ISSN (EN LINEA): 1850 - 1158

EXTENSIÓN SUPERSIMÉTRICA DE LA GRAVEDAD TOPOLÓGICA MASIVA EN (2+1) DIMENSIONES

SUPERSYMMETRIC EXTENSION OF THE TOPOLOGICALLY MASSIVE (2+1) GRAVITY.

C.L. Abecasis[1], C.E. Repetto[1,2 *] y O.P. Zandron[1,2]

[1] Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura – UNR,
[2] Instituto de Física Rosario – CONICET
27 de Febrero 210 bis - (2000) -Rosario - Argentina
e-mail: repetto@ifir.edu.ar

Se construye el formalismo de segundo orden de la extensión supersimétrica de la gravedad topológica masiva en tres dimensiones. La parte fermiónica es la suma de la acción de Rarita-Schwinger (dinámicamente trivial) y de un término topológico invariante de gauge, con derivadas de segundo orden, análogo al gravitatorio. Se introduce la transformación de Ostrogradski para definir los momentos canónicos. Se computa el conjunto de vínculos primera y segunda clase, los cuales verifican el álgebra de vínculos. Se escribe el Hamiltoniano total generador de las evoluciones temporales.

Palabras clave: Formalismo Hamiltoniano, Supergravedad, Topología

The second order canonical formalism for the supersymmetric extension of the topologically massive 2+1 gravity theory is constructed. This model containing the Chern-Simons term is a higher derivative one, so, in order to define canonical momenta, the Ostrogradski transformation is introduced. The set of first and second class constraints, which verify the constraint algebra, are explicitly computed, and the total Hamiltonian, generator of the time evolution of the system, is written.

Keywords: Hamiltonian Formalism, Supergravity, Topology

I. INTRODUCCIÓN

En los últimos años, distintas teorías de campo cuántica de la gravedad y supergravedad en (2+1) dimensiones han sido investigadas con creciente interés. Distintos problemas interesantes se presentan en la Física plana (2+1) dimensional [1,2].

La gravedad o la supergravedad en (2+1) dimensiones pueden describirse por una teoría gauge de Chern-Simons del grupo de Poincaré ISO(2,1) o el grupo de de Sitter [3]. En particular, las supergravedades de Poincaré extendidas en (2+1) dimensiones como teorías gauge de Chern-Simons pueden ser obtenidas llevando a cabo una contracción de Inonu-Wigner del superálgebra de Lie del grupo de de Sitter Osp(1/2;C) o del grupo de anti de Sitter Osp(1/2;R)×Osp(1/2;R). La física plana (2+1) dimensional fue estudiada por mucho tiempo por distintos autores [1]. También existe interés matemático en variedades que son localmente planas pero topológicamente no triviales [4]. Además, en el marco de la gravedad (2+1) dimensional es posible investigar las interacciones gravitatorias en presencia de cuerdas cósmicas. Desde hace tiempo es bien conocido que la supergravedad de Poincaré (y conforme) en (2+1) dimensiones puede describirse por un término de Chern-Simons [5]. En Ref. [5] se estudia la extensión supersimétrica del término de Lorentz-Chern-Simons gravitatorio, y se muestra su importante rol en supergravedad.

Además, las teorías de Chern-Simons pura U(1) y SU(N) y la teoría topológicamente masiva en (2+1) dimensiones fueron cuantificadas por medio del formalismo de Dirac [6]. También fueron analizadas la estructura de vínculos y las propiedades de simetría del sistema dinámico. Así mismo se investigó la unitariedad y la posible renormalización de la teoría de supergravedad topológicamente masiva en tres dimensiones [7]. El conteo de potencia fue realizado, y la teoría a un loop resulta finita. Esto es un hecho interesante, sin embargo la renormalizabilidad requiere no sólo de un correcto conteo de potencias sino una regularización concreta que asegure que no aparezcan anomalías.

Los sistemas dinámicos descriptos en función de altas derivadas han sido estudiados por muchos autores y constituye un problema interesante de investigación actual en teoría de campos cuánticos. Otra motivación para considerar esta clase de teorías se debe al hecho que la suma de términos con alta derivada en el Lagrangiano, puede servir para regularizar las divergencias ultravioletas en la teoría cuántica.

El descubrimiento de agujeros negros aumentó considerablemente el interés de modelos de gravedad (2+1) dimensionales. Sin embargo, es bien conocido que la relatividad general en (2+1) dimensiones no tiene ni grados de libertad propagantes ni límite Newtoniano. Una modificación físicamente interesante de la relatividad general (2+1) dimensional, que resuelve al menos algunos de estos inconvenientes, está dada por la adición del término de Chern-Simons gravitatorio al término usual de Einstein-Hilbert presente en la acción.

Esta teoría es usualmente llamada Gravedad Topológicamente Masiva (TMG) [1].

En un trabajo previo [8] se estudió, desde la métrica y desde las formas "dreibein", el formalismo de primer orden de la acción completa constituida por las acciones de Einstein no lineal y la de Chern-Simons con derivada de tercer orden. Para dar un marco geométrico de este modelo, se analizó la teoría de gravedad (2+1) topológicamente masiva desde punto de vista de variedades con estructura de grupo. Puesto que la teoría es formulada sobre el álgebra exterior, resulta naturalmente invariante bajo transformaciones de coordenadas (o difeomorfísmos). También se desarrolló el formalismo canónico exterior con el propósito de mostrar su conexión directa con el formalismo de los corchetes de Dirac. Este hecho es ventajoso cuando el modelo es cuantificado en el marco canónico. Hace algunos años, fue estudiado un modelo dinámica y topológicamente no trivial para la gravedad en tres dimensiones [1]. Su acción aumenta el término usual de Einstein por uno topológico. Aunque se conserva la invariancia local de coordenadas, el modelo representa una excitación masiva de spin 2.

En referencia [1], los autores muestran que existe una extensión natural localmente supersimétrica, y es invariante bajo las transformaciones usuales de la supergravedad. La acción fermiónica es similar a la acción gravitatoria. La parte de Rarita-Schwinger es también trivial, pero cuando se le suma el término fermiónico topológico (con derivada de segundo orden), el sistema describe una excitación masiva, causalmente propagante de spin 3/2 que acompaña al gravitón. Por lo tanto, el objetivo es estudiar la extensión supersimétrica de la gravedad topológicamente masiva tridimensional. Se construye directamente el formalismo de segundo orden, teniendo en mente la presencia de los términos de alta derivada en el modelo.

El formalismo Hamiltoniano de segundo orden será no trivial debido a la presencia de los términos en segunda derivada en la densidad Lagrangiana. En los casos de los términos carentes de altas derivadas esto es resuelto mediante una integración parcial. Debido a la presencia de la forma de Lorentz-Chern-Simons, en un formalismo de segundo orden no es posible obtener una acción que contenga solamente derivadas primeras del tiempo sobre los "dreibeins". Para eliminar las altas derivadas del tiempo un truco conveniente es considerar la transformación de Ostrogradski [9-11] para poder introducir los momentos canónicos. También en [12] se analizó el problema de la presencia de derivadas de orden impar, es decir, Chern-Simons en D=3.

II. PRELIMINARES Y DEFINICIONES

El punto de partida es considerar las relaciones de (anti) conmutación del superálgebra y las dos formas curvatura en tres dimensiones. El superálgebra en tres dimensiones está compuesta por generadores de Lorentz $\mathcal{M}_{ab}\left(a,b=1,2,3\right)$, las traslaciones P_a, más los generadores impares (supersimetría) $Q^\alpha\left(\alpha=1,2\right)$. Entonces, se obtiene el superálgebra tridimensional dada por las siguientes relaciones de (anti)conmutación:

$$\left[M_{ab},M_{cd}\right]=\eta_{bc}M_{ad}+\eta_{ad}M_{bc}-\eta_{ac}M_{bd}-\eta_{bd}M_{ac} \quad (2.1)$$

$$\left[M_{ab},P_c\right]=\eta_{bc}P_a-\eta_{ac}P_b \quad (2.2)$$

$$\left[Q^\alpha,M_{ab}\right]=\frac{1}{2}\left(\tau_{ab}\right)^\alpha_{\ \beta}Q^\beta \quad (2.3)$$

$$\left\{Q^\alpha,Q^\beta\right\}=-2\left(\tau^a C^{-1}\right)^{\alpha\beta}P_a \quad (2.4)$$

En el formalismo geométrico de primer orden la dinámica es descripta por los campos 1-formas $\mu^B=\left(V^a,\omega^{ab},\psi^\alpha\right)$, donde el índice compuesto B toma valores en el rango vectorial *a*, en el rango tensorial *ab* y en el rango espinorial α. Los campos V^a,ω^{ab} y ψ^α son el "dreibein", la conexión espinorial de Lorentz y el gravitino, respectivamente. Las 2-formas $d\mu^B$ juegan el rol de velocidades. Las 2-formas curvatura correspondientes a los campos anteriores son llamadas $R^B=(R^a,R^{ab},\rho^\alpha)$, y están definidas por:

$$R^a=dV^a+\omega^{ab}\wedge V_b-\frac{i}{2}\bar\psi\gamma^a\psi \quad (2.5)$$

$$R^{ab}=d\omega^{ab}+\omega^{ac}\wedge\omega_c^{\ b} \quad (2.6)$$

$$\rho\left(\psi\right)=d\psi+\frac{1}{4}\omega^{ab}\wedge\tau_{ab}\psi+V^a\wedge\tau_a\psi \quad (2.7)$$

Se usarán las matrices pseudo-Pauli reales $\tau^a\left(\tau^0=i\sigma^2,\ \tau^1=\sigma^3,\tau^2=\sigma^1\right)\left(a=0,1,2\right)$ que satisfacen el álgebra $\tau^a\tau^b=\eta^{ab}+\varepsilon^{abc}\tau_c$ con $\eta^{ab}=(-1,1,1)$, ε_{abc} es el tensor alternante en el espacio tangente, $\varepsilon_{012}=+1$ y τ^{ab} está definido por $\tau^{ab}=\left[\tau^a,\tau^b\right]=2\varepsilon^{abc}\tau_c$.

III. DENSIDAD LAGRANGIANA SUPERSIMÉTRICA

El punto de partida es considerar la extensión supersimétrica de la gravedad topológica masiva tridimensional. Se define la acción por medio de una densidad Lagrangiana que contiene términos en altas derivadas:

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_E+\mathcal{L}_{3/2}+\mathcal{L}_{CS}+\mathcal{L}_{TF} \quad (3.1)$$

donde $\mathcal{L}_E$ es el usual término de Einstein-Hilbert, el cual juega el rol de término de masa, y viene dado por:

$$\mathcal{L}_E=-R=\frac{1}{2}L_{\mu a}R_{\nu\rho bc}\varepsilon^{abc}\varepsilon^{\mu\nu\rho} \quad (3.2)$$

donde R es la curvatura escalar, $L_{\mu a}$ son las componentes del "dreibein" en la base holonómica $\left(V^a={}^3L^a_\mu dx^\mu\right)$ y $\omega_{\mu ab}$ son la componentes de la conexión espinorial.

El término gravitacional de Chern-Simons es un término en alta derivada, y es visto como un término cinético:

$$\mathcal{L}_{CS}=\partial_\mu\omega_{\nu ab}\,\omega^{ab}_\rho\,\varepsilon^{\mu\nu\rho}-\frac{2}{3}\omega^{ab}_\mu\,\omega^c_{\nu b}\,\omega_{\rho ca}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho} \quad (3.3)$$

La parte fermiónica es suma del término de Rarita-Schwinger y un término topológico gauge invariante, de segundo orden en la derivada y análogo al término gravitacional:

$$\mathcal{L}_{3/2} = i\bar{\psi}_\mu \partial_\nu \psi_\rho \varepsilon^{\mu\nu\rho} + i\bar{\psi}_\mu\, \omega_{\nu ab} \tau_c\, \psi_\rho\, \varepsilon^{abc} \varepsilon^{\mu\nu\rho} \quad (3.4)$$

$$\mathcal{L}_{TF} = D_\alpha \bar{\psi}_\beta\, \tau_a \tau_b\, D_\rho \psi_\sigma\, L_{\nu a} L_{\mu b}\, \varepsilon^{\mu\alpha\beta} \varepsilon^{\nu\rho\sigma} \quad (3.5)$$

donde ψ es un espinor de Majorana, y la derivada covariante está definida por:

$$D_\mu \psi_\nu = \partial_\mu \psi_\nu + \omega_{\mu ab}\, \tau_c \psi_\nu\, \varepsilon^{abc} \quad (3.6)$$

Las expresiones explícitas, en componentes, para las tres curvaturas (2.7)-(2.9), son:

$$R_{\mu\nu}{}^{ab} = \partial_\mu \omega_\nu{}^{ab} + \omega_\mu{}^{ac} \omega_{\nu c}{}^{b} \quad (3.7)$$

$$R_{\mu\nu}{}^{a} = \partial_\mu L_\nu^a + \omega_\mu{}^{ab} L_{\nu b} - \frac{i}{2} \bar{\psi}_\mu \tau^a \psi_\nu \quad (3.8)$$

$$\bar{\rho}_{\mu\nu}^{(\alpha)} = \partial_\mu \psi_\nu{}^{(\alpha)} - \frac{1}{2}\left(\bar{\psi}_\mu \tau_{ab}\right)^{(\alpha)} \omega_\nu{}^{ab} \quad (3.9)$$

Nótese que se usan los índices griegos $\mu, \nu, ... = 0,1,2$ para el tensor espacio-tiempo (índices de universo) y los índices latinos $i, j, ... = 1,2$ para rotular solo las componentes espaciales. También consideramos el tensor métrico ${}^{(3)}g_{\mu\nu}$ descompuesto de acuerdo a [13].

Así, la densidad Lagrangiana resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = &\left(\partial_\mu L_{\nu a} \omega_{\rho bc} + \omega_{\mu a}{}^{d} \omega_{\nu db} L_{\rho c}\right) \varepsilon^{abc}\, \varepsilon^{\mu\nu\rho} \\ &+ \left(\partial_\mu \omega_{\nu ab} \omega_\rho{}^{ab} - \frac{2}{3} \omega_\mu{}^{ab} \omega_{\nu b}{}^{c} \omega_{\rho ca}\right) \varepsilon^{\mu\nu\rho} \\ &+ i\bar{\psi}_\mu \partial_\nu \psi_\rho \varepsilon^{\mu\nu\rho} + i\bar{\psi}_\mu \omega_{\nu ab} \tau_c\, \psi_\rho\, \varepsilon^{abc} \varepsilon^{\mu\nu\rho} \\ &+ i\, D_\mu \bar{\psi}_\nu\, \tau^a \tau^b\, D_\tau \psi_\sigma\, L_{\gamma a} L_{\rho b}\, \varepsilon^{\gamma\tau\sigma} \varepsilon^{\mu\nu\rho} \end{aligned} \quad (3.10)$$

IV. FORMALISMO HAMILTONIANO DE SEGUNDO ORDEN

Partiendo ahora de la densidad Lagrangiana (3.11) puede construirse el formalismo de segundo orden, que se obtiene considerando la siguiente ecuación de movimiento (el vínculo sobre la curvatura fuertemente cero):

$$R_{\mu\nu}^{a} = 0 \quad (4.1)$$

Utilizando la ecuación (3.8) para esta curvatura, puede obtenerse:

$$\begin{aligned} \omega_{\mu ab}(V) = &\frac{1}{2} L_a^\nu \left(\partial_\mu L_{\nu b} - \partial_\nu L_{\mu b}\right) \\ &- \frac{1}{2} L_b^\nu \left(\partial_\mu L_{\nu a} - \partial_\nu L_{\mu a}\right) \\ &- \frac{1}{2} L_a^\rho L_b^\sigma \left(\partial_\rho L_{\sigma c} - \partial_\sigma L_{\rho c}\right) L_\mu^c \\ &+ \frac{1}{4}\left(\bar{\psi}_\mu \tau_a \psi_b - \bar{\psi}_\mu \tau_b \psi_a + \bar{\psi}_a \tau_\mu \psi_b\right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

En consecuencia, una vez que la ecuación (4.2) es utilizada para eliminar como variable dinámica independiente al $\omega_{\mu ab}\left(L, \psi\right)$, la densidad Lagrangiana sólo depende del campo gravitón ${}^{3}L_{a\mu}$ y del campo gravitino $\bar{\psi}_\mu$.

La densidad Lagrangiana (3.11) contiene derivadas segundas del tiempo sobre las componentes del "dreibein", y debido a la forma del término de Lorentz-Chern-Simons no es posible eliminarla por integración parcial. Por consiguiente, se está en presencia de un sistema Hamiltoniano vinculado con un Lagrangiano singular de alto orden, en el marco del formalismo de Dirac.

Por lo tanto, para introducir los momentos canónicos en esta teoría con alta derivada, se considera la transformación de Ostrogradski [10,11]. En estos trabajos, se desarrolló el formalismo canónico para un sistema Hamiltoniano vinculado con Lagrangiano singular de alto orden. Esto se lleva a cabo via el estudio del primer teorema de Noether. Siguiendo los pasos dados en aquellos trabajos, se aplicarán las mismas ideas para construir el formalismo canónico para este modelo. Además, se trabajará lo más cercano posible a las conjeturas de Dirac. Como en los sistemas Hamiltonianos vinculados usuales, los pasos a seguir son los siguientes:

(*i*) A partir del formalismo de Lagrangiano se calculan los vínculos primarios y por lo tanto puede escribirse el Hamiltoniano total.

(*ii*) Luego, se buscan los vínculos secundarios imponiendo consistencia sobre los primeros.

(*iii*) Analizando el conjunto completo de vínculos, se determinan los vínculos primera clase, que corresponden a invariancias de gauge del sistema. Finalmente, los corchetes de Dirac son definidos a partir de los corchetes de Poisson, y los vínculos segunda clase son eliminados tomándolos fuertemente a cero.

Se comienza definiendo las variables de campo dinámicas independientes: ${}^{3}L_{a\mu}$, $B_{a\mu} = \partial_0\, {}^{3}L_{a\mu}$ y $\bar{\psi}_\mu$.

La transformación de Ostrogradski introduce respectivamente los siguientes momentos canónicos:

$$\overset{(1)}{\Pi}{}_c^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{L}_\mu^c} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\nu \dot{L}_\mu^c\right)} \quad (4.3)$$

$$\overset{(2)}{\Pi}{}_c^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0 \dot{L}_\mu^c\right)} \quad (4.4)$$

$$\Pi^\mu\left(\psi\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}_\mu} \quad (4.5)$$

Los corchetes de Poisson para las variables canónicas conjugadas están dados por:

$$\left[{}^{3}L_\mu^a(x), \overset{(1)}{\Pi}{}_c^\nu(y)\right] = -\left[\overset{(1)}{\Pi}{}_c^\nu(y), {}^{3}L_\mu^a(x)\right] = \delta_c^a \delta_\mu^\nu \delta(x\!-\!y) \quad (4.6)$$

$$\left[B_\mu^a(x), \overset{(2)}{\Pi}{}_c^\nu(y)\right] = \left[\overset{(2)}{\Pi}{}_c^\nu(y), B_\mu^a(x)\right] = \delta_c^a \delta_\mu^\nu \delta(x\!-\!y) \quad (4.7)$$

$$\left[\bar{\psi}_\mu^{(\alpha)}(x), \Pi_{(\beta)}^\nu(y)\right] = \left[\Pi_{(\beta)}^\nu(y), \bar{\psi}_\mu^{(\alpha)}(x)\right] = \delta_{(\beta)}^{(\alpha)} \delta(x\!-\!y) \quad (4.8)$$

Utilizando estas definiciones podemos pasar a la descripción Hamiltoniana de este sistema vinculado en altas derivadas. Por cálculo directo los momentos canónicos conjugados resultan:

$$\overset{(1)}{\Pi}{}_c^0 = -\left(\partial_i L^{0a} - \partial^0 L_i^a\right) \omega_{jac} \varepsilon^{0ij} + \partial_i \overset{(2)}{\Pi}{}_c^i \quad (4.9)$$

$$
\begin{aligned}
\overset{(1)}{\Pi}{}^i_c &= \omega_j{}^{ab}\varepsilon_{abc}\varepsilon^{0ij} + \left(\partial_j L^{ia} - \partial^i L^a_j\right)\omega_{kca}\varepsilon^{0jk} \\
&-B^{0a}\omega_{jac}\varepsilon^{0ij} - \frac{1}{2}L^{\varepsilon}_a L^{\sigma}_b\left(\partial_\varepsilon L^c_\sigma - \partial_\sigma L^c_k\right)\omega_j{}^{ab}\varepsilon^{0ij} \\
&+\partial_j L_{\nu a}\frac{\partial\omega_{\rho be}}{\partial B_i{}^c}\varepsilon^{j\nu\rho}\varepsilon^{abe} + 2\frac{\partial\omega_{\mu a}{}^d}{\partial B_i{}^c}\omega_{\nu db}L_{\rho e}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\varepsilon^{abe} \\
&-2\frac{\partial\omega_\mu{}^{ab}}{\partial B_i{}^c}\omega_{\nu b}{}^e\omega_{\rho ea}\varepsilon^{\mu\nu\rho} + i\bar{\psi}_\mu\frac{\partial\omega_{\nu ab}}{\partial B_i{}^c}\tau_e\psi_\rho\varepsilon^{\mu\nu\rho}\varepsilon^{abe} \\
&+i\frac{\partial}{\partial B_i{}^c}\left(\mathcal{D}_\mu\bar{\psi}_\nu\tau^a\tau^b\mathcal{D}_\tau\psi_\sigma\right)L_{\gamma a}L_{\rho b}\varepsilon^{\gamma\tau\sigma}\varepsilon^{\mu\nu\rho} \\
&+\partial_j L^{ia}\omega_{kac}\varepsilon^{0jk} - \partial_j\left(L^0_a L^i_b L_{0c}\right)\omega_k{}^{ab}\varepsilon^{0jk} \\
&-\partial_k L^{0a}\omega_{0ac}\varepsilon^{0ik} - \partial_k\left(L^0_a L^i_b L_{jc}\right)\omega_0{}^{ab}\varepsilon^{0jk} \\
&-\partial_0\overset{(2)}{\Pi}{}^i_c
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

$$\overset{(2)}{\Pi}{}^0_c = 0 \tag{4.11}$$

$$\overset{(2)}{\Pi}{}^i_c = \left(\omega_j^{k0}\varepsilon^{0ij} + \omega_j^{i0}\varepsilon^{0kj}\right)L_{kc} \tag{4.12}$$

$$\Pi^0(\psi) = \frac{1}{2}\left(\tau_k\psi_i + \tau_i\psi_k\right)\omega_j^{0k}\varepsilon^{0ij} \tag{4.13}$$

$$
\begin{aligned}
\Pi^i(\psi) &= \frac{1}{2}\left(\tau_a\psi_b\omega_j^{ab}\varepsilon^{0ij} + \tau_a\psi_j\omega_k^{ia}\varepsilon^{0jk} + \tau_k\psi_a\omega_j^{ia}\varepsilon^{0jk}\right) \\
&+i\psi_j\varepsilon^{0ij} + iD_k\psi_\sigma\tau_\gamma\tau_j\varepsilon^{\gamma k\sigma}\varepsilon^{0ij}
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

En el cálculo, se utilizó la expresión de conexión ω_μ^{ab} como funcional de “dreibein” y del gravitino. El momento remante $\overset{(1)}{\Pi}{}^i_c$ depende de las velocidades.

Las relaciones entre campos y momentos independientes de las velocidades dan lugar a los siguientes vínculos primarios:

$$\overset{(1)}{\Phi}{}^0_c = \overset{(1)}{\Pi}{}^0_c + \left(\partial_i L^{0a} - \partial^0 L^a_i\right)\omega_{jac}\varepsilon^{0ij} - \partial_i\overset{(2)}{\Pi}{}^i_c \approx 0 \tag{4.15}$$

$$\overset{(2)}{\Phi}{}^0_c = \overset{(2)}{\Pi}{}^0_c \approx 0 \tag{4.16}$$

$$\overset{(2)}{\Phi}{}^i_c = \overset{(2)}{\Pi}{}^i_c - \left(\omega_j^{k0}\varepsilon^{0ij} + \omega_j^{i0}\varepsilon^{0kj}\right)L_{kc} \approx 0 \tag{4.17}$$

$$\Phi^0(\psi) = \Pi^0(\psi) - \frac{1}{2}\left(\tau_k\psi_i + \tau_i\psi_k\right)\omega_j^{0k}\varepsilon^{0ij} \approx 0 \tag{4.18}$$

$$
\begin{aligned}
\Phi^i(\psi) &= \Pi^i(\psi) - \frac{1}{2}\tau_a\psi_b\omega_j^{ab}\varepsilon^{0ij} \\
&+\frac{1}{2}\left(\tau_a\psi_k + \tau_k\psi_a\right)\omega_j{}^{ia}\varepsilon^{0jk} \\
&-i\psi_j\varepsilon^{0ij} - iD_k\psi_\sigma\tau_\gamma\tau_j\varepsilon^{\gamma k\sigma}\varepsilon^{0ij} \approx 0
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

donde el símbolo $\approx$ implica débilmente cero, ver Ref.[14]. Por medio de estos momentos el Hamiltoniano canónico queda definido por:

$$\mathcal{H}_{can} = B^c_\mu\overset{(1)}{\Pi}{}^\mu_c + \dot{B}^c_\mu\overset{(2)}{\Pi}{}^\mu_c - \dot{\bar{\psi}}_\mu\Pi^\mu(\psi) - \mathcal{L} \tag{4.20}$$

El campo B^a_μ no puede ser eliminado del formalismo cuando se trabaja con Lagrangianos con altas derivadas [11]. Una vez que el Lagrangiano (3.11) es utilizado, y se eliminan las velocidades $\dot{B}^a_\mu$ y $\dot{\psi}_\mu$, la expresión final para el $\mathcal{H}_{can}$ resulta:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_{can} &= 2B^{0b}B_i{}^a\omega_{jab}\varepsilon^{0ij} + B_i{}^b\partial_j\left(L^{ia}\omega_{kab}\right)\varepsilon^{0jk} \\
&-B_i{}^c\partial_j\left(L^{0a}L^{ib}L_{0c}\omega_{kab}\right)\varepsilon^{0jk} \\
&-B_i{}^c\partial_0\left(L^{0a}L^{ib}L_{jc}\varepsilon^{0jk}\right)\omega_{kab} + 2L^{ib}B_i{}^c\partial_j L^a_k\varepsilon_{abc}\varepsilon^{0jk} \\
&+L^c_j\omega_k^{bd}\left(B_{id}L^{ia} - B_i{}^a L^i{}_d - B_i{}^e L^{0a}L^i{}_d L_{0e}\right)\varepsilon_{abc}\varepsilon^{0jk} \\
&-\left(\omega_i{}^{ab}\partial_j\omega_{0ab} + \omega_0{}^{ab}\partial_i\omega_{jab} - 2\omega_0{}^{ab}\omega_{ib}{}^c\omega_{jca}\right)\varepsilon^{0ij} \\
&-4L^{ia}B_i{}^b\omega_{jb}{}^c\omega_{kca}\varepsilon^{0jk} \\
&+\omega_{idb}\left(\omega_{ja}{}^d L_{0c} - 2\omega_{0a}{}^d L_{jc}\right)\varepsilon^{abc}\varepsilon^{0ij} \\
&+\left(\partial_i L_{0a}\omega_{jbc} - \partial_i L_{ja}\omega_{0bc}\right)\varepsilon^{abc}\varepsilon^{0ij} \\
&+L^{kb}\left(\partial_i B_k{}^a - \partial_k B_i{}^a\right)\omega_{jab}\varepsilon^{0ij} \\
&-\frac{1}{2}L^{kb}L^{la}\left(\partial_k B_i{}^c - \partial_l B_k{}^c\right)L_{ic}\omega_{jab}\varepsilon^{0ij} \\
&-i\,\partial_i\bar{\psi}_\rho\psi_\mu\varepsilon^{\mu i\rho} - 2i\bar{\psi}_0\tau_c\psi_j\omega_{iab}\varepsilon^{abc}\varepsilon^{0ij} \\
&-i\bar{\psi}_j\tau_c\psi_i\omega_{0ab}\varepsilon^{abc}\varepsilon^{0ij} \\
&-2i\bar{\psi}_j\tau^c\psi_k L^{ia}B_i{}^b\varepsilon_{abc}\varepsilon^{0jk} \\
&-iB_i{}^g\omega_{0cd}\bar{\psi}_j\tau_e\tau_\gamma\tau_k\left(\tau^s\varepsilon_{0gs}\varepsilon^{\gamma i\sigma} + \right. \\
&\left.+\tau_s L_{lg}\varepsilon^{0is}\varepsilon^{\gamma l\sigma}\right)\psi_\sigma\varepsilon^{cde}\varepsilon^{0jk} \\
&-i\omega_{0cd}\bar{\psi}_i\tau_e\tau_\gamma\tau_j\mathcal{D}_k\psi_\sigma\varepsilon^{\gamma k\sigma}\varepsilon^{cde}\varepsilon^{0ij} \\
&+i\mathcal{D}_j\bar{\psi}_\mu\tau_\gamma\tau_\nu\mathcal{D}_k\psi_\sigma\varepsilon^{\gamma\sigma k}\varepsilon^{\mu\nu j} \\
&-iB_{ig}\bar{\psi}_j\tau_e\tau_\mu\tau_k\mathcal{D}_l\psi_\nu\left(L^g_0\varepsilon^{0ie} - \varepsilon^{ige}\right)\varepsilon^{\mu l\nu}\varepsilon^{0jk}
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

Finalmente, puede escribirse el Hamiltoniano extendido (cantidad dinámica primera clase):

$$H_T = \int d^2x\,\mathcal{H}_T \tag{4.22}$$

el cual es el generador evoluciones temporales de funcionales genéricos. La densidad $\mathcal{H}_T$ queda definida como:

$$\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_{can} + \overset{(1)}{\lambda}{}^c_0\overset{(1)}{\Phi}{}^0_c + \overset{(2)}{\lambda}{}^c_\mu\overset{(2)}{\Phi}{}^\mu_c + \bar{\delta}_\mu\Phi^\mu(\psi) \tag{4.23}$$

donde $\overset{(1)}{\lambda}{}^c_0$ y $\overset{(2)}{\lambda}{}^c_\mu$ son arbitrarios multiplicadores de Lagrange bosónicos, y $\bar{\delta}_\mu$ son arbitrarios multiplicadores de Lagrange fermiónicos.

Ahora debe continuarse con el algoritmo de Dirac e imponer las condiciones de consistencia sobre los vínculos de acuerdo a:

$$\Omega^{(k)} = \dot{\Omega}^{(k-1)} = \left[\Omega^{(k-1)}, H_T\right] \approx 0 \tag{4.24}$$

En consecuencia, para el vínculo bosónico $\overset{(2)}{\Phi}{}^0_c$ se encuentra el siguiente vínculo secundario:

$$\Omega^{(1)} = \dot{\overset{(2)}{\Phi}}{}^0_c = \left[\overset{(2)}{\Phi}{}^0_c , H_T \right]_{PB} = -\overset{(1)}{\Pi}{}^0_c + \partial_i \overset{(2)}{\Pi}{}^i_c \approx 0 \quad (4.25)$$

El procedimiento puede seguirse para cada uno de los vínculos. Las condiciones de consistencia para los otros vínculos determinan los multiplicadores de Lagrange (ecuaciones de consistencia con los siguientes multiplicadores de Lagrange $\overset{(1)}{\lambda}{}^c_0$, $\overset{(2)}{\lambda}{}^c_i$, $\bar{\delta}_0$ y $\bar{\delta}_i$).

Los corchetes de Poisson diferentes de cero que deben ser evaluados son esencialmente:

$$\left[\overset{(2)}{\Pi}{}^i_c(x), \omega^{ab}_\mu(y) \right]_{PB} , \quad \left[\overset{(1)}{\Pi}{}^\nu_c(x), \omega^{ab}_\mu(y) \right]_{PB}$$

$$\left[\Pi^\nu(\psi)(x), \omega^{ab}_\mu(y) \right]_{PB}$$

Además, por cálculo directo de los corchetes de Poisson entre vínculos, es posible ver que ningún vínculo secundario es primera clase.

A este punto es posible hacer algunas conclusiones. Mirando los vínculos primarios (4.15)-(4.19) y teniendo en cuenta el conjunto de vínculos secundarios obtenidos aplicando el algoritmo (4.24), puede verse que sólo el vínculo primario $\overset{(2)}{\Phi}{}^0_c$ tiene nulos sus corchetes de Poisson con todos los otros vínculos. En consecuencia el vínculo primario $\overset{(2)}{\Phi}{}^0_c$ es primera clase y corresponde a invariancias de gauge de la teoría bajo transformaciones locales de gauge. Como es usual, se pueden construir otros vínculos primera clase con apropiadas combinaciones lineales.

Luego, se está en presencia de una teoría que tiene vínculos primarios y secundarios, en el formalismo de segundo orden. Este conjunto contiene vínculos de dos clases, primera y segunda clase. La presencia de vínculos segunda clase impone seguir el formalismo de Dirac. En este sentido, el tratamiento de un sistema Hamiltoniano vinculado que contenga términos en altas derivadas en el Lagrangiano es análogo al método usual. De acuerdo con las prescripciones de Dirac, los corchetes de Dirac deben ser definidos primero a partir de los corchetes de Poisson y luego los vínculos de segunda clase deben ser eliminados del formalismo tomando las ecuaciones fuertemente cero.

V. CONCLUSIONES

Se construyó el formalismo canónico de segundo orden para la extensión supersimétrica de la gravedad topológica masiva en (2+1) dimensiones. Se obtuvo el formalismo de segundo orden, partiendo de la densidad Lagrangiana en altas derivadas (3.11), y considerando fuertemente cero los vínculos sobre la curvatura y eliminando la conexión spinorial ω^{ab}_μ como variable independiente. Se consideró la transformación de Ostrogradski con el propósito de analizar este singular sistema en altas derivadas. Como fue mostrado, el tratamiento de los vínculos involucra algunas sutilezas, las cuales están solo presente en esta clase de Teorías con Lagrangianos con término en altas derivadas. Por lo tanto, el formalismo construido corresponde a un sistema Hamiltoniano vinculado que contiene vínculos primarios y secundarios, los que son de primera y segunda clase. Para analizar este sistema en altas derivadas se ha trabajado lo más cercano posible a las prescripciones de Dirac [14].

Referencias

1- S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, Physical Review Letter **48** (1982), 975; Annals of Physics (NY) **140** (1982), 372; Annals of Physics (NY) **195** (1988), 406; S. Deser and J. Kay, Physics Letters B **120** (1983), 97-100.

2- G.V. Dunne, R. Jackiw and C.A. Trugenberger, MIT preprint CTP 1711, (1989). L. Alvarez-Gaume, J.M.F. Labastida and A.V. Ramallo, preprint CERNTH 5480/89, (1989).

3- T. Uematsu, Zeitschrift für Physik C 143 (1985), 29; A. Achucarro and P. Townsend, Physics Letters B **180** (1986), 85; E. Witten, Nuclear Physics B **321** (1988), 46; K. Koehler, F. Mansouri, C. Vaz and L. Witten, Modern Physics Letters A **5** (1990), 935; G. Grignani and G. Nardelli, Physics Letters B **264** (1991), 45; MIT preprints CTP-1953 and CTP2001, (1991); B.A. Campbell, M.I. Duncan, N. Kaloper and K.A. Olive, preprint CERNTH 5801/90, (1990).

4- J. Nelson and T. Regge, Nuclear Physics B **328** (1989), 190; J. Nelson, T. Regge and F. Zertuche, Nuclear Physics B **339** (1990), 516.

5- P. Van Nieuwenhuizen, Physical Review D **32** (1985), 872.

6- L. Qiong-gui and N. Guang-jiong, Classical and Quantum Gravity **7** (1990), 1261.

7- S. Deser, Physics Letters **64** (1990), 611; S. Deser and J. Mc Carthy, Nuclear Physics B **344** (1990), 747; S. Deser and Z. Yang, Classical and Quantum Gravity **7** (1990), 1603; S. Deser and X. Xiang, Physics Letters (1991).

8- C. Abecasis, C. Repetto and O.P. Zandron, Advanced Studies in Theoretical Physics **1** (2007), 173-186.

9- M. Ostrogradski, Member Academic Science St. Petersbourg **1** (1850), 385.

10- L. Zi-ping, International Journal of Theoretical Physics **29** (1990), 165; International Journal of Theoretical Physics **30** (1991), 225; Journal of Physics A **24** (1991), 4261.

11- V.V. Nesterenko, Journal of Physics A **22** (1989), 1673.

12- S. Deser, Classical and Quantum Gravity **23** (2006), 5773.

13- A. Foussats and O.S. Zandron, Classical and Quantum Gravity **5** (1988), 1231; International Journal of Modern Physics A **5** (1990), 725.

14- P. Dirac, Lectures on Quantum Mechanics, (New York: Yeshiva University Press), (1964).