{ss} d^2 k_\theta}{mML} \quad (10)$$

donde se reemplazó  $\theta_{ss}$  por su equivalente en función del desplazamiento,  $y_{ss}$ , sobre la escala (ver III):

$$\theta_{ss} = \frac{y_{ss}}{L} \quad (11)$$

representando con  $L$  a la distancia espejo – escala.

Los datos provenientes de la solución transitoria se utilizan para reemplazar la constante  $k_\theta$  en la ec. 10 como función del periodo de la componente oscilatoria de la amortiguada,  $T_a$ , y verificándose que este último es aproximadamente igual al intervalo de tiempo entre dos máximos sucesivos. Finalmente, si designamos como  $T_n$  al periodo de la oscilación libre se tiene:

$$T_n = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k_\theta}} \quad (12)$$

Por otra parte, de la ec. 6:

$$T_a = \frac{T_n}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_c^2}}} \quad (13)$$

Consecuentemente, la ec. 10 resulta:

$$G = \frac{2\pi^2 d^2 y_{ss} l}{MLT_a^2 \left(1 - \frac{c^2}{c_c^2}\right)} \left(1 + \frac{m_b}{6m}\right) \quad (14)$$

En la cual se observan los siguientes factores: un primer factor debido al amortiguamiento:  $1 - c^2/c_c^2$

Un segundo factor se corresponde con el valor finito, no cero, de la masa  $m_b$  del eje del brazo de palanca:  $1 + m_b/6m$  determinando una contribución al momento de inercia del sistema.

Un tercer factor que es necesario incorporar y que no está presente en la ec. 14 proviene del efecto de la fuerza cruzada y producido por la otra masa,  $M$ , interviniente. Este factor afecta al torque gravitatorio, disminuyendo, así, su valor medido (figura 1):

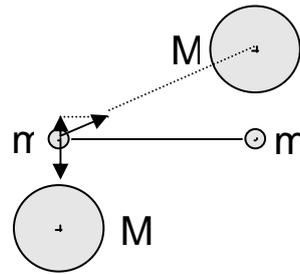


Figura 1: Corrección por fuerzas cruzadas.

La ecuación resultante para el torque gravitatorio es (ec. 15):

$$\tau_e = \frac{GMm}{d^2} \left[ 1 - \frac{\frac{d^3}{l^3}}{\left(1 + \frac{d^2}{l^2}\right)^{3/2}} \right] \quad (15)$$

Resultando, como expresión final para  $G$ :

$$G = \alpha y_{ss} d^2 \left[ 1 - \frac{\frac{d^3}{l^3}}{\left(1 + \frac{d^2}{l^2}\right)^{3/2}} \right] \quad (16)$$

donde,

$$\alpha = \frac{2\pi^2}{LM} l \frac{1}{T_a} \left[ 1 - \frac{c^2}{c_c^2} \right]^{-1} \left[ 1 + \frac{m_b}{6m} \right] \quad (17)$$

agrupa todos los factores que no se ven afectados al variar la distancia entre masas,  $d$ .

La ec. 16, por otra parte y como es evidente, incorpora todas los factores intervinientes.

La determinación del cociente  $c/c_c$  se realiza a partir del concepto de decremento logarítmico el cual relaciona, en una función amortiguada, dos amplitudes máximas sucesivas  $x_1$  y  $x_2$  distanciadas, temporalmente, en  $T_a^{(6)}$ :

$$\frac{c}{c_c} = \frac{\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)}{\sqrt{4\pi^2 + \left[\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)\right]^2}} \quad (18)$$

con un error relativo:

$$\frac{\Delta \frac{c}{c_c}}{\frac{c}{c_c}} = \frac{1}{y} \left[ 1 - \frac{y^2}{4\pi^2 + y^2} \right] \left( \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} \right) \quad (19)$$

donde,  $y = \ln(x_1/x_2)$ ;  $\Delta x_1/x_1$  y  $\Delta x_2/x_2$  son los errores relativos de los máximos  $x_1$  y  $x_2$ .

### III. DESCRIPCIÓN DEL EQUIPO

El equipo para la medición de  $G$  es el provisto por Griffin y George Ltd. Consta de un péndulo de torsión constituido por un brazo de palanca con dos masas,  $m$ , en sus extremos, suspendido desde su punto medio por un hilo de torsión (de bronce fosforoso). Además se sujeta en el centro del brazo una placa metálica con un espejo circular el cual permitirá medir, mediante la reflexión de un haz luminoso (láser), la oscilación del brazo como consecuencia de la aplicación del torque gravitatorio. Se coloca un recipiente parcialmente lleno de aceite liviano (grado 30) donde se sumerge parte de la placa metálica (figura 2). Dos masas,  $M$ , determinan la aplicación de sendas fuerzas gravitatorias a las masas del brazo y con ello la oscilación del péndulo. Finalmente, en el equipo original se incorpora un receptáculo o caja metálica que encierra al péndulo y evita el efecto de las corrientes de aire.

Se introdujeron algunas modificaciones respecto al equipo original: a) Se reemplazó una placa lateral del receptáculo contra corriente por otra de acrílico, a fin de poder visualizar si las masas hacen contacto con las paredes; b) Se agregó un cilindro metálico el cual protege de corrientes de aire al hilo del péndulo de torsión y, c) Se incorporó una superficie con escala graduada (en mm) donde se ubican las masas  $M$  a fin de medir la distancia entre  $m$  y  $M$ .

El sistema de detección de las oscilaciones del péndulo se materializó mediante el uso de una fuente láser cuyo rayo incide sobre el espejo y se refleja, luego, en una escala ubicada a una distancia suficientemente alejada para obtener la mayor separación posible entre los puntos de equilibrio y con ello disminuir su error relativo (ver figura 3).

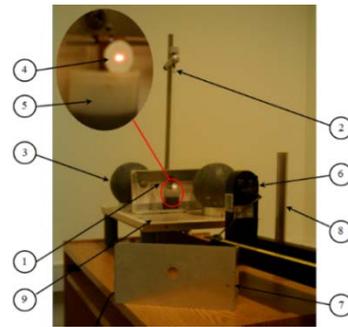


Figura 2: Péndulo de torsión y accesorios: 1.- brazo de palanca con masas  $m$ ; 2.- hilo de torsión con tornillo regulador; 3.- masas  $M$ ; 4.- espejo con placa amortiguadora; 5.- recipiente con aceite amortiguador; 6.- láser; 7.- placa metálica contra corrientes; 8.- cilindro metálico contra corrientes (para hilo de torsión); 9.- base graduada en coordenadas  $(x,y)$  en mm.

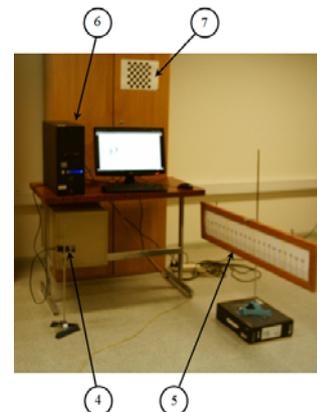
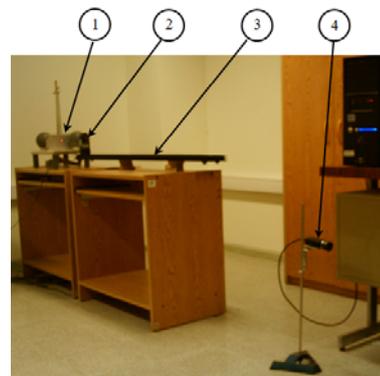


Figura 3: Vista general del equipo: 1.- balanza gravitatoria; 2.- fuente emisora de láser; 3.- riel; 4.- cámara Baslerca 640; 5.- escala graduada; 6.- PC; 7.- figura tipo tablero de ajedrez para calibración de la cámara.

La dependencia temporal de las coordenadas del centro del círculo luminoso en la escala es medida a partir de la captura de las sucesivas imágenes y su posterior procesamiento por el método opto - digital<sup>(4)</sup>

### IV. REALIZACIÓN DE LA EXPERIENCIA

La experiencia se realizó para distintas distancias entre  $m$  y  $M$ : 8 cm; 8,5 cm; 9 cm; 9,5 cm; 10 cm; 11 cm; 11,5cm y 12 cm. Las magnitudes físicas involucradas

\*fariadelatorre@gmail.com

fueron:  $M = 7,5 \text{ kg}$ ;  $m = 32 \text{ g}$ ;  $m_b = 12 \text{ g}$ ;  $l = 14,5 \text{ cm}$  y,  $L = 586 \text{ cm}$ .

Las etapas en la realización de la misma fueron las siguientes:

- a) Fijación del alambre de torsión.
- b) Estabilización del péndulo.
- c) Realización de la experiencia.
  - c.1) Montaje de la cámara, fijación del foco.
  - c.2) Calibración de la cámara.
  - c.3) Captura de imágenes.

a) El alambre de torsión se fija por sus extremos a sendos tornillos de bronce a los cuales se suelda. Para un mejor posicionamiento del eje del alambre en relación al eje del tornillo (que fija el brazo de palanca) se procede a efectuar un orificio de 1mm de diámetro en la cabeza de este último, el cual sirve como guía para efectuar la soldadura.

b) Una vez montado el péndulo se debe dejar estabilizar entre 12 y 24 horas ajustando, con pequeños giros del tornillo soporte, a fin de separar las masas  $m$  de las paredes del receptáculo contra corrientes de aire.

c) Realización de la experiencia:

c.1) Se monta la cámara en un trípode y se enfoca la escala donde se desplazará el punto luminoso.

c.2) Con el foco determinado en c.1 se realiza la calibración de la cámara, proceso que tiene por objeto valorar las distorsiones por paralaje y aberraciones. Esto se hace utilizando una figura en forma de tablero de ajedrez (figura 3) con dimensiones conocidas.

c.3) Para una separación entre masas,  $d$ , se captan las imágenes del spot luminoso proyectado, por la fuente láser, sobre la escala y para una dada posición de las masas  $M$  (figura 4).

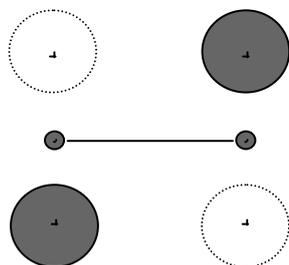


Figura 4: Dos posiciones de las masas  $M$ .

Una nueva captura de imágenes se realiza cuando se procede a cambiar la posición de las masas  $M$  (líneas punteadas) lo cual se hace durante un tiempo suficientemente largo respecto al periodo de las oscilaciones correspondientes a la solución transitoria

como así también las pequeñas amplitudes entorno al punto de equilibrio. El tiempo promedio de captura para cada posición de las masas  $M$  es de, aproximadamente, 50 minutos. La captura se realizó a razón de 1,875 cuadros/s.

## V. PROCESAMIENTO DE IMÁGENES

A partir de la captura de las imágenes realizadas para las dos posiciones de las masas  $M$ , se procede a determinar mediante las librerías disponibles de Open CV <sup>(7,8,9)</sup> la posición, como función del tiempo, del centro del disco luminoso.

La utilización del sistema opto-digital permite realizar la medición de las posiciones de equilibrio con gran exactitud debido a que se obtienen varias capturas por segundo superando ampliamente el sistema de medición tradicional para el cual y, mediante dos operadores no se podían realizar mediciones a intervalos menores de 15 o 20 segundos. Como consecuencia de esta mejora es posible obtener una mayor definición de los máximos y mínimos de la solución transitoria y con ello la determinación más precisa del periodo  $T_a$ .

## VI. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

En la figura 5 se presenta la gráfica obtenida para  $y(t)$  con su solución transitoria y estacionaria cuando se efectúa el cambio en la posición de las masas  $M$ . En ordenadas se representa el desplazamiento en centímetros ( $6.22 \text{ píxeles/cm}$ ) mientras que en abscisa, el tiempo en segundos (a razón de 1,875 cuadros/s). Es de observar en este gráfico los mayores desplazamientos que se obtienen en relación a los logrados con el equipo original. En efecto, en este último la distancia espejo-escala es del orden de 1m mientras que, nosotros al usar laser hemos podido extender la misma a 5.86m con las consiguiente mayores amplitudes de  $y_{ss}$ . De no haberse introducido esta modificación las mediciones, variando la distancia entre masas, no hubieran sido posibles.

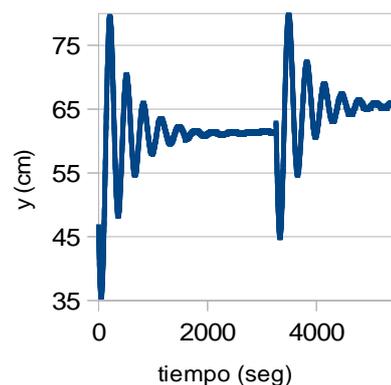


Figura 5: Gráfica obtenida para  $d = 9 \text{ cm}$  y para las dos posiciones de las masas  $M$ .

Como consecuencia de los resultados obtenidos del procesamiento de las imágenes:

- 1) Se determinaron las posiciones de equilibrio para cada distancia entre  $m$  y  $M$  y para cada posición de  $M$  (figura 5). A partir de ello se determinó la distancia  $y_{ss}$ .

\*fariasdelatorre@gmail.com

2) Se mide el periodo de la componente oscilatoria de la amortiguada y, con (1) el cociente de amortiguamiento  $c/c_c$  (ec. 16).

3) Se mide  $G$  aplicando las correcciones detalladas precedentemente (ec. 16). Se realiza para cada distancia  $d$  entre masas. Finalmente se obtiene el promedio.

La Tabla I resume los resultados obtenidos:

Tabla 1: *Determinación de la constante de gravitación para distintas distancias entre masas, discriminando la corrección por fuerzas cruzadas*

$d$ [cm]	$\alpha \cdot 10^{10}$	$y_{ss}$ [cm]	$d^2$	$\left[1 - \frac{\frac{d^3}{l^3}}{(1 + \frac{d^2}{l^2})^{3/2}}\right]$	$G \cdot 10^8 \left[\frac{cm^3}{gs^2}\right]$
8,0	1,6215	5,73±0,53	64,00	1,13	6,70
8,5	1,6215	5,19±0,49	72,25	1,15	6,98
9	1,6215	4,43±0,40	81,00	1,17	6,82
9,5	1,6215	3,43±0,56	90,25	1,20	6,00
10,0	1,6215	3,04±0,47	100,00	1,22	6,03
11,0	1,6215	2,65±0,26	121,00	1,28	6,67
11,5	1,6215	2,22±0,63	132,25	1,32	6,26
12,0	1,6215	2,31±0,29	144,00	1,35	7,28

Los valores de  $T_a$  y  $c/c_c$  fueron determinados a partir de la solución transitoria, resultando:  $T_a = (658 \pm 13)$  s y,  $c/c_c = 0,12$ .

Promediando los valores se obtiene para  $G = 6,59 \cdot 10^{-8} cm^3/g \cdot s^2$  y una desviación estándar de  $0,48 \cdot 10^{-8} cm^3/g \cdot s^2$ , razonablemente próximo al valor aceptado actualmente de  $6,67 \cdot 10^{-8} cm^3/g \cdot s^2$ .

Por otra parte y asumiendo un error en la determinación de los máximos de  $3mm$  el error relativo para la relación  $c/c_c$  resulta, aplicando la ec. 19, 0.06.

## VII. EXPONENTE GRAVITATORIO

Para una experiencia ideal en la cual la separación entre las masas,  $l$ , sea lo suficientemente grande de manera tal que la relación  $d/l$  pueda despreciarse, el factor debido a las fuerzas cruzadas se reduciría al valor unidad en la ec. 16. Sin embargo, el efecto de este factor es importante cuando se realiza la experiencia tradicional para medir el valor de  $G$ .

Nuestra intención, al efectuar la variación de la distancia fue no solo medir  $G$  como resultado del promedio de los valores obtenidos para distintas distancias sino de verificar, dentro de los límites, de una experiencia destinada a la enseñanza y, en forma semicuantitativa, el valor del exponente gravitatorio.

En la figura 6 se presentan, en un gráfico semilogarítmico, las respectivas curvas de  $y_{ss}$  como función de  $d$ . La curva superior (a trazos discontinuo) representa el caso en que se omite el efecto de fuerzas cruzadas ( $d/l \ll 1$ ) presentando una pendiente igual a (-2) como es de esperar. Por otra parte, la inferior se refiere al caso de nuestro experimento donde es necesario incluir el factor debido a las fuerzas cruzadas

observándose que la misma ya no es una recta y los valores experimentales se ubican razonablemente sobre ella. Para ambos casos se utilizó como valor de  $G$  el obtenido como resultado de promediar los valores hallados para cada distancia entre masas.

Finalmente cabe observar que, si se asume un comportamiento lineal para las mediciones efectuadas, conduciría a un valor, para el exponente, de 2,62 con más de un 30% de error lo cual sería erróneo por no haber tenido en cuenta el efecto de la fuerza cruzada.

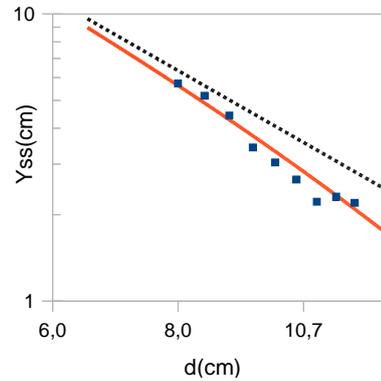


Figura 6: *Efecto de la fuerza cruzada sobre  $y_{ss}$  respecto del caso ideal (curva superior) para el cual  $d/l \ll 1$ . La curva inferior se obtuvo a partir de la ec. 16.*

## VIII. ANÁLISIS DE LOS ERRORES

De la expresión para  $G$  y, por propagación de errores, resulta:

$$\frac{\Delta G}{G} = \frac{\Delta \alpha}{\alpha} + \frac{\Delta y_{ss}}{y_{ss}} + 2 \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta F_{cr}}{F_{cr}} \quad (20)$$

$$\frac{\Delta \alpha}{\alpha} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta M}{M} + \frac{\Delta l}{l} + 2 \frac{\Delta T_a}{T_a} + \frac{\Delta C}{C} + \frac{\Delta I}{I} \quad (21)$$

donde:

$$F_{cr} = \left[ \frac{1 - x^3}{(1 + x^2)^{3/2}} \right]^{-1} \quad (22)$$

$$C = \left( 1 - \frac{c^2}{c_c^2} \right) \quad (23)$$

$$I = \left( 1 + \frac{m_b}{6m} \right) \quad (24)$$

con,  $x=d/l$

Y sus errores relativos:

$$\frac{\Delta F_{cr}}{F_{cr}} = p(x) \frac{\Delta x}{x} \quad (25)$$

donde,

$$p(x) = \left\{ 3x^2 \left[ \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \right] \left[ \frac{1 - x^3}{(1 + x^2)^{3/2}} \right] \right\} \quad (26)$$

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta l}{l} \quad (27)$$

\*fariasmelatorre@gmail.com

Siendo  $p(x)$  la función peso. Esta es una función creciente la cual asume valores desde 0,293 ( $d=8cm$ ) hasta 0,625 ( $d=12cm$ ). Adoptando este último como caso más desfavorable para el cálculo del error relativo correspondiente a la fuerza cruzada.

$$\frac{\Delta C}{C} = \left\{ 2 \left( \frac{c}{c_c} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{c}{c_c} \right)^2 \right]^{-1} \right\} \frac{\Delta \left( \frac{c}{c_c} \right)}{\left( \frac{c}{c_c} \right)} \quad (28)$$

y,  $\Delta(c/c_c)/(c/c_c)$  está determinada por la ec. 19. Finalmente,  $\Delta I/I$  resulta:

$$\frac{\Delta I}{I} = \left[ \left( \frac{m_b}{6m} \right) \left( 1 + \frac{m_b}{6m} \right)^{-1} \right] \left[ \frac{\Delta m_b}{m_b} + \frac{\Delta m}{m} \right] \quad (29)$$

Los errores relativos para las distintas magnitudes son:

$$\frac{\Delta L}{L} \cong \frac{2cm}{586cm}; \frac{\Delta L}{L} \cong 0,003$$

$$\frac{\Delta M}{M} \cong \frac{0,1kg}{7,5kg}; \frac{\Delta M}{M} \cong 0,013$$

$$\frac{\Delta d}{d} \cong \frac{1mm}{80mm}; 2 \frac{\Delta d}{d} \cong 0,025$$

$$\frac{\Delta l}{l} \cong \frac{1mm}{145mm}; \frac{\Delta l}{l} \cong 0,0069$$

$$\frac{\Delta F_{cr}}{F_{cr}} \cong 0,012$$

$$\frac{\Delta C}{C} \cong 0,0015$$

$$\frac{\Delta I}{I} \cong 0,000065$$

con todo esto  $\Delta \alpha / \alpha = 0,11$ .

Finalmente,  $\Delta y_{ss}/y_{ss}$  depende del tiempo de estabilización para cada posición de equilibrio, pudiendo obtenerse un valor próximo al 10% tal es el caso correspondiente a  $d=8, 8,5, 9$  y  $11 cm$  (tabla 1). En este punto es importante especificar la forma en que se determina el error porcentual en la medición del periodo. En efecto, el sistema oscilante, al alcanzar un punto de retorno se mantiene durante varios segundos en dicha posición hasta retomar su movimiento. Esta situación, debida posiblemente a la presencia del aceite de amortiguación permite definir un instante de ingreso,  $T_i$ , y de egreso,  $T_e$  de la posición y con ello el correspondiente instante del máximo se estima en:  $T_m = (T_i + T_e)/2$  y su incerteza,  $(T_e - T_i)/2$ . Con esto y suponiendo dos máximos sucesivos en los instantes  $T_{m1}$  y  $T_{m2}$  ( $T_{m2} > T_{m1}$ ), el periodo resulta:  $T_a = T_{m2} - T_{m1}$  con incerteza  $\Delta T_a = T_e - T_i$ . Finalmente, a partir de la ec. 20 podemos calcular el error relativo de  $G$  el cual resulta de 0,24.

\*fariasmelatorre@gmail.com

En definitiva se puede estimar el error porcentual en, aproximadamente un 24% y siendo crucial, para disminuirlo, la determinación de los puntos de equilibrio con una muy buena estadística. Esto es, por medio de la captura de las oscilaciones en torno de cada punto de equilibrio durante un tiempo suficientemente prolongado (estimativamente 1h o más) y esto, dependiendo de la separación entre masas (a mayor separación, mayor tiempo de captura).

## IX. CONCLUSIONES

La aplicación del método opto-digital permitió mejorar apreciablemente la determinación del periodo de la componente oscilatoria para la solución transitoria debido a una mejor definición de los máximos correspondientes a la misma. Su contribución, en este sentido, se aplica, también, a la determinación mas precisa de la distancia entre los puntos de equilibrio,  $y_{ss}$ , logrando un error relativo porcentual promedio del orden de 10%.

Como consecuencia de la utilización de un láser como fuente de luz fue posible aumentar la distancia espejo-escala (5.86m) en relación a la utilizada en el experimento tradicional (aprox. 1m). De esta manera y con esta modificación ha sido posible realizar la experiencia para distintas separaciones entre las masas. Se pudo medir con una estadística sobre  $G$  lo cual nos aportó una desviación,  $\sigma = 0,48 \times 10^{-8} cm^3/g.s^2$  disminuyendo, con ello, el error debido a la propagación de errores (ver VIII).

Finalmente y, aprovechando las mediciones de  $y_{ss}$  como función de la distancia entre masas es posible observar el efecto del factor debido a la fuerza cruzada y comparar con un experimento ideal para el cual  $d/l \ll 1$  y el exponente gravitatorio es  $n=2$ .

## X. REFERENCIAS

- 1 - Leybold, *Leybold Didactic* GMBH (2007).
- 2 - Pasco, *Physics & Engineering Education* (2010)
- 3 - H. Cavendish, Phil. Trans. Roy. Soc. 88, 469 (1798).
- 4 - Farías de la Torre, E. M., Tempo, M. E., González Dondo, D., Bergués, G. J., Mansilla, J.C. and Novillo, D. *Anales AFA*, 22, 23-29 (2010).
- 5 - Farías de la Torre, E. M. Tempo, M. E. y González Dondo, D. *Memorias de la 17 REF* (2011).
- 6 - Beer, F. P. Johnston, E. R. *Mecánica Vectorial para ingenieros (Dinámica)* VI Ed. Ed. Mc. Graw Hill, México.
- 7 - Bradsky, G. Kaehler, *Learning Open CV*. 2 Ed. O'Really Media (2005).
- 8 - Martín Sanz, G. P.; García J. *Visión por computador, imágenes digitales y aplicaciones*. 1 Ed. Alfaomega Rama, México (2002).
- 9 - Forsyth, D. Ponce, J. *Computer vision: A modern approach*. Prentice Hall, New Jersey (2003).