

Cálculo de las amplitudes relativas de la onda de presión y del ruido generado por las ventanas de una cavidad resonante cilíndrica de sección elíptica en fenómenos optoacústicos.

Ladaga J.L., Sancho E.G. y Mosquera C.F.

Facultad de Ingeniería UBA – Laboratorio de láser – Paseo Colón 850 – Buenos Aires
e-mail: cmosque@fi.uba.ar

El decaimiento de una muestra, a posteriori de la absorción de energía de un láser, excita diferentes modos de vibración de una cavidad acústica resonante de sección transversal elíptica. Se calcula la amplitud relativa de la onda de presión en puntos sobre la superficie lateral de la cavidad, donde se ubica el micrófono, para distintos valores de la excentricidad de la elipse y de la posición en la que se ubica el haz láser con respecto al eje de simetría de la cavidad. Se calcula también la amplitud del ruido generado por absorción de las ventanas que cierran la cavidad. Se comparan estos resultados con los obtenidos para una cavidad de sección circular con el haz del láser centrado en su eje, forma habitual en que se las utiliza. Se calcula y compara el factor de calidad Q para ambas cavidades.

Palabras clave: optoacústica, cavidades, ruido coherente, factor de calidad.

We calculate, in an elliptical cross-section cavity, the relative amplitude of the acoustic signal, generated by laser absorption, at the microphone site for different eccentricity values and laser positions relative to the cavity axis. We compare the results with those pertaining to an equivalent resonant cylindrical cross-section cavity, with the laser placed in the cavity axis. For both cavities, we calculate and compare the coherent noise generated by the cavity windows and the quality factors.

Keywords: photo-acoustics, cavities, coherent noise, quality factor.

Señal optoacústica en una cavidad resonante elíptica

La generación de ondas acústicas y térmicas en gases está gobernada por la ecuación de onda inhomogénea para la presión⁽¹⁾ p :

$$\partial_t^2 p(\vec{r}, t) - c^2 \nabla^2 p(\vec{r}, t) = (\sigma - 1) \partial_t H(\vec{r}, t) \quad (1)$$

donde c , σ y H son la velocidad del sonido, el coeficiente adiabático del gas y la densidad de potencia calorífica depositada en el gas por absorción de la luz, respectivamente.

La ecuación (1) tiene dos soluciones independientes: una onda acústica débilmente amortiguada con longitudes de onda del orden de los centímetros y una onda térmica, fuertemente amortiguada, de longitud de onda submilimétrica⁽²⁾. Esta última onda se propaga, con amplitud apreciable, a una distancia no mayor que unas pocas longitudes de onda; por lo tanto, sólo puede ser observada en la vecindad del haz de luz que excita al medio.

Todas las cavidades cerradas utilizadas como celdas optoacústicas tienen resonancias acústicas y sus modos de vibración son las soluciones de la ecuación de ondas homogénea que, para una variación temporal de tipo armónico, se transforma en la ecuación de Helmholtz. Esta ecuación se puede resolver mediante separación de variables en coordenadas cilíndricas elípticas⁽³⁾ (u, v, z):

$$x = \frac{d}{2} \cdot \cosh u \cdot \cos v; \quad y = \frac{d}{2} \cdot \sinh u \cdot \sin v; \quad z = z$$

$$0 \leq u < \infty \quad 0 \leq v < 2\pi$$

donde d es la distancia interfocal de la elipse. Dado d , cada valor $u = C$ (con C constante) da una elipse particular.

Al separar variables, las soluciones de las ecuaciones en u y en v , son las funciones de Mathieu⁽⁴⁾. En este caso, las autofunciones de la ecuación de Helmholtz se pueden escribir como:

$$p_{r,\gamma,n}(\vec{r}) = S p_{2r+\gamma}(s, v) \cdot S p_{2r+\gamma}(s, iu) \cdot \cos(n\pi z / L) \quad (2)$$

donde L es la longitud de la cavidad. El parámetro p que acompaña a la expresión de las funciones S indica la paridad par o impar de la función; γ puede valer 0 ó 1 de acuerdo a si las funciones de Mathieu son de período π ó 2π respectivamente. El parámetro s está relacionado con la distancia interfocal d y la frecuencia f : $\sqrt{s} = \pi f d / c$, en la que c es la velocidad del sonido en el medio gaseoso de la cavidad. Las funciones angulares de Mathieu, las de argumento v , son combinaciones lineales de funciones seno o coseno, según la paridad; las radiales, de argumento u , son combinaciones lineales de productos de funciones de Bessel de argumento u ; los coeficientes de ambas están tabulados⁽⁵⁾.

La dependencia de z de las autofunciones de la ecuación de Helmholtz tiene la forma de $\cos(k_z z)$ con $k_z = n\pi / L$, donde $n=0,1,2,\dots$. Dado que $k^2 = k_t^2 + k_z^2 = (2\pi c / f)^2$, los valores que puede tomar k_z están limitados por los valores de k . k_t es el número de onda transversal.

La solución de la ecuación de onda inhomogénea (1), para la onda acústica, puede ser escrita como:

$$p(\vec{r}, t) = A_0(t) + \sum_j A_j(t) \cdot p_j(\vec{r}) \quad (3)$$

Dado que las autofunciones de la ecuación de Helmholtz son ortogonales, los coeficientes A_j se pueden calcular mediante la expresión:

$$A_0(t) = \frac{(\sigma - 1) \int_{V^{(F)}} H(\vec{r}) dV}{i\omega V} \exp(i\omega t);$$

$$A_j(t) = \frac{i\omega(\sigma - 1) \int_{V^{(F)}} H(\vec{r}) p_j(\vec{r}) dV}{\left(\omega_j^2 - \omega^2 + i \frac{\omega\omega_j}{Q_j} \right) \int_V |p_j(\vec{r})|^2 dV} \exp(i\omega t)$$

$$Q_j^{-1} = \frac{c \int_{\text{sup}} p_j^2(\vec{r}) \xi ds}{\omega_j \int_V p_j^2(\vec{r}) dV}$$

La región de integración $V^{(F)}$, en las integrales del numerador de A_0 y A_j , es el volumen de la fuente generadora de la emisión acústica tanto para la señal como para el ruido; en la integral del denominador, V es el volumen total de la cavidad. Q_j es el factor de calidad (debido a las pérdidas superficiales) de la cavidad para el modo j ; ξ es el valor máximo de la conductancia acústica específica^{(2),(7)} debida tanto al espesor de la película viscosa del gas como al intercambio térmico de la película gaseosa en contacto con la superficie de la cavidad; ω_j es la frecuencia angular de resonancia de la cavidad para ese modo y ω es la frecuencia angular con la que se excita la cavidad.

En los cálculos que se presentan a continuación, se tuvo en cuenta la pequeña diferencia de fase temporal que introduce $A_0(t)$ en la ecuación (3).

Parámetros de la cavidad

La idea de utilizar una cavidad elíptica persigue el objetivo de aumentar la respuesta optoacústica y se fundamenta en que:

1. las funciones de Mathieu de paridad par y período π , con $r=0$ y $\gamma=0$, presentan máximos en el centro de la elipse y en los extremos del eje menor⁽⁶⁾;
2. las funciones de Mathieu de paridad par y período π y 2π , para distintos valores de r y de γ , presentan máximos relativos en los focos de la elipse y en los extremos del eje mayor.

En este trabajo se eligieron los parámetros de la cavidad apropiados para poder excitar los modos correspondientes a la opción 2, excitación que se obtiene cuando el haz láser ingresa a la cavidad por el foco. Se calcularon, tanto para la señal como para el ruido, los correspondientes valores de A_0 y A_j para estos modos y la presión para distintos puntos de ubicación del micrófono, ecuación (3) con $\vec{r} = \vec{r}_m$, siendo \vec{r}_m la ubicación del micrófono. Estos resultados se compararon con el de un resonador equivalente de sección circular, es decir, que oscila a la misma frecuencia que la de la cavidad de sección elíptica.

Se determinaron los valores de s y de d a utilizar. Se eligieron a partir del valor de u que, para cada s , haga cero la derivada normal de la presión: esto significa

físicamente hacer máxima la presión en el contorno de la cavidad. Este valor de u determina la elipse para el modo y la correspondiente frecuencia elegida, pues la relación entre la frecuencia f y el parámetro s es $\sqrt{s} = \pi f d / c$. Para esta determinación se ha considerado nulo el índice del modo longitudinal, $n=0$, en la ecuación (2).

Cálculo de A_j

a.- caso de la señal

El cálculo de A_0 y A_j se efectuó para el caso en que la frecuencia de excitación de la cavidad es igual a la frecuencia de resonancia del modo j elegido. Se consideró que el medio gaseoso que llena la cavidad es nitrógeno a la presión atmosférica y a temperatura ambiente (20°C) con trazas de etileno que suponen una muy pequeña absorción de forma tal que, para facilitar los cálculos, se puede considerar que el haz láser de CO_2 no modifica su intensidad en el trayecto dentro de la cavidad. Esto significa, matemáticamente, no incluir una dependencia de la amplitud del haz respecto del eje z . Asimismo se considera que la intensidad del haz se encuentra uniformemente distribuida en la sección del haz, supuesta de 1 cm de diámetro. Con estas consideraciones la función $H(\vec{r})$ sale como H fuera de la integral del numerador de las expresiones de los coeficientes A_j . El jacobiano de la transformación para las integrales de A_j es: $|J| = (d/2)^2 (\sinh^2 u + \sin^2 v)$. El volumen fuente $V^{(F)}$ es, en este caso, el volumen del medio alcanzado por la radiación láser: un cilindro de 1 cm de diámetro y de longitud L igual a la de la cavidad. V es el volumen total de la cavidad. Con estas consideraciones, las expresiones de A_0 y A_j independientes del tiempo quedan:

$$A_0 = \frac{(\sigma - 1) H \int_{V^{(F)}} |J| du dv dz}{i\omega V};$$

$$A_j = \frac{(\sigma - 1) H \int_{V^{(F)}} p_j(\vec{r}) |J| du dv dz}{\frac{\omega_j}{Q_j} \int_V |p_j(\vec{r})|^2 |J| du dv dz} \quad (4)$$

De esta forma, los resultados que se obtengan serán relativos al factor H . Esto no obstaculiza la comparación entre las respuestas de las cavidades elíptica y cilíndrica pues al ser ambas del mismo largo y contener los mismos gases en iguales condiciones, la absorción del láser se efectuará en ellas en forma similar.

b.- caso del ruido

Entre las diversas fuentes de ruido, la principal es la debida a las ventanas que cierran la cavidad, que generan ruido coherente. Al pasar el haz láser, aquéllas absorben parte de su energía y se calientan. El gradiente de temperatura que se establece entre las ventanas y el gas adyacente a ellas hace que la energía calorífica absorbida por las ventanas se transmita al gas interior de la cavidad, generando una onda acústica en los modos propios de oscilación de la cavidad. La onda de calor, o modo térmico, producida en el gas por esta fuente calorífica decae rápidamente, tal como en el caso de la onda de calor surgida por absorción del láser en el medio y que da origen a la señal acústica.

La potencia calorífica depositada desde las ventanas en el medio gaseoso, N_2 , genera una onda térmica cuyo alcance está dado por la longitud característica de la propagación del modo térmico⁽²⁾, aproximadamente igual a $\delta = \sqrt{K/(\rho C_p \nu)}$ en la cual, la conductividad calorífica

del gas está dada por $K=23.86 \times 10^{-3} W(m.^{\circ}K)^{-1}$; la densidad por $\rho=1.16 kg.m^{-3}$ a la presión atmosférica y temperatura ambiente, la capacidad calorífica a presión constante por $C_p=1.039 J(g.^{\circ}K)^{-1}$; y la frecuencia de excitación de la cavidad es $\nu=2663 Hz$. De esta forma, se puede suponer que el volumen ocupado en el gas por la fuente calorífica está dado por el producto de la sección transversal del haz láser por la longitud δ . Dado el pequeño valor de δ ($\sim 10^{-5} m$) se propone una densidad de potencia de ruido H_r (de origen diferente al H que produce la señal acústica) constante en esa región lo que permite extraerla fuera de la integral de los coeficientes A_j , tal como para el caso de la señal, ecuación (4).

Esta forma de abordar el problema permite realizar un cálculo similar para la cavidad de sección circular y comparar los resultados para ambas.

Resultados

I.- Caso de la señal

a) Presión relativa en la posición del micrófono

Se calculó la presión (relativa a H), dada por la ecuación (3), en los puntos extremos del eje mayor del contorno elíptico, puntos en los que las funciones de Mathieu pares de período π y 2π tienen máximos relativos y son posiciones favorables para ubicar al micrófono. Asimismo se calculó la presión relativa a H en el extremo del eje menor de la elipse ya que, por tener las funciones de Mathieu par de período 2π un máximo relativo en ese punto, es también una posición favorable para la ubicación del micrófono. La frecuencia de resonancia elegida en todos los casos es de $2663 Hz$. Se simula que el haz láser está centrado en uno de los focos (lo que permite excitar los modos pares de períodos π y 2π de oscilación de la cavidad). Al haz láser se lo supone con una superficie circular de $1 cm$ de diámetro.

Los modos utilizados son los de las funciones de Mathieu par de período 2π con $\gamma = 1$ y $r = 0$ y 1 ; y las funciones par de período π con $\gamma = 0$ y $r = 0$; 1 y 2 .

Con los valores dados para la frecuencia y la longitud de la cavidad ($L = 20 cm$) los únicos valores posibles para n en la ecuación (2) son $0, 1, 2$ y 3 . Puesto que el micrófono se supone ubicado en algún punto del contorno en la posición $z = L/2$, al reemplazar dicho valor en la parte correspondiente de cualquiera de las autofunciones $p_j(\vec{r})$ de la ecuación (3), se obtiene $\cos(n\pi/L) = \cos(n\pi/2)$ que será distinto de cero para $n = 0$ ó 2 . Para $n = 2$ las autofunciones de Mathieu quedan multiplicadas por $\cos(2\pi/L)$. Al integrar sobre z entre 0 y L para el cálculo de los coeficientes A_j , la integral se anula: $\int_0^L \cos(2\pi/L) dz = 0$. Esto indica que en la cavidad

sólo pueden ser captados en la posición del micrófono los modos dados por la ecuación (2) con $n = 0$.

Se tomaron distintos valores de la distancia interfocal para el cálculo de la presión. Los resultados se muestran en la tabla 1.

TABLA 1

Presión relativa a H (multiplicada por 10^4) en los puntos de ubicación del micrófono				
d (cm)	e	x=a y=0	x=-a y=0	x=0 y=b
4,202	0.54	8.4	6.12	6.88
5,042	0.65	6.66	3.32	4.44
5,88	0.75	7.08	1.95	3.6
6,3025	0.8	10.6	4.19	6.06
6,72	0.85	13.9	5.22	7.72

a: semieje mayor
b: semieje menor
d: distancia interfocal
e: excentricidad

El gráfico de la presión relativa en función de la distancia interfocal, para distintas posiciones del micrófono, se muestra en la figura 1.

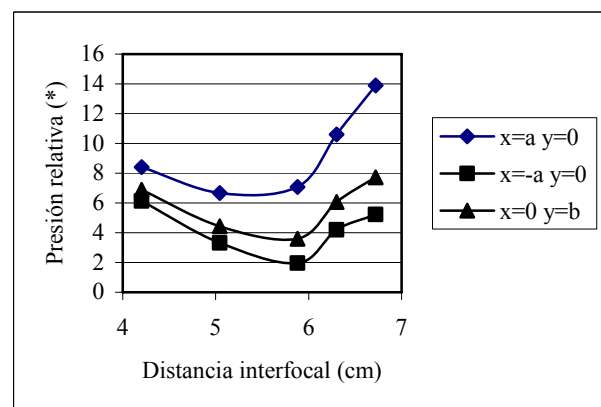


Figura 1: (*) multiplicada por 10^4

Para comparar este resultado con los que se obtienen en cavidades ya utilizadas, se calcularon los coeficientes A_j para una celda de sección circular (de igual longitud y con gases idénticos a los de la cavidad de sección elíptica) que resuena a la misma frecuencia de $2663 Hz$ en el modo longitudinal $k=0$; azimutal $m=0$ y radial $n=1$. El radio de esta celda es $R=8.05 cm$. Las autofunciones de la presión p_j para esta cavidad son:

$$p_{0,1,0}(r) = J_0(\pi\alpha_{0,1}r/R) \quad (5)$$

donde L es la longitud de la celda y $\alpha_{0,1} = 1.2197$ es la raíz enésima de la derivada normal a la superficie lateral del cilindro de la función de Bessel de orden $m=0$. El micrófono está ubicado en algún punto del contorno $r=R$, en $z=L/2$.

El valor de la presión relativa a H en el punto de ubicación del micrófono (superficie del contorno), ecuación (4), obtenida para p_j dada por la ecuación (5), es 0.00012 .

II.- Caso del ruido

Se efectuó el cálculo de la señal de ruido coherente en ambas cavidades, elíptica y cilíndrica, para una misma frecuencia de excitación de 2663 Hz . En el caso de la cavidad elíptica se tuvo en cuenta que, como consecuencia de que el volumen ocupado por la fuente de ruido en el gas es diferente al volumen ocupado por la fuente de señal, k_z tendrá dos valores: $k_z=0$ para $n=0$ y $k_z=31.42 \text{ m}^{-1}$ para $n=2$. Esto implica que en la cavidad se pueden excitar modos transversales con $k_t=35.76 \text{ m}^{-1}$, además del correspondiente a $n=0$ de $k_t=47.60 \text{ m}^{-1}$.

Para el cálculo se eligió una sección elíptica de distancia interfocal $d=6.72 \text{ cm}$, con semiejes $a=3.934 \text{ cm}$ y $b=2.44 \text{ cm}$, y se supuso al micrófono ubicado en un extremo del semieje menor. En este caso, la presión de ruido en el micrófono, relativa a la densidad de potencia de ruido H_r , es: 3.32×10^{-7} .

La cavidad de sección cilíndrica, ya descrita, se supone que está cerrada por ventanas idénticas a las correspondientes a la cavidad elíptica y que es excitada de igual forma. En este caso, la presión de ruido en el micrófono relativa a la densidad de potencia de ruido H_r , es: 1.27×10^{-7} .

b) Q de la cavidad

Se calcularon los valores del Q_i de ambas cavidades tomando sólo en consideración los mecanismos de pérdidas superficiales. El correspondiente a la cavidad de sección circular es de 1200 , en tanto que los valores para los distintos modos de oscilación de la cavidad de sección elíptica (y para distintas distancias interfocales) varían entre 100 y 350 . Estos valores de Q_i , menores que los de la cavidad de sección circular en un orden de magnitud, representa una desventaja de selectividad para la cavidad de sección elíptica. Esto podría compensarse con la mayor amplitud de señal que, en todos los casos calculados, se pone de manifiesto para la cavidad de sección elíptica.

Discusión

Todos los valores calculados para la presión de señal relativa en los posibles puntos de ubicación del micrófono en la cavidad de sección elíptica cuando el haz láser pasa por uno de los focos, son superiores al obtenido para la cavidad de sección circular oscilando en el modo $0,1,0$ a la frecuencia de modulación del láser de 2663 Hz .

En el caso del cálculo estimado para el ruido coherente generado por el calentamiento de las ventanas, la señal de ruido en el micrófono tiene una amplitud relativa mayor para la cavidad de sección elíptica en todos los casos analizados.

En este trabajo no es posible establecer una relación señal-ruido debido al carácter estimativo del cálculo y a que existen otras fuentes de ruido que no fueron consideradas. Se pueden relacionar entre sí las amplitudes de señal calculadas para ambas cavidades por un lado y las correspondientes al ruido antes calculado por otro. En el caso de una cavidad de sección elíptica de distancia interfocal $d=6.72 \text{ cm}$ y excentricidad 0.85 , con el micrófono ubicado en el extremo del semieje menor, las relaciones antes mencionadas son 6.4 y 2.6 respectivamente. Este resultado, si bien no relaciona señal y ruido para cada cavidad, es favorable, en el cálculo, a la cavidad de sección elíptica.

Dado que para el conjunto de elipses consideradas las superficies de la sección transversal (entre 35 y 40 cm^2) son considerablemente menores a la de la sección circular (203 cm^2), se puede suponer que las pérdidas volumétricas serán menores en cualquiera de las cavidades de sección elíptica que las de la sección circular.

Una forma posible de disminuir la influencia del ruido debido al calentamiento de las ventanas, que genera también una señal optoacústica⁽⁷⁾, es separar cada ventana de la cavidad resonante por medio de un filtro acústico. Este filtro podría consistir en dos cilindros como indica la figura 2 (el plano de esta vista es perpendicular al semieje menor de la elipse. El haz láser ingresa a la cavidad de sección elíptica por el foco).

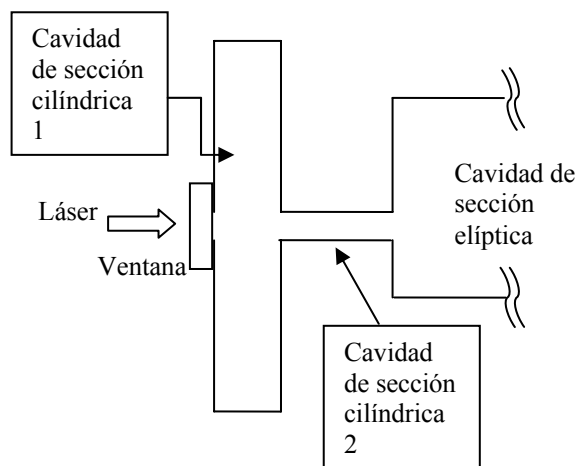


Figura 2

La cavidad 1 es un cilindro de dimensiones tales que no sea resonante a la frecuencia de excitación (2663 Hz). La cavidad 2 es un cilindro de longitud igual a un cuarto de la longitud de onda correspondiente a la onda acústica en la cavidad elíptica y con diámetro de la sección del orden del diámetro del haz láser (lo que asegura que tampoco es resonante a la frecuencia de excitación).

En el caso de la cavidad resonante de sección circular se han propuesto diversas alternativas más o menos exitosas para eliminar el ruido^{(7),(8)}.

Estos cálculos son un fuerte indicio de que la cavidad de sección elíptica excitada por el haz láser centrado en uno de los focos tendría una respuesta superior a la calculada para una cavidad de sección circular equivalente, es decir, que oscila en la misma frecuencia. La frecuencia utilizada para el cálculo fue elegida para efectuar la determinación experimental futura.

Referencias

- 1.- A. Miklós and P. Hess "Application of acoustic resonators in photoacoustic trace gas analysis and metrology", Rev. Sci. Instrum., vol 72, 1937-1955, (2001).
- 2.- P.M. Morse and K.U. Ingard "Theoretical Acoustics", Chapter 6, McGraw-Hill Inc., 1968.

- 3.- H. Margenau y G.M. Murphy “Las Matemáticas de la Física y de la Química”, Cap. V, Ediciones y Publicaciones Españolas S.A., Madrid, 1952.
- 4.- J.J. Stamnes and B. Spjelkavik “New method for computing eigenfunctions (Mathieu functions) for scattering by elliptical cylinders”, Pure Appl. Opt., vol 4, 251-262, (1995).
- 5.- J.A. Stratton, P.M. Morse, L.J. Chu and R.A. Hutner “Elliptic Cylinder and Spheroidal Wave Functions” Publication of the Technology Press, MIT, (1941).
- 6.- Ladaga J. L. y Mosquera C. F. “Cavidad resonante cilíndrica de sección elíptica para el análisis de señales optoacústicas”, Anales AFA, vol. 17, 73-76 (2005).
- 7.- Lu-Yuan Hao et al.”A new cylindrical photoacoustic cell with improved performance” Rev. Sci. Instrum., vol 71, 404-410, (2002).
- 8.- P. Hess “Resonant Photoacoustic Spectroscopy” Top. Curr. Chem., vol 111, 1-32, (1983).