

TEORÍA DE CAMPOS NO RELATIVISTAS: DINÁMICA E IRREVERSIBILIDAD

NON RELATIVISTIC QUANTUM FIELD THEORY: DYNAMICS AND IRREVERSIBILITY

L. Daguerre^{*1}, G. Torroba^{1,2}, R. Medina³ y M. Solís^{1,2}

¹Instituto Balseiro, UNCuyo and CNEA S.C. de Bariloche, Río Negro, R8402AGP, Argentina.

²Centro Atómico Bariloche and CONICET S.C. de Bariloche, Río Negro, R8402AGP, Argentina.

³IST Austria Am Campus 1, 3400 Klosterneuburg, Austria.

Recibido: 25/02/2021; Aceptado: 18/05/2021

Estudiamos aspectos de Teoría Cuántica de Campos a densidad finita usando técnicas y conceptos de información cuántica. Nos enfocamos en fermiones de Dirac masivos con potencial químico en $1 + 1$ dimensiones espacio-temporales. Usando la entropía de entrelazamiento en un intervalo, construimos la función c entrópica que es finita. Esta función c no es monótona, e incorpora el entrelazamiento de largo alcance proveniente de la superficie de Fermi. Motivados por trabajos previos de modelos en la red, calculamos numéricamente las entropías de Renyi y encontramos oscilaciones de Friedel. Seguidamente, analizamos la información mutua como una medida de correlación entre diferentes regiones. Usando una expansión de distancia grande desarrollada por Cardy, argumentamos que la información mutua detecta las correlaciones inducidas por la superficie de Fermi todavía al orden dominante en la expansión. Finalmente, analizamos la entropía relativa y sus generalizaciones de Renyi para distinguir estados con diferente carga. Encontramos que estados en diferentes sectores de superselección dan origen a un comportamiento super-extensivo en la entropía relativa.

Palabras Clave: teoría cuántica de campos, densidad finita, teoría de información cuántica, grupo de renormalización.

We study aspects of quantum field theory at finite density using techniques and concepts from quantum information theory. We focus on massive Dirac fermions with chemical potential in $1 + 1$ space-time dimensions. Using the entanglement entropy on an interval, we construct an entropic c -function that is finite. This c -function is not monotonous, and incorporates the long-range entanglement from the Fermi surface. Motivated by previous works on lattice models, we next compute the Renyi entropies numerically, and find Friedel-type oscillations. Next, we analyze the mutual information as a measure of correlation functions between different regions. Using a long-distance expansion developed by Cardy, we show how the mutual information detects the Fermi surface correlations already at leading order in the expansion. Finally, we analyze the relative entropy and its Renyi generalizations in order to distinguish states with different charge. We find that states in different superselection sectors give rise to a super-extensive behavior in the relative entropy.

Keywords: quantum field theory, finite density, quantum information theory, renormalization group.

<https://doi.org/10.31527/analesafa.2021.32.4.93>



ISSN 1850-1168 (online)

I. INTRODUCCIÓN

La Teoría Cuántica de Campos ('Quantum Field Theory' o QFT) describe sistemas cuánticos con infinitos grados de libertad, y juega un rol central en modelos de altas energías y sistemas fuertemente correlacionados en materia condensada. En las últimas décadas la QFT ha visto un progreso revolucionario en aspectos no perturbativos al utilizar métodos provenientes de la Teoría de Información Cuántica. Entre ellos, medidas basadas en la entropía de entrelazamiento en conjunto con la unitariedad y causalidad han establecido la irreversibilidad del grupo de renormalización (RG) en $d = 1 + 1, 2 + 1$ y $3 + 1$ dimensiones espacio-temporales para QFTs relativistas [1-3]. También, resultados de Teorías de Campos Conformes (CFT) [4] así como de Teorías de Campos libres [5] han brindado nuevas visiones acerca de la estructura general de QFT.

La mayoría de los resultados existentes en la literatura hasta el momento han estado relacionados con QFTs rela-

tivistas. La razón es que las restricciones que imponen la simetría de Lorentz y la estructura causal juegan un rol fundamental en los enfoques antes mencionados. En contraste, son mucho menos conocidos resultados en QFTs no relativistas y, en particular, en QFTs no relativistas a densidad finita como sería relevante para la descripción del límite al continuo de materia cuántica. En particular, ha sido sugerido que la entropía de entrelazamiento puede presentar un comportamiento no monótono en ciertos modelos no relativistas, y esto podría implicar que el grupo de renormalización no fuese irreversible más allá de las teorías Lorentz invariantes [6].

Una lección clave de los análisis invariantes de Lorentz es que, desde el punto de vista de medidas de información cuántica, las QFTs libres proveen una arena no trivial para obtener resultados más generales que se aplican más ampliamente [5]. Motivados por esto, en este artículo estudiamos fermiones de Dirac libres a densidad finita, empleando tanto métodos analíticos en teoría de información cuántica así como simulaciones numéricas. Nos restringimos al

* daguerrelcs@gmail.com

caso más simple posible de $d = 1 + 1$ dimensiones espacio-temporales, donde los resultados son todavía no triviales. Planeamos extender nuestro trabajo a dimensiones más altas en un futuro. Cabe destacar que esta presentación es una discusión de algunos resultados publicados con anterioridad en [7].

II. FERMIONES DE DIRAC LIBRES A DENSIDAD FINITA

En esta sección estudiaremos algunos aspectos teóricos de fermiones de Dirac a densidad finita tanto en el continuo como en la red.

Teoría en el continuo

Los fermiones de Dirac libres tienen una simetría continua $U(1)$, $\psi \rightarrow e^{i\theta} \psi$. Una densidad de carga finita $n_e = \langle \psi^\dagger \psi \rangle$ puede obtenerse al introducir un potencial químico μ_F . Es por eso que la acción (con signatura $g_{\mu\nu} = (+ \dots -)$, en d dimensiones espacio-temporales) resulta

$$S = \int dt d^{d-1}x (\bar{\psi}(i\partial - m)\psi + \mu_F \psi^\dagger \psi). \quad (1)$$

Tanto el término de masa como el de potencial químico son operadores relevantes por contaje de potencias, e inducen un flujo no trivial del grupo de renormalización (RG) desde una CFT UV de un fermión de Dirac no masivo.

Los autovalores de energía son

$$E_\pm = -\mu_F \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}. \quad (2)$$

De aquí en adelante siempre trabajaremos con $\mu_F > 0$. Es por esto que E_- siempre será negativo y como de costumbre dará origen a las antipartículas; además, la banda E_+ tiene una energía tal que se anula a momento de Fermi finito $|\mathbf{p}| = k_F = \sqrt{\mu_F^2 - m^2}$. Esto define una superficie de Fermi esférica.

Reconocemos el correlador de densidad finita como la deformación del resultado relativista, definiendo el mismo como $C(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \langle \psi^\dagger(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{y}) \rangle$,

$$C_{k_F}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = C_0(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \int_{|\mathbf{p}| < k_F} e^{-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma^0 \gamma^i p^i + \gamma^0 m}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \right), \quad (3)$$

con

$$C_0(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \int_p e^{-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma^0 \gamma^i p^i + \gamma^0 m}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \right). \quad (4)$$

Aquí utilizamos la notación $\int_p = \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}}$.

Modelo en la red

Trabajamos con una red espacial infinita, $x^1 = na$, $n \in \mathbb{Z}$, poniendo el espaciado de red $a = 1$. Simetrizando las derivadas espaciales en (1) y discretizando las derivadas como

$\partial_1 \psi(x) \rightarrow (\psi_{n+1} - \psi_n)/a$, el Hamiltoniano en la red es

$$\mathcal{H} = \sum_n \left(-\frac{i}{2} (\psi_n^\dagger \gamma^0 \gamma^1 (\psi_{n+1} - \psi_n) - \text{h.c.}) + m \psi_n^\dagger \gamma^0 \psi_n - \mu_F \psi_n^\dagger \psi_n \right), \quad (5)$$

Los autovalores de energía vienen dados por

$$\varepsilon_\pm(k) = -\mu_F \pm \sqrt{\sin(k)^2 + m^2}. \quad (6)$$

Cuando $\mu_F = 0$, el estado de vacío es el estado que contiene cero partículas $|0\rangle$, aniquilado por $c_{k,\pm}$. Cuando $\mu_F > 0$, el nuevo estado fundamental se obtiene al llenar los estados de energía negativa $\varepsilon_+(k) < 0$ en la banda de partículas, $|G\rangle = \prod_{k, \varepsilon_+(k) \leq 0} c_{k,+}^\dagger |0\rangle$.

Luego, las partículas llenan la superficie de Fermi con momento de Fermi

$$k_F = \arcsin \left(\sqrt{\mu_F^2 - m^2} \right). \quad (7)$$

El correlador en el discreto se define como $C_{ij} = \langle G | \psi_i^\dagger \psi_j | G \rangle \equiv \langle \psi_i^\dagger \psi_j \rangle$ y se corresponde con el resultado del continuo (3),

$$C_{ij} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{-ik(i-j)} \left(\frac{1}{2} \mathbb{I} - \frac{\sin(k) \gamma^0 \gamma^1 + m \gamma^0}{2\sqrt{m^2 + \sin(k)^2}} \right) + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{-ik(i-j)} \Theta(-\varepsilon_+(k)) \left(\frac{1}{2} \mathbb{I} + \frac{\sin(k) \gamma^0 \gamma^1 + m \gamma^0}{2\sqrt{m^2 + \sin(k)^2}} \right). \quad (8)$$

Dinámica de fermiones

Primero, consideremos el límite no masivo $m/k_F \rightarrow 0$. Es útil elegir la base quirral $\gamma^0 = \sigma^1$, $\gamma^1 = i\sigma^2$. En términos de los usualmente denominados *left/right movers*, $\psi = (\psi_L, \psi_R)$, obtenemos

$$S = \int dx^0 dx^1 \left(\psi_L^\dagger (i(\partial_0 - \partial_1) + \mu_F) \psi_L + \psi_R^\dagger (i(\partial_0 + \partial_1) + \mu_F) \psi_R \right). \quad (9)$$

El potencial químico puede ser removido con una transformación unitaria local,

$$\psi_L(x^1) \rightarrow e^{-ik_F x^1} \psi_L(x^1), \quad \psi_R(x^1) \rightarrow e^{ik_F x^1} \psi_R(x^1). \quad (10)$$

Esto da dos fermiones quirales moviéndose a la velocidad de la luz,

$$S = \int_{p_0, p_\perp} \psi_L^\dagger (p^0 + p_\perp) \psi_L + \psi_R^\dagger (p^0 - p_\perp) \psi_R. \quad (11)$$

Ahora consideremos el límite opuesto, es decir, el límite no relativista $m/k_F \rightarrow \infty$. A energías y momentos mucho más

pequeños que la masa, la relación de dispersión (2) resulta

$$E_+ \approx \tilde{\mu}_F + \frac{p^2}{2m}, \quad -E_- \approx 2m + \tilde{\mu}_F + \frac{p^2}{2m}, \quad (12)$$

con $\mu_F = m + \tilde{\mu}_F$. Las antipartículas con energía $-E_- \approx 2m$ se desacoplan de la teoría de bajas energías. Luego, la teoría efectiva de bajas energías resulta

$$S = \int_{p_0, p_\perp} \tilde{\psi}_L^\dagger (p^0 + v_F p_\perp) \tilde{\psi}_L + \tilde{\psi}_R^\dagger (p^0 - v_F p_\perp) \tilde{\psi}_R. \quad (13)$$

Este es el mismo resultado que se obtuvo en la teoría con dos fermiones quirales (11), excepto que ahora la velocidad de propagación es la velocidad de Fermi.

III. ENTROPÍA DE ENTRELAZAMIENTO

En esta sección consideramos la entropía de entrelazamiento (EE) o entropía geométrica asociada a la matriz densidad reducida de una región espacial V del estado puro de vacío. La misma se define a partir de la entropía de Von Neumann como [5]

$$S(V) = -\text{Tr}(\rho_V \log(\rho_V)) \quad , \quad \rho_V = \text{Tr}_{\bar{V}}(|0\rangle\langle 0|), \quad (14)$$

donde \bar{V} es el complemento de V , y $|0\rangle$ es el estado de vacío.

Nuestra motivación en cuanto al estudio de la EE en esta dirección provino de [6], que argumentó acerca de la violación de la irreversibilidad del flujo del RG en modelos no relativistas. En más detalle, una superficie de Fermi en d dimensiones espacio-temporales conlleva a la violación logarítmica de la ley de áreas para la EE,

$$S(V) \sim (k_F r)^{d-2} \log(k_F r), \quad (15)$$

donde V es una región esférica de radio r . Para r grande, esta contribución crece más rápido que el término dominante de la ley de áreas,

$$S(V) \sim \frac{r^{d-2}}{\varepsilon^{d-2}}, \quad (16)$$

que aparece en modelos locales, como las QFTs con puntos fijos UV.

En contraposición a la EE que es UV divergente, la cantidad

$$c(r) = r \frac{dS(r)}{dr}, \quad (17)$$

es finita y es proporcional a la carga central intrínseca c en los puntos fijos UV e IR. También está bien definida por fuera de los puntos fijos, en cuyo caso decrece monotonamente para flujos unitarios del RG en teorías relativistas [1, 2]. Computaremos la cantidad finita (17) en presencia de densidad de carga finita, y la usaremos para estudiar potenciales violaciones de la monotonicidad. Para ello, haremos simulaciones numéricas utilizando un método denominado de tiempo real [5, 8]. En este, la entropía de entrelazamiento en la red puede computarse a partir de la matriz de correlación (ver (8)) $C_{ij} = \langle \psi_i^\dagger \psi_j \rangle$ restringida a V ($i, j \in V$),

$$S(V) = -\text{Tr}[C \log(C) + (1 - C) \log(1 - C)]. \quad (18)$$

Para fermiones de Dirac quirales, habíamos encontrado una transformación unitaria (10) que mapea la teoría con densidad de carga finita a un modelo relativista de carga cero. Ambas funciones de dos puntos C_{ij} en el continuo tienen los mismos autovalores y, entonces, las respectivas matrices también tienen los mismos autovalores. Por lo tanto, las medidas de información cuántica que dependen sólo de los autovalores de la matriz densidad reducida, como la EE, coinciden en ambas teorías. Esto se encuentra plasmado en el cálculo numérico de la EE en la Fig. 1.

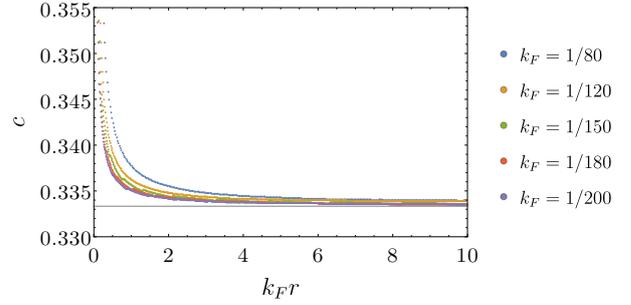


FIG. 1: Función $c(k_F r)$ entrópica para un fermión quiral a densidad finita. Para $k_F \rightarrow 0$ y $k_F r$ fijos, los gráficos tienden a $\frac{1}{3}$, como en un CFT de $c = 1$.

Analicemos ahora el caso de fermiones de Dirac masivos. Para desarrollar intuición analítica, es útil considerar primero los límites asintóticos UV e IR, en conjunto con los comportamientos ultra-relativistas y no relativistas. Desde el punto de vista de la EE y la función entrópica $c(r)$, el UV se corresponde con $r \ll 1/m, 1/k_F$. El término de masa es una deformación relevante estándar, y por tanto su efecto es despreciable en el UV. La densidad de carga puede ser más sutil dado que el estado fundamental cambia a densidad finita. Asumiendo que también se comporta como una deformación relevante, el límite UV debería dar $c(r) \rightarrow 1/3$. Nuestros resultados numéricos mostrarán que de hecho este es el caso (ver Fig. 2).

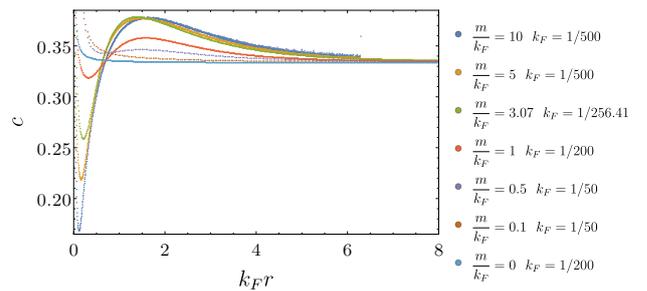


FIG. 2: Función $c(k_F r)$ para distintos regímenes de m/k_F para fermiones de Dirac a densidad finita. La función c entrópica es una cantidad finita que exhibe un comportamiento no monótono del RG.

El comportamiento intermedio entre los puntos fijos depende de m/k_F . En el régimen relativista $m \ll k_F$, los efectos de la carga no trivial siempre dominan en el sentido del RG, y el comportamiento es similar al de los fermiones quirales.

En el régimen no relativista, $c(r)$ rápidamente decrece a escalas del orden de $mr \sim 1$. Esto es consistente con el RG siendo dominado por la masa. Para valores más grandes de

r , $c(r)$ crece, alcanzando un máximo a $k_F r \sim 1$, para finalmente tender a $1/3$. El mínimo y el máximo en $c(k_F r)$ reflejan la competencia entre los operadores $m\bar{\psi}\psi$ y $\mu_F\bar{\psi}^\dagger\psi$; el primero trata de inducir un gap masivo y entrelazamiento nulo, mientras que el segundo (recordando que $\mu_F > m$) trata de inducir entrelazamiento de largo alcance. La función c entrópica sensa la creación de entrelazamiento debido a la densidad finita.

IV. ENTROPÍAS DE RENYI

Las entropías de Renyi y las correspondientes funciones c_n entrópicas se definen como [5]

$$S_n(V) = \frac{1}{1-n} \log(\text{Tr}(\rho_V^n)), \quad c_n(r) = r \frac{dS_n(r)}{dr}. \quad (19)$$

Además de brindar los autovalores de ρ_V , las entropías de Renyi también son importantes debido a su rol en el replica trick.

En la Ref. [9] estudiaron el modelo XY en una red 1d y encontraron un comportamiento sorprendente de las S_n , reminiscente de las oscilaciones de Friedel en un metal. Su predicción analítica de S_n en el límite de gran distancia $\log(2k_F r) \gg n$ es

$$S_n(r) = \frac{n+1}{6n} \log\left(\frac{r}{\epsilon}\right) + A f_n \frac{\cos(2k_F r)}{(2k_F r)^{\frac{2}{n}}} + \dots, \quad (20)$$

con

$$f_n = \frac{2}{1-n} \left(\frac{\Gamma((1+n^{-1})/2)}{\Gamma((1-n^{-1})/2)} \right)^2, \quad (21)$$

y $A = 1$ en su caso. Similarmente a (18), las entropías de Renyi pueden ser computadas en términos de la función de dos puntos C_{ij} restringida a una región espacial V ,

$$S_n(V) = \frac{1}{1-n} \text{Tr}[\log(C^n + (1-C)^n)]. \quad (22)$$

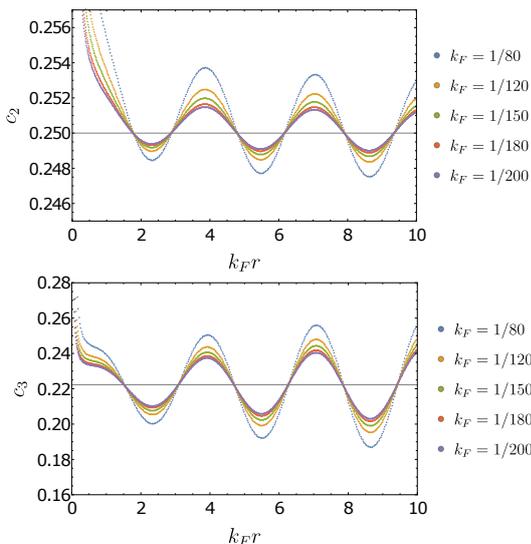


FIG. 3: Funciones c_2 y c_3 para un fermión quiral a densidad finita. El límite al continuo se corresponde con $k_F \rightarrow 0$ para $k_F r$ finito, en donde las amplitudes de las oscilaciones tienden a desvanecerse.

Comencemos nuestro análisis con fermiones de Dirac no

masivos en la red (5). Esto nos proveerá un ejemplo de oscilaciones de Friedel en modelos en la red que desaparecen en el límite al continuo, como se aprecia en la Fig. 3.

A continuación, consideramos el caso masivo. La Fig. 4 muestra nuestros resultados numéricos para c_2 y c_3 en diferentes regímenes de m/k_F .

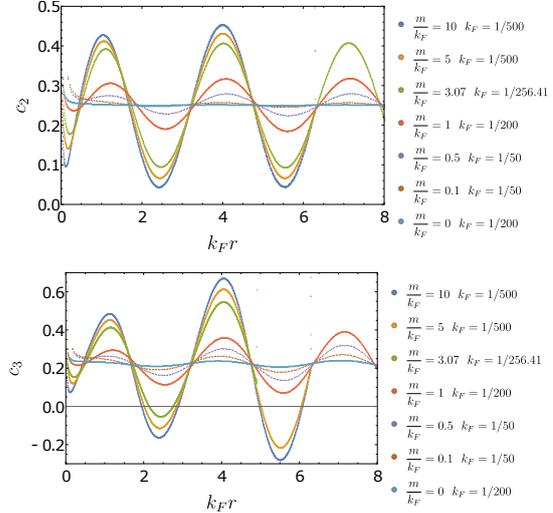


FIG. 4: Funciones c_2 y c_3 para todos los regímenes de fermiones de Dirac a densidad finita. En todos ellos, excepto para $m = 0$, hay oscilaciones de Friedel de período π como función de $k_F r$.

Para $n > 1$ encontramos oscilaciones de Friedel en el límite al continuo, no sólo cuando $m \gg k_F$ sino que para otros rangos de m/k_F también. Las oscilaciones tienen un valor medio $\frac{6n}{n+1}$ debido a la contribución proveniente de fermiones livianos de la teoría a bajas energías (13). Más aún, hemos verificado que la dependencia de distancia grande (20) también ajusta correctamente lejos del límite no relativista. Teóricamente, estos comportamientos pueden explicarse en términos de una expansión en producto de operadores sobre los bordes del intervalo [7].

V. INFORMACIÓN MUTUA

En esta sección analizaremos la información mutua, una medida de información que permite cuantificar la correlaciones entre dos regiones A y B . La misma puede definirse en términos de la EE como

$$I(A, B) = S(A) + S(B) - S(A \cup B); \quad (23)$$

y también su versión de Renyi, dada por

$$I_n(A, B) = S_n(A) + S_n(B) - S_n(A \cup B). \quad (24)$$

Si se consideran como regiones A y B dos intervalos de longitudes r_A y r_B respectivamente, la contribución dominante para una CFT en el límite $r_A/L, r_B/L \gg 1$ resulta [10]

$$I \sim \left(\frac{r_A r_B}{L^2} \right)^\Delta, \quad (25)$$

donde Δ indica la mínima dimensión asociada a un operador de intercambio admisible por la teoría. En el presente caso, esto se corresponde con bilineales fermiónicos, con lo cual $\Delta = 1$. Estas contribuciones tienen el mismo comportamiento de escaleo que los términos no oscilantes que

no mezclan $\tilde{\psi}_L$ y $\tilde{\psi}_R$. Por tanto, siguiendo un argumento similar para la deducción de (25), la información mutua de Renyi en el límite de grandes distancias resulta

$$I_n \sim \frac{r^2}{L^2} (a_n + b_n \cos(2k_F L + \phi_n) + \dots), \quad (26)$$

con a_n, b_n algunas constantes de $O(1)$.

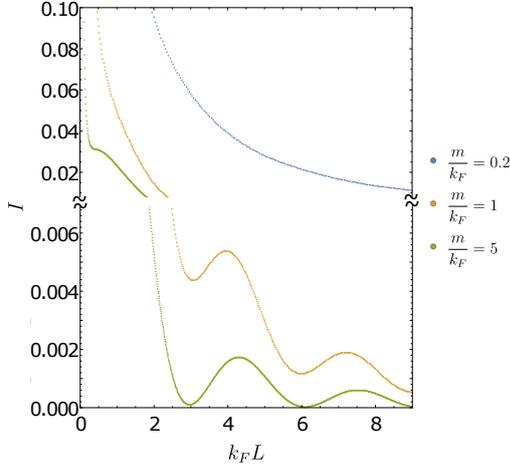


FIG. 5: $I(k_F L)$ para un r fijo para fermiones de Dirac masivos a densidad finita. Las longitudes r fueron $k_F r = 2$, $k_F r = 0.5$ y $k_F r = 0.2$ para $\frac{m}{k_F} = 0.2$, $\frac{m}{k_F} = 1$ y $\frac{m}{k_F} = 5$ respectivamente. Están presentes oscilaciones de período π como función de $k_F L$. Sus amplitudes se anulan conforme $m/k_F \rightarrow 0$.

Los resultados numéricos de la información mutua se muestran en la Fig. 5. El decaimiento es más abrupto para curvas con mayor $\frac{m}{k_F}$, dado que las correlaciones asociadas a operadores que no están localizados en los extremos de los intervalos replicados, tienden a desvanecerse significativamente para $L \sim \frac{1}{m}$. Asimismo, para $\frac{m}{k_F} \neq 0$ se observan oscilaciones en todos los regímenes.

Los resultados numéricos de la información mutua de Renyi se muestran en la Fig. 6. Los paneles a), b) y c) muestran el comportamiento para diferentes masas y para diferentes parámetros de Renyi n . Finalmente, en el panel d) verificamos que la predicción del límite de grandes distancias (26) está en excelente acuerdo con los resultados numéricos.

VI. MEDIDAS DE DISTINGUIBILIDAD

En esta sección nuestro análisis virará la atención hacia otra pregunta en información cuántica: ¿cómo distinguir a dos matrices densidad ρ y σ ? La principal medida para llevar a cabo esta tarea es la entropía relativa entre dos estados ρ y σ . La misma se define como

$$S_{rel}(\rho|\sigma) = \text{tr}(\rho \log \rho) - \text{tr}(\rho \log \sigma). \quad (27)$$

Existe una interesante generalización uniparamétrica de la entropía relativa [11, 12]

$$S_\alpha(\rho|\sigma) = -\frac{1}{1-\alpha} \log \text{Tr} \left(\sigma^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} \rho \sigma^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} \right)^\alpha, \quad (28)$$

para $\alpha \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ y que para $\alpha = 1$ recupera a la entropía relativa. Estas están usualmente referidas como las

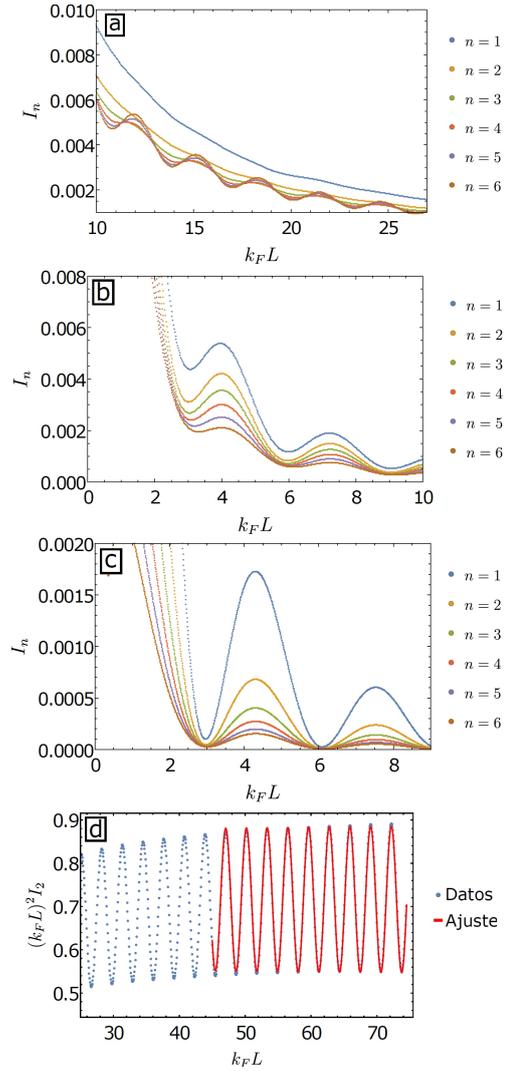


FIG. 6: Las subfiguras a), b) y c) muestran las simulaciones de $I_n(k_F L)$ para un valor fijo r para un fermión de Dirac masivo. Los parámetros son $(k_F r, m, \frac{m}{k_F}) = (2, \frac{1}{500}, 0.2)$; $(0.5, \frac{1}{200}, 1)$; $(0.2, \frac{1}{100}, 5)$, respectivamente. Observamos oscilaciones de Friedel de período $k_F L$, con amplitud dependiente de $\frac{m}{k_F}$. En la subfigura d) chequeamos el acuerdo con (26). Ajustamos $(k_F L)^2 I_2(k_F L)$ en el límite $k_F L \gg 1$ con $\frac{m}{k_F} = 1$, $k_F r = \frac{5}{3}$ y $k_F = \frac{1}{60}$. La expresión usada fue $(k_F L)^2 I_2(k_F L) = A + B \cos(2k_F L) (k_F L)^C$, obteniéndose $C \rightarrow 0$.

entropías relativas de Renyi.

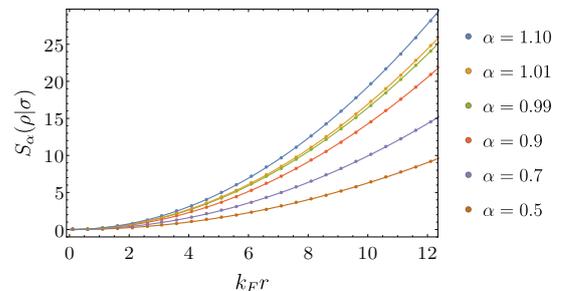


FIG. 7: Gráficos de S_α con $\alpha \in [0.5, 1.1]$ para $m = 0$, comparando estados con $k_F = 0$ y $k_F = 1/20$. La dependencia funcional $S_\alpha = A_\alpha(k_F r)^2$ es observada y graficada con una línea continua para todos los α considerados. Cuando $\alpha \rightarrow 1$ los gráficos crean una cota por debajo y por encima de la entropía relativa.

En la Fig. 7 se muestran los resultados numéricos (que se computaron utilizando fórmulas obtenidas en [13]) que comparan a los estados con $m = 0$ fijo, con $k_F = 0$ (σ) y con $k_F = 1/20$ (ρ). Lo notable en este caso es el comportamiento super-extensivo dado por $S_\alpha = A_\alpha(k_F r)^2$ para todo r .

VII. CONCLUSIONES

En este artículo hemos estudiado varias medidas de información cuántica en Teoría de Campos a densidad finita. Nos enfocamos en fermiones de Dirac libres a densidad finita en $1 + 1$ dimensiones espacio-temporales.

Hemos establecido que la función c entrópica no es monótona, en rotundo contraste con el comportamiento de QFTs Lorentz-invariantes. En el análisis de entropías de Renyi se destacan las oscilaciones de Friedel, que modifican el resultado de la CFT en el orden subdominante. En un futuro, podría ser interesante testear la existencia de oscilaciones en teorías interactuantes, como por ejemplo, en non-Fermi liquids. Otro resultado importante a destacar es que encontramos que la información mutua detecta a la superficie de Fermi todavía en el orden dominante vía nuevos términos oscilatorios. Esta es una medida prometedora para testear sistemas correlacionados. Finalmente, estudiamos la entropía relativa (y su generalización uniparamétrica) como medida de distinguibilidad entre estados cuánticos. La entropía relativa exhibe un comportamiento super-extensivo para estados en distintos sectores de superselección de carga, y además es monótona y finita. Estas propiedades resultan útiles para un entendimiento no perturbativo de aspectos del flujo del RG a densidad finita. Para continuar en esta línea, sería muy importante poder determinar cómo extraer propiedades intrínsecas de los puntos fijos a partir de la entropía relativa. También sugerimos extender el presente trabajo a $d > 2$ y explorar modelos holográficos.

VIII. AGRADECIMIENTOS

Se agradece a Horacio Casini por distintas discusiones y comentarios a lo largo del trabajo. LD cuenta con el apoyo de CNEA y UNCuyo, Inst. GT cuenta con el apoyo de CONICET, ANPCyT, CNEA, y UNCuyo, Inst. Balseiro. RM cuenta con el apoyo de IST Austria. MS cuenta con el apoyo de CONICET y UNCuyo, Inst. Balseiro. También se agradece a la Asociación Argentina de Física por la posibilidad de presentar este artículo en el marco de una Mención Especial por el Premio Luis Másperi 2020.

REFERENCIAS

- [1] H. Casini y M. Huerta. A Finite entanglement entropy and the c-theorem. *Phys. Lett.* **B600**, 142-150 (2004).
- [2] H. Casini y M. Huerta. On the RG running of the entanglement entropy of a circle. *Phys. Rev.* **D85**, 125016 (2012).
- [3] H. Casini, E. Testé y G. Torroba. Markov Property of the Conformal Field Theory Vacuum and the a Theorem. *Phys. Rev. Lett.* **118**, 261602 (2017).
- [4] P. Calabrese y J. Cardy. Entanglement entropy and conformal field theory. *J. Phys.* **A42**, 504005 (2009).
- [5] H. Casini y M. Huerta. Entanglement entropy in free quantum field theory. *J. Phys.* **A42**, 504007 (2009).

- [6] B. Swingle. Entanglement does not generally decrease under renormalization. *J. Stat. Mech.* **1410**, P10041 (2014).
- [7] L. Daguerre, R. Medina, M. Solis y G. Torroba. Aspects of quantum information in finite density field theory. *JHEP* **03**, 079 (2021).
- [8] I. Peschel. Calculation of reduced density matrices from correlation functions. *J. Phys. A: Math. Gen.* **36**, L205-L208 (2003).
- [9] P. Calabrese, M. Campostrini, F. Essler y B. Nienhuis. Parity effects in the scaling of block entanglement in gapless spin chains. *Phys. Rev. Lett.* **104**, 095701 (2010).
- [10] J. Cardy. Some results on the mutual information of disjoint regions in higher dimensions. *J. Phys. A: Math. Theor.* **46**, 285402 (2013).
- [11] M. Müller-Lennert, F. Dupuis, O. Szechr, S. Fehr y M. Tomamichel. On quantum Rényi entropies: A new generalization and some properties. *J. Math. Phys.* **54**, 122203 (2013).
- [12] M. M. Wilde, A. Winter y D. Yang. Strong converse for the classical capacity of entanglement-breaking and Hadamard channels via a sandwiched Rényi relative entropy. *Commun. Math. Phys.* **331**, 593-622 (2014).
- [13] H. Casini, R. Medina, I. S. Landea y G. Torroba. Renyi relative entropies and renormalization group flows. *J. High Energ. Phys.* **2018** (2018).