

# Estudio de un vórtice de Rankine con velocidad axial discontinua en un tubo infinito

## Study of a Rankine vortex with axial velocity discontinuity in an infinite tube

R. Gonzalez <sup>a,\*</sup>, C.D. Vigh <sup>b</sup>

a Instituto de Desarrollo Humano (IDH) – Universidad Nacional De General Sarmiento – CONICET

Juan M Gutierrez 1150 – (1613) Los Polvorines, Buenos Aires – Argentina

b Departamento de Física-Instituto de Física del Plasma (UBA-CONICET)

Ciudad Universitaria, Pabellon 1, (1428) Buenos Aires– Argentina

Recibido: 20/09/16; aceptado: 16/12/16

En este trabajo se muestra que un vórtice de Rankine confinado con flujo axial uniforme, posee sólo modos neutros aun cuando la velocidad axial sea discontinua en la interfase rotacional-irrotacional. Esta discontinuidad produce un curvamiento de las ramas inferiores de la relación de dispersión de tal forma que cortan al eje del número de onda con pendiente negativa, es decir velocidad de grupo negativa. Este resultado apoya la idea original de que el fenómeno de Vortex Breakdown se podría explicar como resultado de la formación de ondas estacionarias de longitud finita viajando aguas arriba en un flujo estable. Las dimensiones de la burbuja, mucho mayores que el radio del núcleo vorticoso, podrían explicarse por la condición de flujo de Beltrami de las perturbaciones que permite la formación de ondas de amplitud finita.

*Palabras clave:* vórtice de Rankine confinado con flujo axial uniforme, ondas de Kelvin, Vortex Breakdown.

In this work it is shown that a Rankine vortex with uniform axial flow, has only neutral modes even though the axial velocity be discontinuous at the rotational-irrotational interface. This discontinuity produces a bending of the dispersion curve branches in such a way of crossing the wave number axes with negative slope that is to say with negative group velocity. This result supports the initial idea about that the vortex breakdown phenomenon would be explained as a result of stationary waves of finite length by transporting the perturbation upstream in the frame of a stable flow. The dimensions of the bubble, considerably greater than the vortex core radius, could be explained by the condition of Beltrami perturbations that lets the formation of finite amplitude waves.

*Keywords:* Confined Rankine vortex with uniform axial flow, Kelvin Waves, Vortex Breakdown .

## I. INTRODUCCIÓN

Desde el análisis liminar de Kelvin<sup>1</sup> de las ondas en un vórtice de Rankine sin flujo axial, se sabe que los modos de oscilación son neutros. La mayor parte de los estudios relativos a la estabilidad, trata con flujos de Rankine con velocidad axial, no confinados (Lessen<sup>2</sup>, Gallaire<sup>3</sup>) o confinados pero mediante principios variacionales y en relación con el fenómeno de Vortex Breakdown (Benjamin<sup>4</sup>, Keller<sup>5</sup>), sin mostrar un detallado análisis modal que a su vez se conecte con estos fenómenos, como sí en cambio hace Gallaire<sup>6</sup>. En el caso no confinado el análisis modal muestra inestabilidades de Kelvin–Helmholtz asociadas a saltos en la velocidad axial o azimutal<sup>3</sup>. No hay estudios modales de flujos de Rankine con flujo axial confinados que demuestren que los modos son neutros y a su vez permita variaciones relacionadas con cambios en la velocidad axial, cambios en el radio del núcleo y a su vez su incidencia en algunos aspectos considerados en el

vortex breakdown. Asimismo el descubrimiento de que la perturbación de este flujo base da lugar a un flujo de Beltrami (González<sup>7</sup>) requiere para su análisis, la estructura modal de estas perturbaciones.

En este trabajo analizaremos la estabilidad de un vórtice de Rankine con flujo axial de radio  $r_0$  dentro de un tubo de longitud infinita y radio unidad así como la estructura modal resultante. En base a estos resultados analizaremos su conexión con el fenómeno de Vortex Breakdown. En la sección II presentamos la relación de dispersión del sistema. En la sección III estudiamos la estabilidad tanto para el caso continuo como discontinuo de la velocidad axial en la interfase rotacional-irrotacional. En la sección IV analizamos la estructura de modos y su conexión con el fenómeno de Vortex Breakdown. En la sección V presentamos las conclusiones.

## II. FLUJO BASE, PERTURBACIÓN Y RELACIÓN DE DISPERSIÓN

---

\*rgonzale@ungs.edu.ar

El sistema de la Fig.1 muestra el esquema de un tubo de longitud infinita y radio  $R$ , que contiene un vórtice de Rankine con radio de núcleo  $r_c$ , velocidad de rotación rígida  $\Omega_c$ , velocidad axial  $U_1$  y vórtice potencial externo de circulación  $\Sigma = r_c^2 \Omega_c$  y velocidad axial  $U_2$ . Adimensionalizando con el radio del tubo  $R$  y con la velocidad axial del núcleo vorticoso  $U_1$ , el campo de velocidades adimensionalizado es

$$\begin{aligned} V_r &= 0, \\ V_\theta &= \frac{1}{R_o} r \quad r \leq r_0, \quad V_\theta = \frac{\Gamma}{r} \quad r_0 \leq r \leq 1. \\ V_z &= 1 \quad r \leq r_0, \quad V_z = U \quad r_0 \leq r \leq 1. \end{aligned} \quad (1)$$

Con  $r_0 = \frac{r_c}{R}$ ,  $U = \frac{U_2}{U_1}$ ,  $R_o = \frac{U_1}{\Omega_c R}$  es el número de

Rossby y  $\Gamma = \frac{\Sigma}{U_1 R}$  la circulación adimensionalizada.

Se perturba este flujo base mediante un desarrollo modal de Fourier

$$\begin{aligned} \{u_r(r), u_\theta(r), u_z(r), p/\rho\} = \\ \{f(r), g(r), h(r), \pi(r)\} e^{i(m\theta + \alpha(z-ct))} \end{aligned} \quad (2)$$

Y se reemplaza en la ecuación de Euler

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (3)$$

De aquí, siguiendo el procedimiento usual (Lessner<sup>2</sup>, Gallaire<sup>3</sup>) obtenemos las soluciones y planteamos las condiciones de contorno (continuidad de la presión y la velocidad radial en la interfase rotacional-irrotacional y anulación de la velocidad radial en la pared del tubo) lo que nos conduce a la relación de dispersión dependiente de funciones de Bessel.

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\mu} \left( \frac{2m}{R_o r_0 \Omega_1} + \mu \frac{\Lambda'_m(\mu r_0)}{\Lambda_m(\mu r_0)} \right) \left( \alpha^{-1} \Omega_2^2 \left[ -\frac{I_m(\alpha r_0)}{K_m(\alpha r_0)} + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{I'_m(\alpha) K'_m(\alpha r_0)}{K'_m(\alpha) K'_m(\alpha r_0)} \right] + \left[ \frac{r_0}{R_o^2} - \frac{\Gamma^2}{r_0^3} \right] \left( \frac{I'_m(\alpha r_0)}{K'_m(\alpha r_0)} - \frac{I'_m(\alpha)}{K'_m(\alpha)} \right) \right) \\ + \alpha^{-1} \Omega_1^2 \left( \frac{I_m(\alpha r_0)}{K'_m(\alpha r_0)} - \frac{I'_m(\alpha)}{K'_m(\alpha)} \right) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\Omega_1 = \left[ \frac{m}{R_o} + (1-c)\alpha \right], \quad \Omega_2 = \left[ \frac{m\Gamma}{r_0^2} + (U-c)\alpha \right],$$

$$\Lambda_m(\mu r_0) = I_m(\mu r_0), \quad \mu^2 = \alpha^2 \left[ 1 - \frac{4}{R_o^2 \Omega_1^2} \right] \geq 0,$$

$$\Lambda_m(\mu r_0) = J_m(\alpha r_0), \quad \mu^2 = \alpha^2 \left[ \frac{4}{R_o^2 \Omega_1^2} - 1 \right] \geq 0.$$

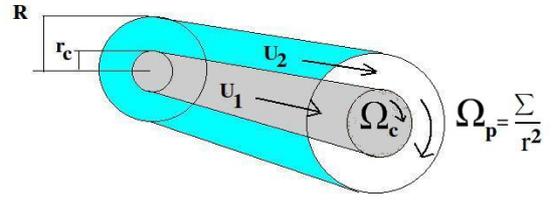


Figura 1: Flujo de Rankine con velocidad axial discontinua, confinado.

### III. Estabilidad

En primer lugar ensayamos un análisis asintótico preliminar. Cuando el flujo de Rankine no está confinado, es decir  $R \rightarrow \infty$ , se verifica la existencia de modos inestables correspondientes a la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz causada por discontinuidades en la velocidad<sup>2,6</sup>. En este trabajo mantenemos la continuidad de la velocidad azimutal en la interfase y permitimos en cambio un salto en la velocidad axial. Haciendo  $\alpha \gg 1$ ,  $\mu \gg 1$ ,  $\alpha c = \omega \gg 1$ , suponiendo  $U = 1$  y  $\Gamma = r_0^2 R_o$  (continuidades de  $v_z$  y  $v_\theta$  en la interfase y por lo tanto  $\Omega_1 = \Omega_2 = G$ ) la ec.4 nos conduce a  $G = 0$ , de donde

$$\omega = \frac{m}{R_o} + \alpha \quad (5)$$

Obtenemos como resultado un modo neutro.

Si en cambio permitimos que  $U \neq 1$ , la Ec. 4 se transforma asintóticamente en

$$\Omega_2^2 = \Omega_1^2 \frac{e^{2\alpha} - e^{2\alpha r_0}}{e^{2\alpha} + e^{2\alpha r_0}}, \quad (6)$$

lo que nos lleva a las soluciones

$$\begin{aligned} \omega_1 = \frac{m}{R_o} + \alpha \frac{U-a}{1-a}, \quad \omega_2 = \frac{m}{R_o} + \alpha \frac{U+a}{1+a} \\ a = \sqrt{\frac{e^{2\alpha} - e^{2\alpha r_0}}{e^{2\alpha} + e^{2\alpha r_0}}} < 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Estos modos también son neutros para cualquier valor de  $U$ , lo que anticipa el resultado general. En efecto, considerando en la relación de dispersión Ec. 4 a la velocidad de fase en forma compleja  $c = c_R + ic_I$ , realizamos un cálculo de las superficies de nivel que resultan de anular la parte real e imaginaria de la ec.4, cuya intersección nos permitieron encontrar la parte real e imaginaria de la velocidad de fase como función del número de onda axial y de los parámetros. Recorriendo valores de  $\alpha$  y  $U$  desde 0 a valores asintóticos

$\alpha \gg 1, U \gg 1$  y  $0.1 \leq R_o \leq 1, 0.1 \leq r_o \leq 0.9$ , el resultado fue obtener sólo soluciones con  $c_I = 0$ , dentro de los rangos señalados, lo que significa que todos los modos encontrados son neutros.

#### IV. ESTRUCTURA DE MODOS. CONEXIÓN CON EL FENÓMENO DE VORTEX BREAK DOWN

En las Figuras 2 y 3 vemos representados los modos de las ramas más externas, correspondientes a  $m=0$  y  $m=1$  para diferentes  $R_o$ , y  $r_o = 0.5, U = 1$ . En el primer caso todos los modos parten del origen de coordenadas. En el segundo, tenemos para cada  $R_o$  un modo que parte del origen y otros cuyas ordenadas al origen, están dadas por la expresión  $\omega_{\alpha=0} = \frac{1}{R_o}$  y tienen que ver con los

estados estacionarios en el sistema rotante que definen a la propiedad dinámica de los flujos de Beltrami (González<sup>7</sup>).

En relación con los modos axi-simétricos, en la Figura 2 se muestran curvas correspondientes a los parámetros  $r_o = 0.5, U = 1$  y  $R_o = 0.3, 0.5, 0.9$ . Se observa que las ramas más externas de cada modo, se abren a medida que  $R_o$  disminuye es decir cuando  $\Omega = \frac{1}{R_o}$ <sup>9</sup>, aumenta. Exactamente lo inverso ocurre en la

Figura 4 donde  $R_o = 0.5, U = 1, r_o = 0.3, 0.5, 0.9$ , cuando se mantiene fijo  $R_o$  y se varía  $r_o$ .

Si nos concentramos en la Figura 2, observamos que en todas las ramas correspondientes a  $R_o = 0.5, \Omega = 2$ , las velocidades de fase y de grupo ( $v_{ph} = \frac{\omega(\alpha)}{\alpha}, v_g = \frac{d\omega(\alpha)}{d\alpha}$ ) son positivas para  $\alpha > 0$  y en la rama inferior ambas son nulas cuando  $\alpha = 0$ . De acuerdo a la definición de Benjamin<sup>4</sup>, este flujo es crítico y a él le corresponde un valor de la velocidad angular (adimensionalizada)  $\Omega_B = 2$  (o  $R_{oB} = 0.5$ ). Si  $\Omega < \Omega_B$  ( $R_o > R_{oB}$ , en el gráfico 0.9) el flujo es super-crítico siendo la velocidad de fase positiva para todas las ramas cuando  $\alpha > 0$  y la de grupo positiva para todas las ramas cuando  $\alpha \geq 0$ , propagándose la perturbación sólo aguas abajo. Si  $\Omega > \Omega_B$  ( $R_o < R_{oB}$ , en el gráfico 0.3) el flujo es sub-crítico ya que hay  $\alpha > 0$  para los que las velocidades de fase y de grupo son negativas. Se observa en este caso un rango de  $\alpha \rightarrow 0$  para el que las velocidades de fase y grupo son negativas y la perturbación se propaga en la dirección aguas abajo-aguas arriba. Esta caracterización es importante en relación con la discusión del fenómeno de vortex breakdown (Benjamin<sup>4</sup>, Squire<sup>8</sup>), por lo que es importante ver cómo cambia en función de la variación de los parámetros introducidos. En nuestro caso el valor de  $\Omega_B$  depende de  $r_o$ . En la Figura 2 mostramos que para  $r_o = 0.5$ , el flujo es crítico si  $R_{oB} = 0.5$ , es super-crítico para  $R_o > 0.5$  y sub-crítico para  $R_o < 0.5$ .

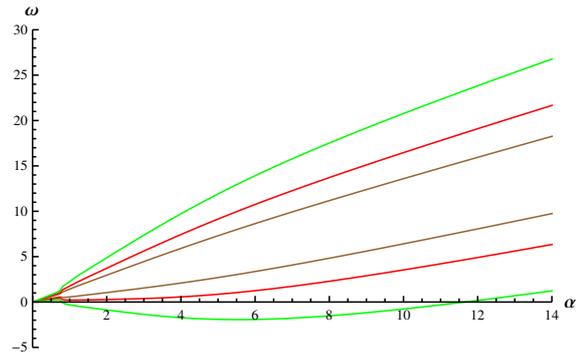


Figura 2. Relación de dispersión para  $m=0, r_o = 0.5, U=1$ . La línea marrón corresponde a  $R_o=0.9$ , la roja a  $R_o=0.5$  y la verde a  $R_o=0.3$ .

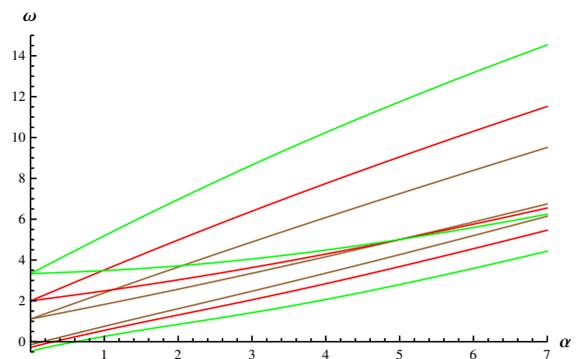


Figura 3. Relación de dispersión para  $m=1, r_o = 0.5, U=1$ . La línea marrón corresponde a  $R_o=0.9$ , la roja a  $R_o=0.5$  y la verde a  $R_o=0.3$ .

En cambio en la Figura 4 se observa que si  $R_o = 0.5$ , el flujo es super-crítico para  $r_o < 0.5$  y sub-crítico para  $r_o > 0.5$ , con lo cual se puede alcanzar este estado aumentando el radio del vórtice.

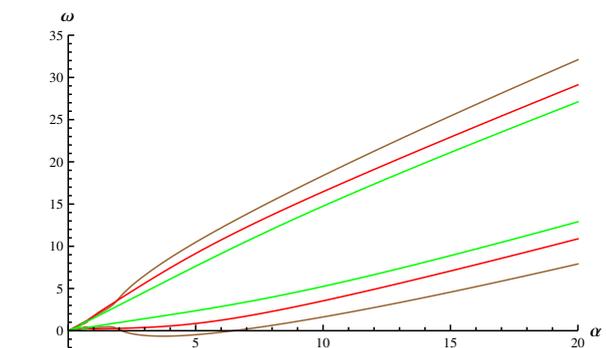


Figura 4. Relación de dispersión para  $m=0, R_o = 0.5, U=1$ . La línea marrón corresponde a  $r_o=0.9$ , la roja a  $r_o=0.5$  y la verde a  $r_o=0.3$ .

La relación entre  $\Omega_B$  y  $r_o$  para la cual se alcanza el estado crítico se muestra en la Figura 5

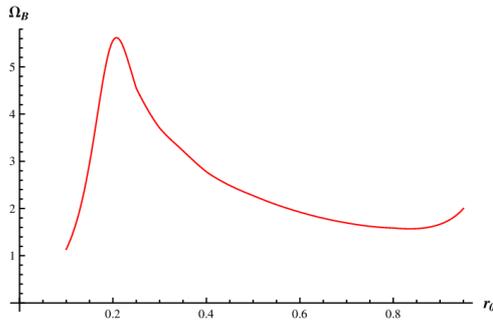


Figura 5. Velocidad angular crítica (adimensionalizada) en función del radio del vórtice, que separa al flujo super-crítico del sub-crítico.

Una relación inversa entre  $\Omega_B$  y  $r_0$  fue obtenida por Keller<sup>5</sup> para una aproximación de vórtices delgados. Aquí se da la relación para todo el rango de radios del vórtice, observándose el cambio de crecimiento de la función en  $r_0=0.2$  donde hay un máximo.

La relación de las frecuencias con  $U$ , se puede ver en las Figuras 6 y 7. Para  $U > 1$  se observa que todas las ramas inferiores, parametrizadas por diferentes  $R_o$ , cuando  $U = 1$  en la Figura 2, se curvan de manera que cortan al eje horizontal en un valor de  $\alpha$ , de forma que sólo hay flujo sub-crítico para todos los  $R_o$ . Este hecho, que ocurre con sólo una pequeña desviación de  $U$ , (en la Figura 6 de apenas  $\Delta U=0.02$ ) adquiere relevancia en relación con el fenómeno de Vortex Breakdown, cuando este consiste en la formación de una burbuja estacionaria axisimétrica. Squire<sup>3,8</sup> sostenía que la misma se formaba por el transporte de la perturbación aguas arriba, al formarse una onda estacionaria de longitud, primero de longitud infinita para  $\alpha=0$  cuando  $\Omega = \Omega_B$  y luego de longitud finita cuando  $\Omega > \Omega_B$ . Como se ve en la Figura 2, la formación de esta onda estacionaria, ocurre, por ejemplo, para la rama  $R_o=0.3$  cuando  $\alpha = 12$  y  $\omega=0$  y para la que  $\Omega > \Omega_B=2$ . Benjamin<sup>3,4</sup> sin embargo, objetaba que, en ese punto, la velocidad de grupo es positiva, como se observa en la Figura 2, y sólo puede transportar la perturbación aguas abajo. No hay, en las condiciones de la figura 2, ningún modo estacionario de longitud finita y con velocidad de grupo negativa. Sin embargo, como se observa en la Figura 6, al curvarse, la rama inferior correspondiente a  $R_o=0.3$ , corta al eje horizontal primero en  $\alpha=16$ , donde la velocidad de grupo es positiva, y luego lo hace en  $\alpha = 34$  donde la velocidad de grupo es negativa. Pero además aparecen nuevos estados estacionarios de longitud de onda finita, ya que las ramas inferiores correspondientes a los distintos valores de  $R_o$ , se curvan de manera tal que cortan al eje del número de onda y su pendiente allí es negativa, lo que significa tener una onda estacionaria ( $\omega=0$ ) con velocidad de grupo negativa. Es decir que la objeción de Benjamin a Squire queda superada bajo estas condiciones. Es importante señalar que estas explicaciones cobran sentido cuando tomamos un dominio infinito, como en este caso,

resultando el análisis de tipo local. Se han producido análisis de tipo global, que explican el fenómeno del Vortex Breakdown, en base a un dominio finito, mediante teoría de catástrofe (Wang y Rusak<sup>10</sup>) o la consideración de inestabilidades espaciales (Gallaire<sup>6</sup>) vinculadas a las perturbaciones que, al ser la longitud del tubo finita, toman en cuenta las condiciones de entrada/salida del tubo. Sin embargo, el resultado aquí obtenido, se da en el marco de la estabilidad del flujo básico, no de su desestabilización y a partir de las condiciones de contorno introducidas por el confinamiento. Este confinamiento, en primer lugar, neutraliza la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz que tendría lugar por la diferencia de velocidades axiales del flujo rotacional y el potencial, en un flujo no confinado. Y en segundo lugar, estas diferencias de velocidades son la causa de la aparición de flujos sub-críticos, que contienen estados estacionarios de longitud de onda finita con velocidad de grupo negativa, lo que hace plausible el transporte de la perturbación aguas arriba. Es importante recalcar que Benjamin, en su trabajo liminar, sostuvo que el fenómeno se produce también en flujos que son estables.

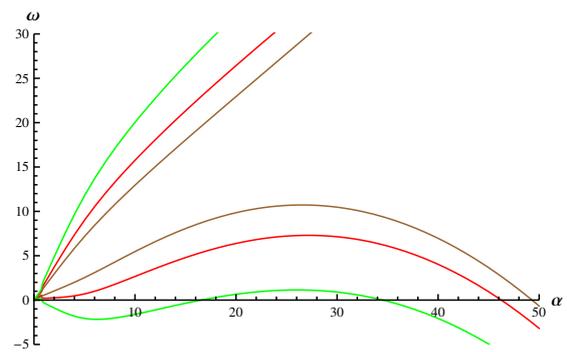


Figura 6. Relación de dispersión para  $m=0$ ,  $r_0 = 0.5$ ,  $U=1.02$ . La línea marrón corresponde a  $R_o=0.9$ , la roja a  $R_o=0.5$  y la verde a  $R_o=0.3$ .

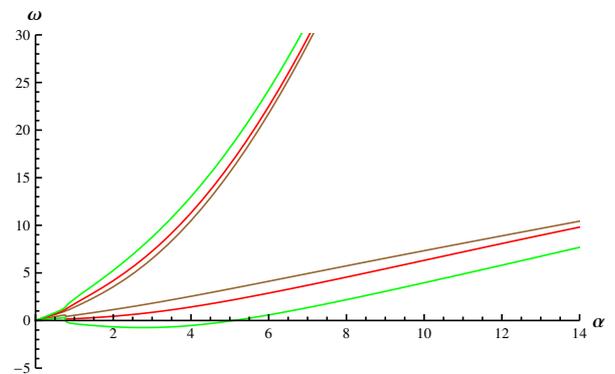


Figura 7. Relación de dispersión para  $m=0$ ,  $r_0 = 0.5$ ,  $U=0.05$ . La línea marrón corresponde a  $R_o=0.9$ , la roja a  $R_o=0.5$  y la verde a  $R_o=0.3$ .

Para el caso en que  $U < 1$  en cambio, también se curvan todas las ramas de la relación de dispersión, pero en el sentido de aumentar la pendiente, es decir hacia el eje vertical y el efecto final será aumentar el  $\Omega_B$ , ya que la rama tangente al eje horizontal en  $\alpha = 0$ , ahora tendrá pendiente positiva, lo que hará necesario aumentar la velocidad angular para disminuir la pendiente. De esta forma,  $\Omega_B$  depende no sólo de  $r_0$ , sino también de  $U$ .

## V. CONCLUSIONES

En este trabajo, como primera etapa de un estudio más profundo, estudiamos la estabilidad y la estructura de modos de un vórtice de Rankine confinado en un tubo infinito, con velocidades axial continua y discontinua y azimutal continua en la interfase rotacional-irrotacional. Se tomaron como parámetros fundamentales el número de Rossby  $R_o$  o el parámetro de giro  $\Omega$ , el radio del vórtice  $r_0$  adimensionalizado con el radio del tubo y la velocidad axial en la zona irrotacional  $U$  adimensionalizada con la velocidad axial del vórtice, ambas constantes. Para el caso de continuidad de la velocidad axial  $U=1$ , se encontraron modos neutros para el rango de parámetros  $0.1 \leq R_o \leq 1$ ,  $0.1 \leq r_0 \leq 0.9$  estudiado lo que constituye un resultado esperado<sup>1</sup>. Encontramos que también para el caso  $U \neq 1$ , el flujo es estable, lo que es un resultado inesperado en virtud de la discontinuidad de velocidades es la responsable de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz. Como esta inestabilidad ocurre para el vórtice de Rankine no confinado<sup>2,6</sup> y no se presenta para todo el rango de velocidades angulares estudiado, concluimos que la razón de la estabilización originada por esta discontinuidad es el confinamiento del vórtice. Sin embargo no puede dejar de señalarse que este resultado se da en el marco de un flujo ideal no viscoso que no toma en cuenta el efecto de la formación de una capa límite en la interfase que podría ser fuente de inestabilidad. Pero es razonable suponer que se mantendrá para valores de la discontinuidad dentro de orden de magnitud de la velocidad axial del vórtice.

En cuanto a la estructura de modos, se observa que para un  $r_0$  dado, las ramas más externas de la relación de dispersión tienden a aproximarse a medida que  $R_o$  aumenta ( $\Omega$  disminuye) o cuando  $r_0$  disminuye. Este comportamiento tiene incidencia en la definición del flujo como crítico (al que le corresponde  $\Omega = \Omega_B$ ), super-crítico ( $\Omega < \Omega_B$ ) o sub-crítico ( $\Omega > \Omega_B$ ) cuando  $m=0$ . Hemos obtenido la relación entre  $\Omega_B$  y  $r_0$  para el rango en estudio, observándose la relación inversa en la mayor parte de dicho rango. Cuando  $U \neq 1$ , el efecto de la discontinuidad es modificar las curvas de la relación de dispersión. Cuando  $U < 1$ , todas las ramas de la relación de dispersión aumentan sus pendientes de manera de volverse más verticales. Esto tiene el efecto de aumentar el  $\Omega_B$ , pero no modifica cualitativamente la clasificación de críticos, super-críticos o sub-críticos de los flujos correspondientes a dichas curvas. En cambio,

cuando  $U > 1$ , con sólo un pequeño apartamiento de la situación de continuidad como el señalado en la figura 6 con  $\Delta U = 0.02$ , transforma a los flujos que son super-críticos cuando  $U=1$  en sub-críticos. Esto tiene consecuencias en relación con el fenómeno de vortex breakdown, ya que se generan ondas estacionarias de longitud de onda finitas ( $\omega=0$  para  $\alpha \neq 0$ ) con velocidad de grupo negativa, lo que permite la propagación de la perturbación aguas arriba.

El otro hecho que contribuye a la posible formación del breakdown con este mecanismo, es que si bien bajo las condiciones analíticas aquí consideradas, la generación de estas ondas son infinitesimales, una vez generadas, las perturbaciones tienen una estructura de flujo de Beltrami y como fue demostrado en trabajos previos<sup>7</sup>, estas perturbaciones pueden alcanzar amplitud finita, lo que explicaría la formación de la burbuja de dimensiones mucho mayor que el radio del núcleo vorticoso. Esto abre la posibilidad de un nuevo enfoque para explicar este fenómeno, sobre bases físicas dentro de un contexto de estabilidad del flujo.

Por último, es importante destacar que primeramente, la discontinuidad de las velocidades axiales en la interfase del vórtice de Rankine es posible gracias a la estabilidad producida por el confinamiento. Y en segundo lugar, esta discontinuidad permite la aparición de flujos sub-críticos con ondas estacionarias de longitud finita. El trabajo que queda planteado es estudiar la estabilidad del flujo frente a discontinuidades de la velocidad azimutal en la interfase y continuar el análisis de la estructura de los flujos resultantes bajo las condiciones de discontinuidad del flujo axial aquí desarrollada.

## III. REFERENCIAS

- 1- Lord Kelvin, "Vibrations of a columnar vortex," Philos. Mag. **10**, 155 (1880).
- 2- M. Lessen, N. V. Deshpande and B. Hadji-Ohanes, J. Fluid Mech. **14**, 593 (1962), (<http://dx.doi.org/10.1017/S0022112073000297>).
- 3- F. Gallaire and J.-M. Chomaz, Phys. Fluids **15**, 2622, (2003), (<http://dx.doi.org/10.1063/1.1589011>).
- 4- B. Benjamin, J. Fluid Mech. **60**, 459 (1962), (<http://dx.doi.org/10.1017/S0022112062001482>).
- 5- J. J. Keller, W. Egli, Journal of Applied Mathematics and Physics (Z AMP), **36**, 854 (1985), (<http://link.springer.com/article/10.1007/BF00944899>).
- 6- F. Gallaire and J.-M. Chomaz, Phys. Fluids **16**, 274, (2004), (<http://dx.doi.org/10.1063/1.1630326>).
- 7- R. González, Phys. Fluids **26**, 114104 (2014), (<http://dx.doi.org/10.1063/1.4901971>).
- 8- H. B. Squire, *Miszallaneen der Angewandten Mechanik* (1960), 306.

9-  $\Omega = \frac{1}{R_0}$  es el parámetro de giro que es utilizado en forma usual y alternativa al número de Rossby en muchos trabajos, entre ellos algunos incluidos en la bibliografía de este artículo.

10- S. Wang, Z. Rusak, J. Fluid Mech. **340**, 177 (1997), <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112097005272>.