

VALIDACIÓN DE UN MODELO DE TOMA SIMULTÁNEA DE AGUA Y NUTRIENTES

VALIDATION OF A MODEL OF SIMULTANEOUS INTAKE OF WATER AND NUTRIENTS

M.A. Bettera Marcat¹, J. L. Blengino Albrieu², J.C. Reginato², y D.A. Tarzia³

¹IFEG (UNC-CONICET) y FaMAF, Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba, Arg. X5000HUA

²Departamento de Física, FCEFQyN, Universidad Nacional de Río Cuarto, Río Cuarto, Arg.

³CONICET – Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Empresariales, Universidad Austral, Rosario, Arg.

Recibido:02/04/17; Aceptado: 05/06/17

En este trabajo se estudia comparativamente un modelo unidimensional de transporte y toma simultáneas de nutrientes y agua por raíces de cultivos. El modelo se deriva del de *Barber-Cushman* con la modificación de frontera móvil (dominio variable en el tiempo). En las ecuaciones de este modelo el transporte de nutrientes está acoplado al transporte de agua, que sigue un modelo derivado de la ecuación de *Richards* unidimensional también con frontera móvil. Se espera que al acoplar los transportes, en la toma de nutrientes se aprecien diferencias debidas a considerar de forma más realista el transporte convectivo. Se validó este modelo con datos de trabajos experimentales que estiman la toma de nutrientes, y también los parámetros de entrada necesarios para el modelo. Se comprobó que las tomas de nutrientes simuladas con el modelo simultáneo están más cerca de la tomas estimadas experimentalmente que en el modelo que sólo considera toma de nutrientes bajo dos condiciones: i) cuando hay alta disponibilidad de nutrientes (adición de fertilizante) y ii) para los nutrientes de alta movilidad.

Palabras clave: toma simultánea de nutrientes y agua, frontera móvil, ecuaciones no-lineales

In this work, is studied comparatively a unidimensional model of transport and simultaneous intake of nutrients and water by crop roots. The model is derived from the *Barber-Cushman* model with a mobile boundary modification (time-varying domain). In the equations of this model the transport of nutrients is coupled to the transport of water, which follows a model derived from the one-dimensional equation of *Richards* also with moving boundary. It is expected that when coupling the transports, differences will be appreciated in the nutrient intake due to a more realistic representation of the convective transport. This model was validated with data from experimental works estimating the nutrient intake and the input parameters required for the model. It was verified that the nutrient intakes simulated with the simultaneous model are closer to the experimentally estimated intakes, than the estimated with the model that only considers nutrient intake, under two conditions: i) when there is high availability of nutrients (addition of fertilizer) and ii) For highly mobile nutrients.

Keywords: simultaneous nutrient and water intake, mobile boundary, non-linear equations.

I. INTRODUCCIÓN

Los modelos de nutrientes y agua en el suelo son de interés tanto en la comunidad científica como para la producción agrícola; en el estudio de la relevancia de los factores ambientales y agrícolas en el crecimiento y desarrollo de diferentes especies de cultivos y en los efectos de la actividad humana en el ambiente. Desde la década de 1970 se comienzan a publicar trabajos que tienen como objetivo la estimación de la toma de nutrientes por raíces de culti-

vos. Se destacan los trabajos de *Claasen y Barber* [1], y de *Cushman* [2]. De estos trabajos se deriva el modelo de Barber-Cushman, ampliamente utilizado en la actualidad. Este modelo teórico consta esencialmente de la descripción del transporte de iones en el entorno de la raíz, derivada de una ecuación de continuidad, y la mecánica de toma de los mismos por la raíces, descrita por la cinética de *Michalis-Menten* [3]. Para el cálculo de la toma total de nutrientes se utiliza una versión simplificada de la fórmula propuesta por *Reginato y Tarzia* [4]. El sistema de estudio es una planta que crece en un volumen fijo de suelo, como en

Correspondencia: mbettera@famaf.unc.edu.ar

macetas. Para ello se realiza una aproximación de Frontera Móvil donde se toma una unidad de longitud de raíz y el volumen promedio de suelo que tiene disponible la misma. Se suponen condiciones ambientales constantes, como sucedería si se controlan en una cámara de siembra. También se supone que el transporte más relevante sucede en el entorno de la raíz y que las raíces están uniformemente distribuidas en el suelo. Esto lleva a poder representar el sistema como una única raíz cilíndrica, independientemente de su orientación, con un entorno cilíndrico concéntrico de suelo, y reducir el problema a uno radial. Debido al crecimiento de las raíces el dominio donde se integran las ecuaciones cambia en el tiempo, se considera un modelo de crecimiento de raíz, y teniendo en cuenta que el volumen del suelo es constante (en una maceta), se deriva una expresión de frontera móvil. Los problemas de frontera móvil han sido ampliamente estudiados por *Tarzia* [5, 6] e introducidos en el problema de transporte en el entorno de raíces por *Reginato et al.* [7].

En este trabajo se estudia el modelo de toma simultánea de agua y nutrientes presentado en [8]. En modelos previos del problema de toma de nutrientes los parámetros de humedad en el suelo y del flujo de agua se consideran parámetros fijos. En este modelo se incorpora el transporte de agua acoplado al transporte de nutrientes en el entorno de la raíz, con la formulación expuesta por *Blengino et al.* [9], que describe el transporte de agua a partir de una ecuación de continuidad y la mecánica de toma de agua por la raíz se representa con la función de *Feddes et al.* [10].

La introducción de un modelo de toma de nutrientes y agua acoplados tiene por objetivo describir de forma más realista la física del transporte de nutrientes en el suelo, además de contar con una herramienta que permita estimar ambas tomas simultáneamente. En este trabajo se compara las tomas simuladas con el modelo propuesto de toma simultánea, con las simuladas con el modelo previo (sin acople con la toma de agua) [7], y con las tomas estimadas experimentalmente en dos trabajos previos [11, 12]. Se encuentra una mejora en la estimación de las tomas con el nuevo modelo respecto del anterior; notoriamente los casos donde se observa una mejor estimación de la toma experimental son los de alta disponibilidad de nutrientes (suelo con adición de fertilizante) y de nutrientes de mayor movilidad.

II. FORMULACIÓN

Se estima simultáneamente la toma de agua y de nutrientes, considerandose transportes de nutrientes y agua acoplados en un dominio móvil, que modela la variación de la distribución de suelo en el entorno de las raíces a medida que crecen las mismas [8]. El modelo de transporte de agua es debido a *Blengino et al.* [9]; mientras el transporte de nutrientes se deriva de los propuestos en [7, 13], modificado para incluir el acople con el transporte de agua. Debido a esto la cantidad volumétrica de agua en suelo, $\theta(\psi)$, y la velocidad del flujo de agua, $v(\psi) = K(\psi)\partial\psi/\partial r$, dependen del transporte de agua, son funciones del potencial mátrico, $\psi(r, t)$, en lugar de ser consideradas constantes como

en modelos previos más simples [1, 2, 7].

Las mecánica de transporte entonces, obedece las siguientes ecuaciones diferenciales acopladas en un dominio variable [5].

$$C_h(\psi(r, t)) \frac{\partial \psi}{\partial t}(r, t) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r K(\psi(r, t)) \frac{\partial \psi}{\partial r}(r, t) \right] \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [(\theta(\psi) + b)C(r, t)] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[D f \theta(\psi) r \frac{\partial}{\partial r} C(r, t) + r K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial r}(r, t) \theta(\psi) C(r, t) \right] \quad (2)$$

donde C es la concentración de nutrientes, ψ el potencial mátrico, θ la cantidad volumétrica de agua, D el coeficiente de difusión del nutriente en agua, f el coeficiente de tortuosidad del suelo. Finalmente la conductividad hidráulica $K(\psi)$ y la capacidad hídrica diferencial $C_h(\psi)$ tiene formas funcionales dadas por el modelo de retención hídrica utilizado, en este caso el de *Brook-Corey* [14]. El dominio variable está definido por una frontera móvil que surge de considerar el volumen neto de suelo constante y un modelo de crecimiento de raíz $l(t)$ (lineal o exponencial según los resultados experimentales con los que se compara):

$$R(t) = \sqrt{\frac{l_0}{l(t)}(R_0 - s_0)^2 + s_0^2} \quad (3)$$

donde l_0 es la longitud de raíz inicial, $l(t)$ la longitud de raíz en función del tiempo (que puede crecer lineal o exponencialmente según especie), R_0 la semidistancia entre ejes de raíces (depende del volumen total del sistema) y s_0 es el radio de la raíz. En la Fig. 1 se presenta un esquema del dominio.

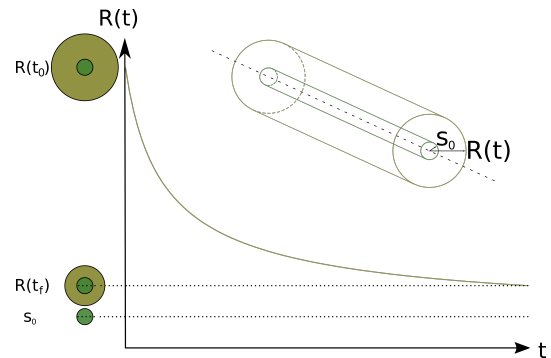


Figura 1: Esquema del dominio de problema de la frontera móvil. En este caso el crecimiento de la raíz sigue un modelo lineal.

Las condiciones iniciales de concentración de nutrientes y potencial mátrico en el suelo utilizadas fueron:

$$\psi(r, 0) = \psi_0, \quad (4)$$

$$C(r, 0) = C_0 r^{Pe} \quad (5)$$

que surgen de suponer humedad homogénea en el suelo y un perfil de distribución de nutrientes estudiado con soluciones asintóticas (soluciones estacionarias en un dominio dominio (s_0, ∞)), obtenidas por *Roose et al.* [13], donde $Pe = s_0 v_0 / (\theta D f)$ es el número de *Péclet*. La mecánica de toma de agua por las raíces está determinada por la

función de Feddes [15], que determina la condición de contorno interior del flujo de agua:

$$2\pi s_0 K(\psi(s_0, t)) \frac{\partial \psi}{\partial r}(s_0, t) = G(\psi), \quad (6)$$

mientras que la condición de contorno interna del flujo de nutrientes está dada por la cinética de Michaelis-Menten [3]:

$$Df \frac{\theta(\psi(s_0, t))}{r} \frac{\partial}{\partial r} C(s_0, t) + rv(\psi(s_0, t))C(s_0, t) = J_{max} [C(s_0, t) - C_u] / [K_m + (C(s_0, t) - C_u)] \quad (7)$$

Las condiciones de contorno externas en los flujos tienen en cuenta la competencia entre raíces:

$$\psi(t, R(t)) = \psi_0 \quad (8)$$

$$Df \theta(\psi) \frac{\partial C}{\partial r}(t, R(t)) + rv(\psi)C_L(t, R(t)) = 0 \quad (9)$$

Es importante notar que debido a la frontera móvil, y a la ecuación de transporte de agua, el problema es no lineal. Las ecuaciones se integraron con un paquete de software de elementos finitos con mallado temporal adaptativo (FlexPDE) [15].

III. METODOLOGÍA Y RESULTADOS

Se realizaron simulaciones de la toma simultánea de agua y nutrientes (en este trabajo nitratos, fósforo y potasio) y la toma desacoplada de nutrientes, para cuatro especies diferentes: una arbórea (álamo), con crecimiento de raíz lineal, y tres gramíneas (remolacha azucarera, maíz y trigo), con crecimiento exponencial. Los parámetros de entrada para las simulaciones se obtuvieron de las estimaciones experimentales de [11] (álamo) y [12] (remolacha azucarera, maíz y trigo).

En la Fig. 2 se muestra un análisis de sensibilidad del modelo con los parámetros de entrada. Se observa que el parámetro que más influye es la semidistancia inicial entre raíces (R_0), esto es así ya que este parámetro está asociado al volumen del sistema. Dos parámetros que se observan con gran influencia son la concentración inicial de nutrientes (C_0) y el poder buffer del suelo (b). Estos dos parámetros están asociados con la disponibilidad de nutrientes en el la fase líquida y sólida del suelo respectivamente, por lo que es trivial una dependencia importante de la toma. El radio inicial de raíz (s_0) es un parámetro que varía mucho la toma, principalmente al hacerlo menor, esto se debe que inicialmente la superficie de la raíz es mayor con menor s_0 , y menor con mayor s_0 por ser el volumen total constante. La variación de la tasa de crecimiento de raíces (k), con factores entre 0,5 y 2, varía poco la toma, alrededor de un 10%. De los parámetros propios del modelo de agua se puede observar que los dos parámetros asociados a la toma máxima de la función de Feddes son lo que más influyen en la variación de la toma de nutrientes, aunque sólo dentro de un 20%.

En la Tabla 1 se muestran errores relativos de las simulaciones con este modelo (MBWN) y modelo Barber-Cushman (desacoplado)(MBN) respecto de las estimacio-

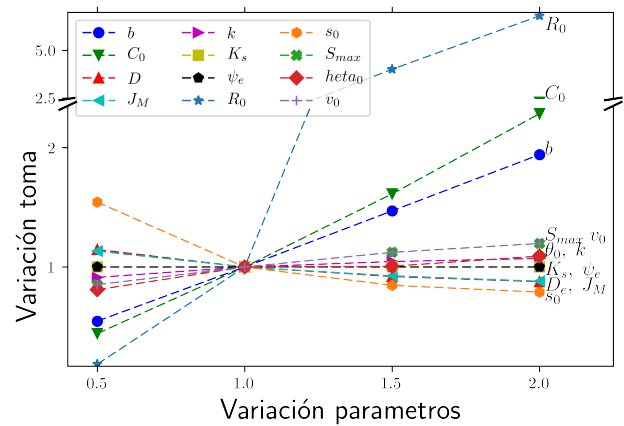


Figura 2: Análisis de sensibilidad paramétrica en la toma de nutrientes. Se muestra como varía la toma simulada de nutrientes U cuando se varía en el 50%, 150% y 200% los parámetros de entrada del modelo.

nes experimentales. Para analizar los resultados es importante diferenciar los casos en cuanto al tipo nutriente y disponibilidad de nutrientes. En los casos donde no hay agregado de fertilizante hay baja disponibilidad de nutrientes en el suelo. En estos casos el considerar que la toma de agua es dinámica no da tan buenos resultados como al considerar el agua en forma estacionaria. Esto se debe a que el efecto principal del acople es una mayor importancia del flujo advectivo, que en el caso de baja disponibilidad no es correcto; mientras en los casos de alta disponibilidad, se obtienen resultados más cercanos a las estimaciones experimentales con el modelo dinámico. Por otro lado, se deben diferenciar los nutrientes más móviles, como nitratos y potasio, del fósforo que es un ión poco móvil. El modelo no da buenos resultados para el fósforo, debido a la baja movilidad del fósforo, por lo que suponemos que su comportamiento puede estar fuera de alcance de este modelo.

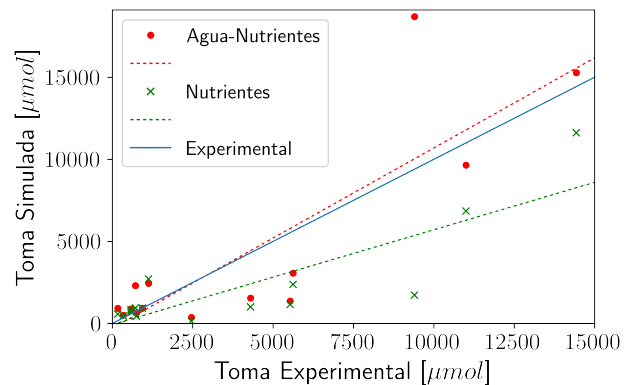


Figura 3: Comparación de Tomas Simuladas y Experimentales: Se ajustaron los puntos de las tomas simuladas por este modelo y dos previos vs. la toma experimental en todos los casos estudiados en este trabajo.

Se comparan, en la Fig. 3 las tomas calculadas de nutrientes, acopladas y la desacopladas con las tomas de agua, con la toma de nutrientes estimada experimentalmente en estos trabajos; se grafican las tomas de nutrientes

Tabla 1: Error relativo de las tomas de nutrientes simuladas.

Fertilizante	Especie	Nutriente	MBWN (ErrR %)	MBN ErrR %
0 Kg	álamo	K	-2,21	-0,33
		NO ₃	-0,47	0,30
		P	-4,44	-2,36
75 Kg	álamo	K	0,64	0,76
		NO ₃	0,12	0,38
		P	-0,53	-0,43
150 Kg	álamo	K	0,46	0,58
		NO ₃	0,06	0,19
		P	-0,99	0,82
0 Kg	Maíz	K	-0,37	-0,21
	Trigo	K	0,15	0,41
	Remolacha	K	0,85	0,94
250 kg	Maíz	K	-1,17	-1,41
	Trigo	K	0,01	-0,01
	Remolacha	K	0,75	0,79

Resultados de las simulaciones realizadas con los modelos de Agua-Nutrientes acoplados con frontera móvil MBWN y de nutrientes con frontera móvil (desacoplado) MBN. En la tabla se muestran los errores relativos ($ErrR = (V_{exp} - V_{sim})/V_{exp}$) de las simulaciones respecto a las estimaciones experimentales realizadas por Kelly et al.[11] (álamo) y Samal et al.[12] (Maíz, Trigo y Remolacha).

simuladas con el modelos acoplado y desacoplado, en función de la toma experimental para cada caso considerado. A modo de guía, en la gráfica se encuentra una recta de pendiente 1, que se refiere a la toma experimental; también se encuentran los ajustes lineales de las tomas simuladas en función de las experimentales. Se puede observar que el modelo de toma simultáneas es, en los casos considerados, el que más se acerca a las tomas experimentales.

IV. CONCLUSIONES

El modelo de toma simultánea de agua y nutrientes representa un avance en la descripción física del transporte de nutrientes y agua en el suelo, respecto de los modelos que sólo consideran difusión de nutrientes de forma rigurosa con el de Barber-Cushman. Se incorporó con este modelo una descripción más realista del transporte por advección, sin complejizar demasiado el modelo previo. Los resultados fueron favorables en los casos donde se esperaba que el efecto advectivo tenga más influencia, en los casos de nutrientes de alta movilidad y en los casos de alta disponibilidad de nutrientes en el suelo. Se observa además que el fósforo, por ser un ión de baja movilidad, queda fuera del alcance de este modelo.

V. APÉNDICE: Nomenclatura

$r[cm]$	Distancia al eje radical.
$t[s]$	Coordenada temporal.
$s_0[cm]$	Radio de raíz inicial.
$R(t)[cm]$	Semidistancia entre raíces. Frontera móvil.
$R_0[cm]$	Semidistancia inicial.

$l(t)[cm]$	Largo de raíz
$l_0[cm]$	Largo inicial de raíz
$\psi[cmH_2O]$	Potencial mátrico
$\theta(\psi)[adim.]$	Contenido volumétrico de agua.
$C_h(\psi)[cm^{-1}]$	Capacidad diferencial de retención hídrica
$K(\psi)[cm^2 s^{-1}]$	Conductividad hidráulica
$K_s[cm^2 s^{-1}]$	Conduc. hidráulica de saturación.
$G(\psi)[cm^2 s^{-1}]$	Función de toma de agua de Feddes.
$S_{max}[cm^2 s^{-1}]$	Toma máxima de agua.
$\psi_e[cmH_2O]$	Escala del potencial mátrico.
$C(r, t)[\mu mol cm^3]$	Concentración de nutrientes. de nutrientes en disolución
$v(\psi)[cm s^{-1}]$	Velocidad del flujo de agua
$D[cm^2 s^{-1}]$	Coefficiente de difusión
$b[adim.]$	Poder buffer
$Pe[adim.]$	Número de Péclet

VI. REFERENCIAS

- [1] N. Claassen and S. Barber, *Agronomy J.* **68**, 961 (1976).
- [2] J. H. Cushman, *Soil Sci. Soc. Am J* **43**, 1087 (1979).
- [3] S. A. Barber, *Soil Nutrient Bioavailability* (John Wiley and sons, 1995).
- [4] J. Reginato and D. Tarzia, *Comm. in Soil Science and Plant Analysis* **33**, 821 (2002).
- [5] D. Tarzia, *MAT-Serie A 2* (2000).
- [6] D. Tarzia, *Mass Diffusion* (Intech, 2010), chap. Explicit and approximated solutions for heat and mass transfer problems with a moving interface.
- [7] J. Reginato, M. Palumbo, I. Moreno, I. Bernardo, and D. Tarzia, *S.S.S.A.J.* **64**, 1363 (2000).
- [8] J. Reginato, J. Blengino Albrieu, M. Bettera, and D. Tarzia, *Anales AFA* **25**, n°1, 21 (2013).
- [9] J. Blengino, J. Reginato, and D. Tarzia, *Applied mathematical modelling* **39**, 3434 (2015), Tesis de Doctoral.
- [10] R. Feddes, P. Kowalik, and H. Zaradny, *Simulation of field water use and crop yield* (Centre for Agricultural Publishing and Documentation, Wageningen, Netherlands, 1978).
- [11] J. Kelly and T. Ericsson, *Forest Ecology and Management* **180**, 249 (2002).
- [12] D. Samal et al., *Plant Soil* **332**, 105 (2010).
- [13] T. Roose, A. Fowler, and P. Darrah, *J. of Mathematical Biology* **42**, 347 (2001).
- [14] R. H. Brooks and A. T. Corey, Hydrology Paper No. 3, Colorado State Univ (1964).
- [15] J. Blengino, *Modelo macroscópico de toma de agua por raíces acoplada con crecimiento*, PhD thesis, Universidad Nacional de Rosario, 2014.