

# BOCADITOS ELECTROMAGNÉTICOS

## ELECTROMAGNETIC SNACKS

Juan G. Roederer\*  
Geophysical Institute, University of Alaska Fairbanks

Recibido: 23/11/16; aceptado: 26/12/16

### Resumen

Este artículo está basado en una charla que di en oportunidad de la presentación de mi libro *Electromagnetismo Elemental*<sup>1</sup> durante la 101<sup>a</sup> Reunión de la Asociación Física Argentina, en Tucumán (octubre de 2016). Presenta una serie de preguntas significativas hechas por estudiantes interesados en *el porqué* de las cosas en física, durante el curso de muchas décadas de instrucción y seminarios sobre esta materia, y cuenta mis reflexiones y las contestaciones que recuerdo haber dado. Se trata de cuestiones básicas del electromagnetismo clásico, pero que no suelen estar en los libros de texto —incluso los míos—.

*Palabras claves:* Electromagnetismo, campos electromagnéticos, potenciales, conservación de la carga eléctrica, ecuaciones de Maxwell, relación causa-y-efecto.

### Abstract

This article is based on a talk given on occasion of the presentation of my new textbook *Electromagnetismo Elemental* during the 101<sup>st</sup> Annual Meeting of the Argentine Physical Association in Tucumán (October 2016). It presents a series of poignant questions formulated by students interested in the why of things in physics, during my many decades of teaching and seminars on this subject, and it elaborates on the answers I remember having given to each. These questions deal with some very basic issues of classical electromagnetism which, however, are not usually discussed in textbooks—including my own.

*Keywords:* Electromagnetism, electromagnetic fields, potentials, conservation of electric charge, Maxwell's equations, cause-and-effect relationships.

## 1. Sandwich de campo eléctrico nulo

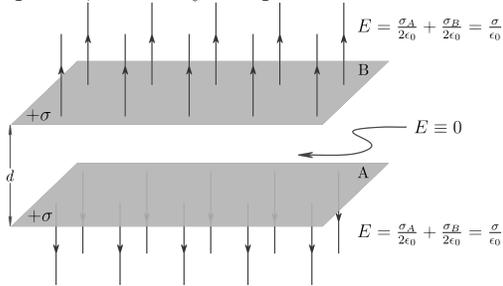
Érase una vez un estudiante que vino al pizarrón después de mi clase, y dibujó dos planos paralelos. Me comentó: “Tengo dos planos infinitos separados por una distancia  $d$ , mantenidos en equilibrio por fuerzas exteriores, cargados con densidad uniforme positiva  $+\sigma$  (ver Fig. 1). El campo eléctrico encima y debajo de

las placas es uniforme, suma lineal de los campos producidos por cada una, o sea, en módulo,  $|E|_{arriba} = |E|_{abajo} = \sigma/\epsilon_0$ . Entre las dos placas, las contribuciones de cada placa se cancelan, y el campo es *nulo*. Pero si recorto un pedacito circular de la placa de arriba, esta saldrá volando hacia arriba. ¿Cómo es posible, si el campo entre las dos tapas de este ‘sandwich’ es cero absoluto? En términos más infantiles, ¿cómo ‘sabe’ la placa cargada de arriba que hay una placa cargada

\*Dirección permanente: 4875 Sioux Drive, Apt 102, Boulder, Colorado 80303, USA. URL: [www2.gi.alaska.edu/~Roederer](http://www2.gi.alaska.edu/~Roederer)

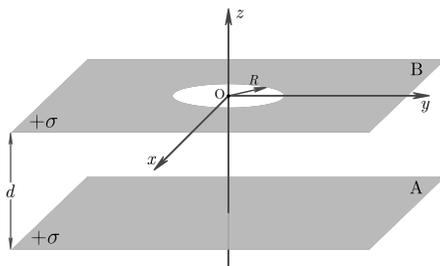
<sup>1</sup>*Electromagnetismo Elemental*, Eudeba (2015)

abajo, si no hay nada entre ellas? Y en el modelo mecanicista de Maxwell, ¿de donde vienen las tensiones ‘elásticas’ que tienden a separar las dos placas, si no hay campo entre las dos?”



**Figura 1** Sandwich de campo nulo entre dos planos infinitos, portadores de la misma densidad de carga  $\sigma_A = \sigma_B = \sigma$ .

Mi primer impulso fue decirle que el ejemplo que me daba era una abstracción doble: en la realidad física no hay planos cargados de espesor infinitesimal ni de extensión infinita. Pero lo pensé mejor, y le propuse proceder en forma ‘políticamente correcta’. En física, eso significa seguir rigurosamente las normas impuestas por la sociedad (científica), que aplicadas a este caso exigen determinar a qué campo estaría expuesta una carga puntual  $q$  en el punto O de la Fig. 2. Ello requerirá *varios* pasos: 1) Recortar un trozo de dimensiones muy pequeñas (con respecto a la distancia  $d$ ) de la distribución  $\sigma$ ; 2) colocar una carga de prueba (de tamaño muy pequeño con respecto al agujerito) en O; 3) medir la fuerza  $f$  sobre esa carga; 4) verificar que (i) el cociente  $f/q$  es independiente de  $q$  (condición requerida por la misma *definición* de campo eléctrico), así como (ii) que es independiente del radio  $R$  del agujerito (condición requerida por cuanto el agujerito practicado es una perturbación del sistema que estamos midiendo). Si se hace todo eso, se encuentra experimentalmente que  $E = f/q = \sigma/2\epsilon_0$ , o sea, efectivamente, igual al campo de la placa de abajo (valor que es sólo la *mitad* del campo uniforme en el semi-espacio superior del sistema entero).

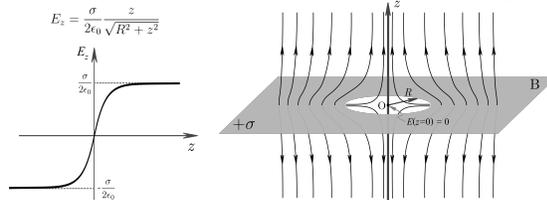


**Figura 2** Sandwich con agujero en la tapa.

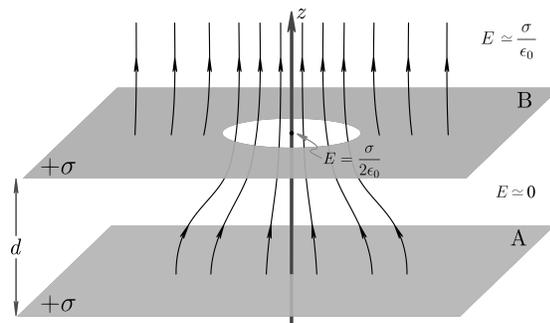
Y si lo que afirmo sobre el resultado de este proceso experimental no convence, hagámoslo todo en forma puramente teórica, en base a la Fig. 2. El campo resultante de ese sistema en el hemisferio superior  $z > 0$  es la suma del campo uniforme  $\sigma/2\epsilon_0$  (dirigido hacia arriba) de la placa de abajo, más el campo de la placa superior *con un agujero*. El campo de un plano cargado con un agujero circular es fácil de calcular a lo largo del eje de simetría  $z$ . Usando la Ley de Coulomb, basta integrar las contribuciones de anillos de espesor  $dr$ , entre  $r = R$  y  $\infty$ , obteniendo:

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}.$$

La representación gráfica está dada en la Fig. 3. El campo en O es cero; por lo tanto, en el sistema de dos placas paralelas cargadas, ¡el campo total en el punto O será igual al de la placa de abajo! Más aun, se puede demostrar que  $E_z$  es cero *en todo el plano del agujero* (con integrales más complicadas que revelan una singularidad geométrica en el borde). Las líneas de campo del sistema completo están esbozadas cualitativamente en la Fig. 4.



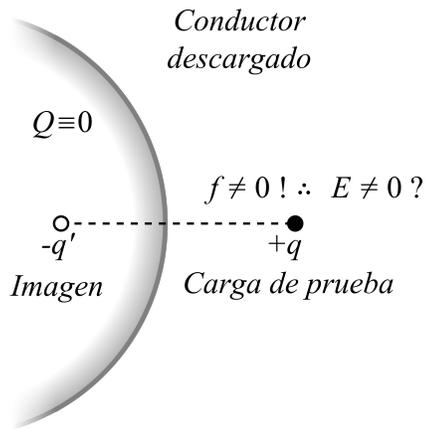
**Figura 3** Campo a lo largo del eje de simetría, y líneas de campo de un plano cargado con agujero circular.



**Figura 4** Esbozo del campo total de un sistema con agujero en la tapa.

El estudiante quedó un poco intrigado con el requerimiento arriba mencionado de que el cociente  $f/q$  sea independiente de  $q$ , lo que calificó

de pedantería. Le recordé que esta condición no es trivial: por ejemplo, si quisiéramos medir el campo eléctrico cerca de un conductor descargado usando una carga de prueba puntual  $q$  (Fig. 5), *nunca* obtendríamos un valor cero —a causa del fenómeno de inducción electrostática (recuérdese el método de las imágenes)—. Pero en ese caso se observa que el cociente  $f/q$  *no es independiente de  $q$* : ¡resulta proporcional a  $q$ ! Es precisamente por esta razón que en la definición de campo se exige que valga  $\vec{E} = \lim(\vec{f}/q)$  para  $q \rightarrow 0$ .<sup>2</sup>



**Figura 5** Carga de prueba frente a un conductor descargado.

¿Y la cuestión de las tensiones tipo ‘elásticas’ de Maxwell actuando sobre las dos placas cargadas, separadas por vacío y campo nulo? O la de ¿cómo sabe la placa de arriba de que hay una abajo? Ahí sí insistí en que un sistema extendido hasta el infinito en las direcciones  $x, y$  no existe en la práctica, que habría que ver qué pasa en sus límites, y que en un sistema real de dimensiones finitas, son las líneas de campo del semiespacio superior e inferior las que ‘tiran’ de las cargas eléctricas  $+\sigma$  en que nacen. Convencido sólo a medias, el estudiante murmuró: “¿Y si nos limitamos a la noción de *acciones a distancia*, o sea, la vieja imagen filosófica de un objeto dado influenciando a otro sin que ‘haya algo físico’ entre los dos que transmita punto a punto la interacción?” Esto me recordó lo que

<sup>2</sup>Irrealizable físicamente, por cuanto la carga eléctrica mínima libre es (en valor absoluto) la del electrón.

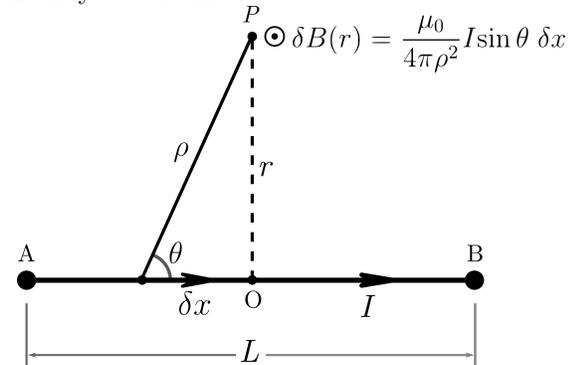
<sup>3</sup>C. Cercignani, *Vorlesungen zu Maxwells Theorie der Elektrizität und des Lichts*, Bd.II (Oxford University Press, Oxford, 2010).

Maxwell mismo escribió: “... *mi teoría debe ser contemplada como una mera pintura de la naturaleza, una mera analogía...*”.<sup>3</sup> Más sobre esto en la sección 4.

## 2. Corrientes finitas y corrientes gorditas

Una vez un alumno vino a mi oficina, me mostró un dibujo (Fig. 6) y dijo:

“Tengo un conductor rectilíneo finito que lleva una corriente  $I$  constante entre los puntos A y B. Hay dos alternativas



**Figura 6** Conductor rectilíneo finito.

para calcular el campo magnético  $\vec{B}$  en un punto P del plano mediano. La primera es usar la ley de Biot-Savart e integrar la contribución del elemento de corriente  $I\delta\vec{\ell}$  entre A y B:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int_A^B \delta\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_A^B \delta\vec{\ell} \times \frac{\vec{r}}{r^3} .$$

Esto me lleva a la expresión para el módulo de  $\vec{B}$  (ver Fig. 6):

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} 2 \int_{\arctan(2r/L)}^{\pi/2} \sin^2\theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{1}{\sqrt{1+2r/L}} . \quad (1)$$

Para un conductor infinito ( $L \gg r$ ), en efecto, obtengo el resultado bien conocido de la ley de Biot-Savart tradicional.

La segunda alternativa es usar la propiedad integral de Ampère y argumentos de simetría para el plano mediano (Fig. 7):

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} .$$

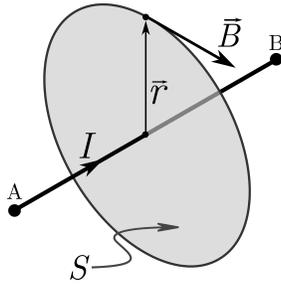


Figura 7 Método de Gauss 1.

Pero con este segundo método tengo un problema: como la superficie que se apoya en la curva cerrada de integración puede ser cualquiera, ¡usando la superficie S de la Fig. 7 me daría el mismo resultado que para un conductor infinito (o sea  $2\pi rB = \mu_0 I$ ), y para la superficie S' de la Fig. 8 me daría  $2\pi rB \equiv 0!$ ”

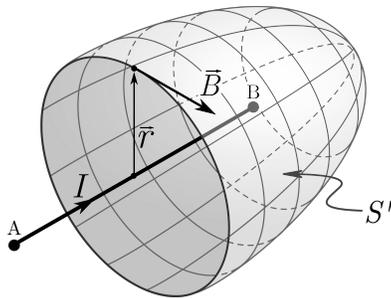


Figura 8 Método de Gauss 2.

Ejem, ejem... tuve que pensar un poco y le dije: “Bueno, la expresión de Biot-Savart en forma diferencial expresa la *esencia del magnetismo*, representando la interacción de cargas en movimiento. Una carga puntual  $q$  pasando por el origen con velocidad  $\vec{v}$  (que por el momento supondremos mucho menor que  $c$ , la velocidad de la luz), genera un campo magnético  $\vec{B}(\vec{r}) = (\mu_0/4\pi)q\vec{v} \times \vec{r}/r^3$  en un punto  $\vec{r}$ . Cuando hay muchas cargas puntuales en movimiento, eso lleva a la relación de Biot-Savart que usaste en la integración. Punto. Eso es todo, no hay otras condiciones; el conductor entre A y B podría tener cualquier forma, como un gusano ondulante, o como en un solenoide (excepto que la integral y el campo resultante serían más complicados). Por eso, el primer método está bien.

<sup>4</sup>Ojo: para mantener un sistema como el de la Fig. 9, hay que proporcionar una *fuerza electromotriz* (trabajo de origen externo) que mantenga las cargas reales en el conductor lineal en movimiento con velocidad constante *en contra* del campo eléctrico dipolar (si las cargas en A y B en efecto son puntuales (deltas), ¡la potencia necesaria debería ser infinita!) La potencia así proporcionada se convierte en energía del campo eléctrico creciente. Otra posibilidad física del sistema de la Fig. 9 sería el de dos esferitas inicialmente cargadas con  $+q$  y  $-q$ , respectivamente, que se descargan a  $I$  constante de A a B. En ese caso, el campo eléctrico se invierte, decrece en el tiempo, y en el conductor AB la *f.e.m.* deberá proporcionar una fuerza de frenamiento, para mantener la velocidad de las cargas constante.

Por otra parte, la propiedad integral (Ampère) se puede deducir como una mera consecuencia de Biot-Savart, *pero solo para corrientes cerradas*. Fue justamente Maxwell quien le dió validez general para corrientes abiertas, postulando la existencia de *corrientes de desplazamiento* (nombre puramente histórico) en todo punto del espacio en que hay un campo eléctrico variable en el tiempo. Aplicando el *principio de conservación de la carga*, se demuestra que estas corrientes postuladas (que *no* representan movimiento de cargas) tienen la propiedad de cerrar cualquier corriente ‘real’ abierta. Y en el ejemplo (Fig. 6) las hay, ¡*porque no podemos ignorar ese omnipotente principio!*”

En efecto, en los puntos A y B inevitablemente habrá una descarga y acumulación de cargas eléctricas, respectivamente:  $-dq_A/dt = +dq_B/dt = I$ . O sea, en *todo* el volumen circundante al conductor finito hay un campo eléctrico variable, o sea, una ‘gorda’ distribución de corrientes de desplazamiento  $\vec{J}_{des} = \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$ , que cierran el segmento de corriente real abierta entre A y B (Fig. 9):

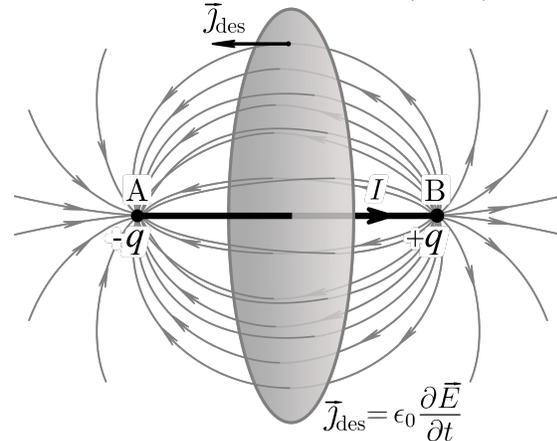


Figura 9 Acumulación de cargas y las corrientes de desplazamiento.

Veamos cómo funciona esto para el caso en cuestión. El campo eléctrico, en cada instante  $t$ , será el de un dipolo de cargas puntuales si inicialmente  $|q_A| = |q_B| = q$ .<sup>4</sup> En el plano

de simetría, ese campo será paralelo a AB dirigido hacia la izquierda, de una intensidad  $E(r) = (2q/\pi\epsilon_0 L^2)[1 + (2r/L)^2]^{-3/2}$ . Para una intensidad  $I$  que va de A a B, el flujo  $I_{\text{des}}$  de la densidad de corriente de desplazamiento se obtiene integrando la expresión de  $\vec{J}_{\text{des}} = \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$  sobre la superficie S. El *flujo total* de corriente a través de la superficie S en la Fig. 9 resulta (ojo con la regla del tirabuzón):

$$I_{\text{total}} = I - I_{\text{des}} = \frac{I}{\sqrt{(1 + 2r/L)^2}} .$$

Insertando en la relación de Ampère, ¡obtenemos el mismo resultado para  $B$  que usando Biot-Savart (ecuación 1)!

El estudiante se quedó pensativo y al cabo de un rato comentó: “entonces, según el método integral de Ampère las corrientes de desplazamiento contribuyen en la creación del campo  $\vec{B}$ , pero usando Biot-Savart, ¿no intervienen para nada? ¿Qué está pasando?” Le dije: “depende de lo que llamas ‘crear un campo’. Desde un punto de vista causa-efecto, cargas eléctricas ‘crean’  $\vec{E}$ , y corrientes de convección (o sea, cargas en movimiento) ‘crean’  $\vec{B}$ . Las corrientes de desplazamiento no ‘crean’  $\vec{B}$ ; prefiero llamarlas corrientes *virtuales*. En tu ejemplo del trozo de corriente finita, no hay cargas en movimiento fuera de éste. Pero el rotor del vector  $\vec{B}$  en la expresión (1) ¡no es cero! <sup>5</sup> Vale  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$ , según una de las ecuaciones de Maxwell; ¡verificalo matemáticamente con la expresión (1)!”

En resumen, cargas en movimiento crean el campo  $\vec{B}$ , variaciones temporales de  $\vec{E}$  le dan forma! ¿Pero acaso no puede haber corrientes de desplazamiento *en ausencia* de corrientes reales? El principio de conservación de la carga no nos permite modificar *in situ* cargas eléctricas. La única forma de crear un campo eléctrico variable (o sea corrientes de desplazamiento) es poner cargas en movimiento (esto incluso vale en el caso de la creación local de pares de carga opuesta, como un electrón y positrón); o sea, corrientes  $\vec{J}_{\text{des}}$  necesariamente vienen acopladas a corrientes de convección—con una excepción fundamental: ¡las ondas electromagnéticas! Pero aún en ese caso, en algún momento anterior, en algún punto del espacio *debe* haber habido corrientes reales. Más de esto en la sección 4.

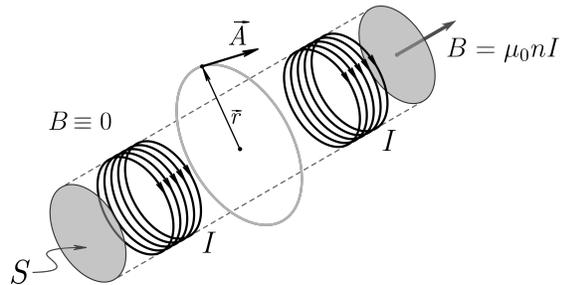
<sup>5</sup>Notar que el rotor de  $\vec{E}$  permanece cero siempre que la corriente  $I$  y por lo tanto  $\vec{B}$  sean constantes.

### 3. O Sole Noide

En un día de sol brillante, después de dar una clase sobre transformadores, un estudiante me presentó el siguiente problema (Fig. 10):

“Tengo un solenoide infinitamente largo, alimentado con una corriente  $I$  constante. Dentro del solenoide el campo magnético es uniforme y de módulo  $B = \mu_0 n I$  ( $n$  = número de espiras por unidad de longitud). Afuera, el campo  $\vec{B}$  es nulo, pero el vector potencial  $\vec{A}$  no lo es (ver Fig 10):

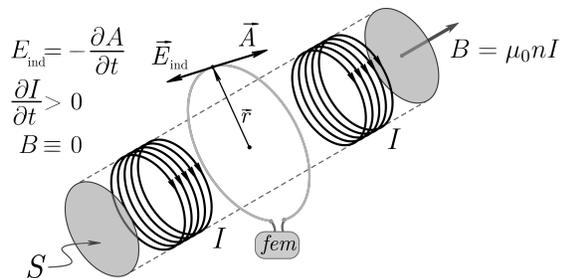
$$A(r) = \frac{\mu_0 n I S}{2\pi r} . \quad (2)$$



**Figura 10** Campo y potencial vectorial en un solenoide infinito, a intensidad  $I$  constante.

Ahora agrego una espira exterior concéntrica con dos bornes, e impongo un incremento lento de la intensidad,  $dI/dt = \text{const.} > 0$  (Fig. 11). Fuera del solenoide, el campo  $\vec{B}$  seguirá siendo nulo, pero el vector potencial variará linealmente en el tiempo. De acuerdo a la ley de Faraday, esto hace aparecer un campo eléctrico inducido  $\partial \vec{A}(r) / \partial t$  en el espacio exterior:

$$E_{\text{ind}} = \frac{\mu_0 n S}{2\pi r} \frac{dI}{dt} . \quad (3)$$



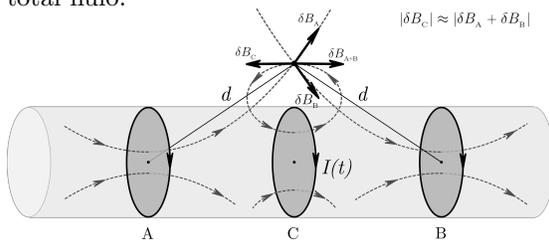
**Figura 11** Caso en que la intensidad aumenta.

En el aro conductor habrá una fuerza electromotriz, de la cual puedo extraer energía si conecto una carga (por ej. una resistencia) entre los bornes. Y todo esto vale, no importa cómo esa espira esté colocada alrededor del solenoide. ¿De donde viene esa energía, si entre el solenoide y la espira *no hay campo magnético alguno*? ¿Dónde está el vector de Poynting  $\vec{P} = (\vec{E} \times \vec{B})/\mu_0$ , que siempre nos muestran en el caso de una típica línea de transmisión?”

Ejem, ejem. ¡Otro problema de campo nulo! Pensé: solenoide infinito  $\rightarrow$  campo magnético cero afuera. ¿Quizás habrá que decirle que solenoides infinitos no existen en la práctica? No —debe haber gato encerrado en eso de la corriente variable, *sincronizada* a lo largo del solenoide—. El electromagnetismo es relativista de nacimiento, por lo tanto ¡hay que tener mucho cuidado con eso de tener una corriente que varía temporalmente en unísono a lo largo de un solenoide infinito!

Veamos si el campo magnético en el espacio exterior de una bobina infinitamente larga es realmente cero. Consideremos la Fig. 12, y para ser más preciso, supongamos que el solenoide consiste de espiras individuales (de densidad lineal  $n$ ), cada una controlada individualmente por un reloj sincronizado con todos los otros, contribuyendo con un campito  $\delta\vec{B}$  en el punto P.

Observando la figura se ve que las espiras cercanas contribuyen con vectorcitos dirigidos hacia la izquierda, mientras que las más lejanas contribuyen con vectorcitos dirigidos hacia la derecha. Se puede demostrar (laboriosamente) que en un solenoide infinito, las contribuciones de espiras cercanas compensan exactamente las de las lejanas, efectivamente dando un campo magnético total nulo.

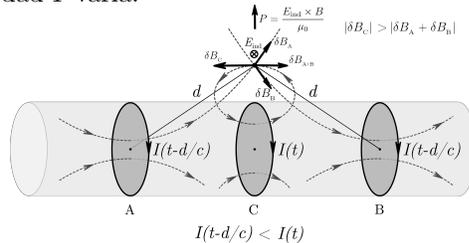


**Figura 12** Contribución de espiras individuales en el caso de corriente constante.

<sup>6</sup>En realidad, el campo  $\delta\vec{B}$  que resulta de la no-compensación de contribuciones en un solenoide infinito, es un campo ‘tipo onda electromagnética’. Por ejemplo, el vector de Poynting correspondiente *no se invierte* (sigue apuntando hacia afuera) cuando la intensidad decrece ( $dI/dt < 0$ ), porque ambos campos, el eléctrico y el magnético se invierten. Dejo al lector investigar si todo esto tiene alguna relación con el ‘efecto Aharonov-Bohm’ en mecánica cuántica.

<sup>7</sup>Por supuesto que hay razones históricas por las cuales las ecuaciones de Maxwell se escriben en la forma tradicional, más que nada, para resaltar el hecho matemático de que todo campo vectorial está definido unívocamente

Pero cuando la intensidad en cada espira varía, por ej., aumenta con el tiempo, *la contribución de las espiras lejanas viene atrasada*: en un dado instante  $t$ , en que una espira muy cercana contribuye con el campito correspondiente a la intensidad  $I(t)$ , una espira lejana contribuye con un campito de una corriente *menor*  $I(t - d/c) < I(t)$ , donde  $d$  es la distancia a la espira lejana, y  $c$  es la velocidad de propagación de la información electromagnética (o sea, de la luz en el vacío). El resultado es que no hay más compensación en P, y el campo resultante, por pequeño que sea, tendrá una dirección hacia la izquierda. Multiplicando vectorialmente  $\vec{E}_{ind}$  con ese campo resultante, se obtiene el vector de Poynting (apuntando del solenoide para afuera, Fig. 13). En un solenoide de extensión finita, como es en cualquier transformador, el campo magnético exterior no es nulo aún para  $I$  constante, y será ese el que predominará en el vector de Poynting cuando la intensidad  $I$  varía.<sup>6</sup>



**Figura 13** Caso de no-compensación de contribuciones distantes.

#### 4. Pasando bocaditos de una bandeja a otra

Durante los años 50-60 fui participante en una batalla multinacional para erradicar el uso del vector  $\vec{H}$  de todos los libros de texto. Ahora, más modestamente, estoy tratando de convencer a docentes de electromagnetismo de presentar las ecuaciones básicas de Maxwell (en el vacío) en otra forma, simplemente pasando ciertos términos de un lado al otro. Eso no altera su significado matemático ni físico, pero puede ayudar a una mejor comprensión por parte del estudiant-

te.<sup>7</sup> Yo prefiero reordenarlas para hacerlas aparecer como ‘ecuaciones de evolución’ (tal como lo son la ecuaciones de Hamilton-Jacobi y de Schrödinger), y añadiendo explícitamente la topoderosa ecuación de la conservación de la carga eléctrica:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} (\vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \vec{j}) , \quad (4)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E} , \quad (5)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j} . \quad (6)$$

A éstas agrego las siguientes ecuaciones, que son mera *consecuencia* de las anteriores (tomando divergencia a las primeras dos), pero que tienen su propio significado físico:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho , \quad (7)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 . \quad (8)$$

Como primer punto, un llamado de atención. Frecuentemente se habla de las ecuaciones de Maxwell (en cualquiera de sus formas) como representando un punto de vista ‘localista’, en el que el campo electromagnético en todo punto del espacio está determinado por  $\rho$  y  $\vec{j}$  ‘ahí y ahora’. ¡No! Lo que está determinado por las fuentes en un punto dado son las *variaciones espaciotemporales* del campo en su entorno—o sea su ‘configuración geométrica y variación temporal local’. El campo electromagnético en un punto e instante dados ¡está determinado por las fuentes *en todas partes, allá y en el pasado!* En otras palabras, para encontrar los valores de  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  hay que *integrar* las ecuaciones de Maxwell sobre todo el espacio y el tiempo anterior. Es como en acústica: el campo acústico ahora y acá (o sea, lo que estamos oyendo en este mismo instante) ¡depende de las fuentes de sonido allá en el pasado!

Como segundo punto, una observación: cuando se trata de campos en el vacío, *en ausencia* de materiales (aisladores, conductores o plasma), las cargas  $\rho$  y corrientes  $\vec{j}$  están dadas, o sea, son *controladas por agentes exteriores*. En cuanto a las corrientes ‘virtuales’ de desplazamiento mencionadas en la sección 2, no aparecen explícitamente en la formulación ‘tipo evolución’ (4),

cuando su rotor y su divergencia están dados en cada punto del espacio.

<sup>8</sup>Nada prohíbe esto para corrientes *cerradas*: no podemos variar  $\rho$  *in situ* sin mover cargas de un lado a otro, pero sí podemos variar  $\vec{j}$ —con tal que los tubos de corriente permanezcan cerrados.

evitando así posible confusión en discusiones de causa-efecto en electrodinámica.

Analicemos unos casos particulares. Para un caso *estacionario* en que nada cambia en el tiempo, las ecuaciones precedentes nos dicen que hay dos condiciones que nosotros, los observadores o experimentadores debemos respetar *a priori*: (i)  $\rho$  y  $\vec{j}$  deben ser independientes del tiempo en todo punto del espacio (razón obvia); (ii) las corrientes deben ser todas cerradas (porque debe ser  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ ). En ese caso se *desacoplan* los campos eléctrico y magnético estáticos, y quedan las ecuaciones diferenciales básicas de la electrostática y magnetostática:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho , \quad (9)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 , \quad (10)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} , \quad (11)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 , \quad (12)$$

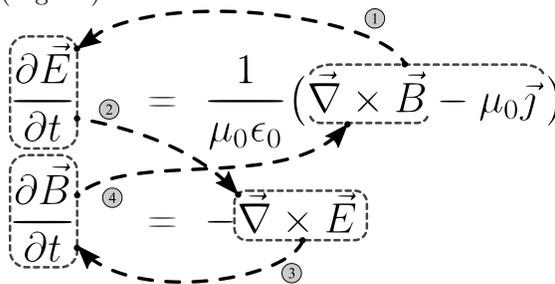
con  $\rho$ ,  $\vec{j}$  constantes en el tiempo y  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$  como pre-condiciones. La ecuación 12 muestra que las líneas de campo magnético son siempre cerradas (y que ‘cargas magnéticas’ no existen, ¡aunque no están prohibidas!).

El segundo ejemplo es el caso de una distribución de corrientes inicialmente estática en ausencia de cargas eléctricas, que a partir de un momento dado comienza a variar lentamente en el tiempo:  $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}, t)$ .<sup>8</sup> Supongamos que la distribución de corrientes está confinada a un volumen de orden  $L^3$ . Examinemos la ecuación de Maxwell (4). Inicialmente,  $\vec{E} = 0$ ; cuando  $\vec{j}$  comienza a variar, el ‘equilibrio’ entre el rotor del campo magnético y la densidad de corriente se rompe en cada punto del volumen en que hay corrientes. Pero el vector  $\vec{B}$  que aparece en el rotor se origina *en todas* las corrientes en ese volumen. Si la información electromagnética se propagase con velocidad infinita, el vector  $\vec{B}$  se ajustaría instantáneamente a la condición estática (11). Tal ajuste implica un cambio temporal de  $\vec{B}$ , y por lo tanto, según la (5) aparecerá un campo eléctrico solenoidal—¡precisamente el campo de inducción de Faraday—! Y ese campo no está limitado a la región de corrientes: aparece en todo el espacio. Dentro de la distribución de corrientes, la variación temporal de ese campo eléctrico inducido debería interferir con el equilibrio ‘estático’ entre rotor de  $\vec{B}$  y  $\vec{j}$  por efecto de la primera ecuación

de Maxwell (4), pero allí hay un factor  $(\mu_0\epsilon_0)^{-1}$  que resulta ser enorme; pasándolo a la izquierda, daría una perturbación despreciable.

El siguiente caso es el ejemplo tratado en la sección 2: un hilo de corriente abierta de intensidad constante, con variación de cargas eléctricas en sus extremos (Fig. 5). Ahora la distribución de corrientes reales es una función delta a lo largo del conductor lineal, y cero en todo el espacio circundante. El campo magnético es constante y no hay campo eléctrico solenoidal. En la ecuación de Maxwell (4) el rotor de  $\vec{B}$  está solito, totalmente desbalanceado en todo el espacio circundante al conductor; por lo tanto es la variación temporal de  $\vec{E}$  la que impone la configuración espacial (el rotor no nulo) de  $\vec{B}$ . Pero la *causa* del campo magnético sigue siendo la corriente de convección en el conductor finito, como insistimos en la sección 2.

El último ejemplo es el de una distribución de corrientes cerradas confinada en un volumen de dimensión  $L^3$ , pero que ahora apagamos ‘rápidamente’, tan rápido, que el campo  $\vec{B}$  no tiene chance de reajustarse para lograr equilibrio entre su rotor y la densidad de corriente, porque la información electromagnética de otras partes de la distribución de corrientes no llega a tiempo al punto en cuestión. En ese caso, la primera ecuación (4) nos daría un ‘pulso’ de campo eléctrico, cuyo rotor en la (5) da un pulso a  $\vec{B}$ , que entonces actúa sobre el paréntesis en la (4) en puntos vecinos, afectando el  $\vec{E}$  allá, etc. etc. (Fig. 14):



**Figura 14** Generación y propagación de una perturbación electromagnética en el vacío.

Este jueguito de calesita representa, en términos aptos para jardín de infantes, la generación y propagación de una perturbación en el campo

electromagnético que se desprende de la zona de corrientes que cambian bruscamente —¡o sea, una onda electromagnética—! En términos de causa-y-efecto, y volviendo a introducir el concepto de corrientes de desplazamiento, el juego es: desbalance entre rotor de  $\vec{B}$  y densidad local de corriente ‘real’ → corrientita de desplazamiento → perturbación del campo magnético → perturbación inducida del campo eléctrico → corrientita de desplazamiento → etc. Lo importante es reconocer que *sin excepción* la causa física de toda onda electromagnética es una variación temporal de la corriente *real* —o sea, en última instancia, la *aceleración* de una carga eléctrica—. <sup>9</sup> Observando las relaciones (4) y (5), se ve cómo la cantidad  $\mu_0\epsilon_0$  controla la rapidez de este proceso; en efecto,  $c = (\mu_0\epsilon_0)^{-1/2}$  es la velocidad de propagación de una perturbación electromagnética en el vacío. El mero hecho de que esa velocidad depende de dos constantes universales de la *electrostática* y *magnetostática*, y de que es independiente del sistema de referencia, fue lo que derrumbó el edificio clásico de la mecánica basado en la noción de tiempo absoluto.

## 5. Bocaditos vegetarianos, sin campos

Históricamente, los estudios de la magnetostática y electrostática comenzaron con mediciones de fuerzas sobre pequeños imanes y conductores cargados eléctricamente, en equilibrio. Se llegó así, en los tiempos de Faraday, al concepto físico y matemático de ‘campo’ como describiendo cuantitativamente propiedades pónderomotrices específicas del espacio que rodea a imanes y cargas eléctricas. Maxwell perfeccionó este cuadro creando un modelo en el que el espacio vacío en presencia de cargas eléctricas adquiere propiedades similares a las de un medio elástico. Pero, como citado en la nota al pie No. 3, esta descripción, por más útil e intuitiva que sea, no es más que un *modelo* de lo que sucede ‘ahí afuera’. Para crear un campo, para detectar y medir un campo, para modificar un campo, para anular un campo —¡hay que manipular cargas eléctricas—! En el correr de los años aparecieron otras funciones del espacio-tiempo: los potenciales escalar  $V$  y vectorial  $\vec{A}$ , que pueden existir incluso en regio-

<sup>9</sup>Ondas planas sinusoidales yendo de  $-\infty$  a  $+\infty$  (que es lo que en general se introduce primero como ejemplo en los libros), no existen en el mundo físico real. Pero no están prohibidas matemáticamente—tomando el rotor a las ecuaciones (4) y (5) en ausencia de cargas y corrientes, se llega a sendas ecuaciones de onda para  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ .

nes en las que los campos son nulos (por ej. en el interior de conductores en equilibrio, fuera de un solenoide largo, respectivamente). También aparecen en el proceso de integración de las ecuaciones de Maxwell, y lejos de ser meras funciones matemáticamente útiles, representan las interacciones electromagnéticas en los Lagrangianos, Hamiltonianos —y en toda la electrodinámica cuántica—.

En cursos más avanzados, los estudiantes frecuentemente preguntan: “¿Cuáles son más importantes: los campos o los potenciales? ¿Cuáles tienen más significado físico? ¿Se podría desarrollar un electromagnetismo *sin* campos?” Respecto a esto último, les contesto: “¡sí, se puede! Y es muy instructivo hacerlo como ejercicio.”

¡Hagámoslo! Empecemos por formular un número limitado de postulados, basados en experiencias ideales.<sup>10</sup> En primer lugar, adoptemos la conservación de la carga eléctrica (6) como el principio fundamental, que escribiremos en su forma integral :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(\vec{r}, t) dr^3 = - \oint_S \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} . \quad (13)$$

V es un volumen dado, encerrado por la superficie cerrada S. Es importante notar que todo se toma al tiempo *simultáneo* t.<sup>11</sup>

Luego, construyamos una distribución *estática* de cargas  $\rho(\vec{r})$ , y otra de corrientes cerradas  $\vec{j}(\vec{r})$ ,<sup>12</sup> y determinemos experimentalmente la energía total  $U_e$  que se debe proveer (o extraer) en este proceso por medio de la acción de fuerzas externas (no-electromagnéticas), partiendo desde cero. ¿Qué quiere decir esto último? Una distribución de cargas eléctricas no se puede crear *in situ* de la nada (lo prohíbe el principio de conservación): tenemos que traer cada elemento  $\rho dr^3$  uno por uno del infinito, muy despacito, sin aceleración apreciable —o sea, cada uno mantenido en equilibrio durante el proceso por una fuerza exterior—. Se encuentra que la energía involucrada es independiente de la manera en que se traen las cargas del infinito, y que vale:

$$U_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \iint \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dr^3 dr'^3 .$$

En esta relación, las dos integrales (triples) se toman sobre todos los puntos en que hay cargas

<sup>10</sup>Experiencias muy difíciles de conducir en la realidad, pero cuyas consecuencias pueden ser verificadas experimentalmente.

<sup>11</sup>La simultaneidad requerida en esta igualdad tiene importancia en la teoría de la relatividad restringida.

<sup>12</sup>El principio de conservación de la carga (6) o (13) *exige* esto último, para que las corrientes sean realmente estáticas.

eléctricas, y el factor que las precede representa una constante universal. Nótese la forma bilineal en  $\rho$ , que físicamente representa el carácter simétrico de la interacción entre pares de elementos de volumen cargados eléctricamente.

Una distribución de corrientes estacionarias sí se puede crear *in situ*—por ejemplo incrementando una *f.e.m* lentamente en cada espira cerrada infinitesimal. También aquí se encuentra que la energía total requerida  $U_m$  es independiente de la forma en que se crea la distribución; su valor resulta ser la expresión bilineal

$$U_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{2} \iint \frac{\vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dr^3 dr'^3 .$$

$\mu_0$  es otra constante universal.

Introduciendo los potenciales como una función escalar  $V(\vec{r})$  y vectorial  $\vec{A}(\vec{r})$ , respectivamente:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dr'^3 , \quad (14)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dr'^3 , \quad (15)$$

permite expresar las dos energías totales en la forma:

$$U_e = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r})V(\vec{r})dr^3 \quad y$$

$$U_m = \frac{1}{2} \int \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r})dr^3 . \quad (16)$$

De aquí se puede deducir que las densidades de fuerza actuando sobre una distribución en equilibrio de cargas y corrientes cerradas son, respectivamente:

$$\vec{f}_e = -\rho\vec{\nabla}V , \quad (17)$$

$$\vec{f}_m = \vec{j} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) . \quad (18)$$

Por supuesto reconocemos la presencia de los vectores campo electrostático  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$  y magnetostático  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ —pero que por el momento estos conceptos no son necesarios.

Consideremos ahora el caso general de una distribución dada de cargas y corrientes variables en el tiempo  $\rho(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{j}(\vec{r}, t)$ , y ligadas por el principio de conservación de la carga (13). Siguiendo el mismo procedimiento que arriba, determinemos la energía total necesaria para crear este sistema

electromagnético integral. Se encuentra que, para un instante dado  $t$  en un sistema de referencia inercial dado, las relaciones (16) siguen siendo válidas como tal, pero ahora los potenciales deben expresarse en la siguiente forma ‘retardada’:

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t_{ret})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau'^3, \quad (19)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t_{ret})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau'^3, \quad (20)$$

donde

$$t_{ret} = t - \frac{|\vec{r}' - \vec{r}|}{c}, \quad (21)$$

es el tiempo retardado, y  $c$  es otra constante universal, representando la velocidad de propagación de *información* sobre el estado eléctrico de cada punto fuente  $\vec{r}'$  en el instante retardado apropiado. Aplicando el operador  $\partial/\partial t$  a la (19) y el operador  $\vec{\nabla} \cdot$  a la (20) (con mucho cuidado, teniendo presente la definición (21) y la existencia de *dos* vectores posición  $\vec{r}$  y  $\vec{r}'$ ), y teniendo en cuenta la relación (6), obtenemos como una *consecuencia*:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (\text{Lorentz gauge}), \quad (22)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (\text{cte. universal}). \quad (23)$$

Esto es extraordinario: con los postulados (16), (19) y (20), y la ley (13) ¡la famosa relación de ‘gauge’ de Lorentz y la expresión de la velocidad de la luz aparecen ‘automáticamente, de yapa’! La densidad de fuerza electromagnética sobre un sistema de cargas y corrientes se puede calcular, pero es una tarea difícil y demasiado larga para este artículo, y que requiere apelar a otro principio fundamental: el Principio de Relatividad.<sup>13</sup> Se obtiene:

$$\vec{f}_\rho = -\rho(\vec{\nabla}V + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) \quad \vec{f}_j = \vec{j} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}), \quad (24)$$

y los vectores campo (como meras definiciones en esta presentación) son

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (25)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (26)$$

Tomando rotores y divergencias, y teniendo en cuenta (19) y (20), se obtienen las ecuaciones de Maxwell (como mera curiosidad matemática en esta presentación.)

Después de un seminario sobre la introducción del electromagnetismo en esta forma ‘sin campos’, un estudiante una vez me comentó, indignado: “¡Pero este es un cuadro del tipo *acción a distancia*, como en los viejos tiempos pre-Faraday y pre-Maxwell! Además, creo que eso de que las ecuaciones de Maxwell ‘son una mera curiosidad’ es un sacrilegio.” Mentalmente me puse una sotana negra y le dije: “Hijo mío, el cuadro que pinté en mi sermón sobre un electromagnetismo sin campos vale solo para cargas eléctricas *en el vacío*. En presencia de materia, como ser conductores, medios polarizables y plasma, aparecen cargas y corrientes *equivalentes* por la acción de fuerzas del tipo (24) sobre cargas elementales, y en las que  $V$  y  $\vec{A}$ , o los vectores campo (25) y (26) correspondientes, son promedios macroscópicos tomados sobre sus valores puntuales en el entorno del punto en cuestión. En otras palabras, en presencia de un medio material las ecuaciones de Maxwell, con la debida inclusión de cargas y corrientes equivalentes como funciones del campo local, son *imprescindibles* para la descripción física del sistema electromagnético!” El estudiante no pareció muy convencido, y me retrucó: “Dejemos los medios materiales y volvamos a su electromagnetismo ‘sin campos’: ¿qué diablos son los fotones?”. Dejo la contestación al lector...

## 5.1. Agradecimientos

Mi más sincero agradecimiento a la Asociación Física Argentina por la invitación para presentar mi libro *Electromagnetismo Elemental* en la 101<sup>a</sup> Reunión Anual en Tucumán; a Gabriela Simonelli, Coordinadora del Comité Organizador local; así como a Mario Mariscotti y Darío Rodrigues por sus gentiles palabras de introducción en esa ocasión y a Daniel Cartelli por convertir mis dibujos a mano alzada en figuras de jerarquía profesional.

Boulder, Colorado (EEUU), noviembre de 2016.

<sup>13</sup>Ver por ejemplo sección 3.j en Roederer J.G., *Mecánica Elemental*. Eudeba.