

HACIA PRÓTESIS DE RODILLA MÁS DURADERAS: EL MODELO DE PHAN-THIEN Y TANNER Y LA LUBRICACIÓN ELASTOHIDRODINÁMICA

TOWARDS MORE DURABLE KNEE PROSTHESES: THE PHAN-THIEN AND TANNER MODEL AND THE ELASTO-HYDRODYNAMIC LUBRICATION

B. A. Weiss^{*1}, S. Ubal¹ y J. Di Paolo¹

¹Grupo Biomecánica Computacional (GBC) – Facultad de Ingeniería – Universidad Nacional De Entre Ríos, Ruta Prov. 11 km 10 – (3100) Oro Verde – Entre Ríos – Argentina.

Recibido: 9/11/21; Aceptado: 17/11/21

El fluido sinovial que lubrica las prótesis de rodilla usualmente se asume como newtoniano a pesar de ser viscoelástico. En este trabajo se presenta un modelo basado en la ecuación de Reynolds y en la ley reológica de Phan-Thien y Tanner (PTT). El modelo, de tipo elipsoide-sobre-plano, contempla la curvatura de las superficies articulares y asume que el componente tibial, típicamente fabricado en polietileno de ultra alto peso molecular (UHMWPE) se deforma de acuerdo al modelo de columna. Utilizando el software comercial COMSOL Multiphysics versión 5.2 se resolvieron simultáneamente las ecuaciones gobernantes del flujo de lubricación no newtoniano para encontrar la componente del tensor de tensiones totales para el modelo PTT, en la dirección perpendicular al flujo, y la forma del canal de flujo. A partir de estos resultados se calcularon las fuerzas de fricción y los coeficientes de fricción sobre las superficies articulares. Se realizaron simulaciones para distintas condiciones operativas correspondientes a la lubricación elasto-hidrodinámica, mecanismo de lubricación predominante en la fase de apoyo simple del ciclo de marcha. Los resultados manifiestan la importancia de un adecuado modelo para obtener información cuantitativa, considerar al fluido como newtoniano conduciría a sobreestimaciones del espesor de película lubricante. Los resultados sugieren que, mientras el régimen de lubricación sea de película delgada, la viscosuplementación y consiguiente aumento de la constante de relajación λ conduciría a menores coeficientes de fricción. Sin embargo, para que el régimen de lubricación corresponda al de película delgada, la constante de relajación del fluido debería ser inferior a 2.5×10^{-5} s.

Palabras Clave: fluido no newtoniano, elasticidad, lubricación.

The synovial fluid is usually assumed to be Newtonian despite its viscoelastic behavior. In this work a model based on the Reynolds equation and the Phan-Thien and Tanner rheological law (PTT) is presented. The model, of the ellipsoid-on-plane type, contemplates the curvature of the articular surfaces and assumes the tibial component, typically made of ultra-high molecular weight polyethylene (UHMWPE), is deformed according to the column model. Using commercial software COMSOL Multiphysics version 5.2, the governing equations of non-Newtonian lubrication flow were simultaneously solved to find the component of the total stress tensor for the PTT model, in the direction perpendicular to the flow, and the lubricating film thickness. From these results the friction forces and friction coefficients on the articular surfaces were calculated. Simulations were carried out for different operating conditions corresponding to elasto-hydrodynamic lubrication, the predominant lubrication mechanism in the simple support phase of the gait cycle. The results show the importance of an adequate model to obtain quantitative information, considering the fluid as Newtonian would lead to overestimations of the lubricant film thickness. The results suggest that, as long as thin film lubrication is the lubrication regime, the viscosupplementation and consequent increase in relaxation constant λ would lead to lower coefficients of friction. However, for the lubrication regime to be thin film lubrication, the relaxation constant of the fluid should be less than 2.5×10^{-5} s.

Keywords: non-newtonian fluid, elasticity, lubrication.

<https://doi.org/10.31527/analesafa.2022.fluidos.36>



ISSN 1850-1168 (online)

I. INTRODUCCIÓN

Los implantes metal-polietileno de ultra alto peso molecular (UHMWPE) son los más populares para el reemplazo de articulaciones de rodilla. Las consecuencias del desgaste de las superficies protésicas constituyen el principal factor limitante de su vida útil [1], la cual resulta insatisfactoria para pacientes menores de 60 años, que deben someterse a nuevas intervenciones quirúrgicas (llamadas “revisiones”) para reemplazar dichos implantes [1]. Las revisiones son cirugías complicadas, riesgosas y costosas; además, los nue-

vos implantes suelen ser menos exitosos que los primeros [2].

Al igual que las articulaciones naturales, el implante está lubricado con fluido sinovial, siendo esto un factor fundamental para reducir la fricción y el desgaste de las superficies en contacto.

Este trabajo tiene como objetivo investigar el fenómeno de contacto lubricado entre las superficies de los componentes de prótesis de rodilla, con el fin de predecir combinaciones de parámetros geométricos, físicos y operativos que aseguren la existencia del contacto lubricado, minimicen la fricción evitando el contacto sólido-sólido entre las

* brenda.weiss@uner.edu.ar

partes y de esta forma permitan incrementar la vida útil del implante.

II. MÉTODOS

La prótesis de rodilla posee dos cóndilos convexos articulando, cada uno de ellos, con un cóndilo cóncavo presente en el platillo tibial. En este trabajo se considera el modelo de elipsoide sobre plano [3] para modelar un cóndilo femoral articulando con el correspondiente cóndilo tibial (Fig. 1). A partir de los radios de curvatura de estas superficies (R_{fx} y R_{tx}) se obtienen los radios equivalente del elipsoide en cada una de las direcciones principales: R_x en la dirección anteroposterior o dirección de la marcha (Ec. (1)), y R_y en dirección medial-lateral (Ec. (2) [4]):

$$R_x = \frac{R_{fx}R_{tx}}{R_{tx} - R_{fx}}, \quad (1)$$

$$R_y = 2.844R_x. \quad (2)$$

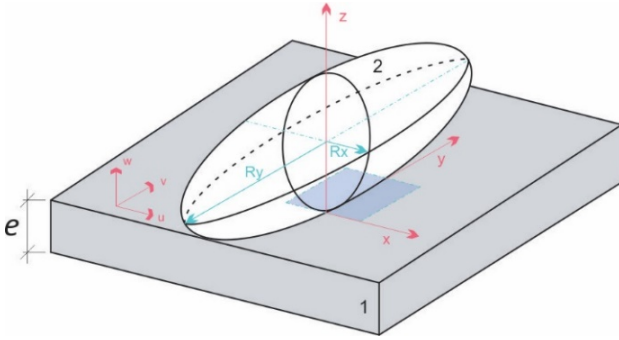


FIG. 1: Modelo de elipsoide sobre plano, componentes del vector velocidad (u, v, w) sistema de coordenadas y dominio (celeste). e es el espesor del sustrato deformable, R_x y R_y son los radios principales del elipsoide.

En un estado indeformado (Fig. 2), la altura del canal de lubricación h será igual a la distancia instantánea entre el sustrato (fijo) y la superficie del elipsoide (móvil), la cual, está dada por $h(x, y) = h_{00} + x^2/(2R_x) + y^2/(2R_y)$, donde h_{00} es la menor distancia entre las superficies indeformadas (en $x = y = 0$). Adicionando el desplazamiento δ_z en cada punto del sustrato deformable debido a la deformación del mismo, se obtiene la ecuación de altura del canal:

$$h = h_{00} + \frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y} + \delta_z. \quad (3)$$

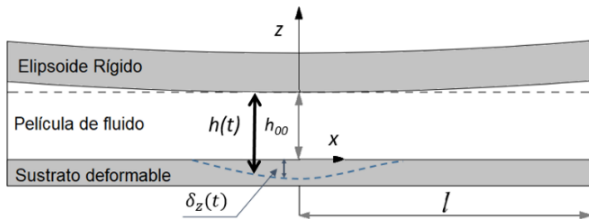


FIG. 2: Vista del plano $y=0$, $L=2l$ es la longitud del dominio en dirección x , l es la longitud del dominio en dirección y (debido a la condición de simetría), h es el espesor de la película lubricante.

El elipsoide se considera rígido y el sustrato deformable adopta las características mecánicas del UHMWPE (Tabla

TABLA 1: Parámetros adoptados

	Descripción	Valor
l	Semi-longitud en dirección R_x y longitud en dirección R_y	0.02 m
R_x	Radio equivalente en dirección x	123.7 mm
R_y	Radio equivalente en dirección y	352 mm
E	Módulo de elasticidad del UHMWPE	1 GPa
ν	Coefficiente de Poisson del UHMWPE	0.4
e	Espesor del sustrato deformable	10 mm
ξ	Constante de deslizamiento del modelo PTT	0.4
η_0	Viscosidad dinámica del solvente del fluido sinovial	0.1 Pa s

1). En este trabajo se adopta el modelo de columna (modelo simplificado de elasticidad lineal).

En la fase de apoyo simple del ciclo de marcha se evidencian las máximas cargas en la articulación de rodilla, y el mecanismo de lubricación predominante es la lubricación elastohidrodinámica (EHL).

Si bien el líquido sinovial es un fluido viscoelástico y pseudoplástico, usualmente se lo considera como un fluido newtoniano o newtoniano generalizado [4-7]. En este trabajo se lo modela como un fluido viscoelástico de Phan Thien y Tanner (PTT). En consecuencia, en estado estacionario, se obtiene una ecuación de Reynolds modificada, que contempla a este tipo de fluidos (más detalles en [8, 9]):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{h^3}{12\eta} \left(\frac{\partial \pi_{zz}}{\partial x} - b_1 \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{h^3}{12\eta} \left(\frac{\partial \pi_{zz}}{\partial y} - b_2 \right) \right\} = u_e \frac{\partial h}{\partial x} \quad (4)$$

$$\eta \approx \frac{\eta_0}{1 + \lambda^2 \xi (2 - \xi) (\widehat{\gamma}_x^2 + \widehat{\gamma}_y^2)} \quad (5)$$

$$b_1 = \lambda \frac{\partial \left(\xi \eta \widehat{\gamma}_y^2 + 2\eta \widehat{\gamma}_x^2 \right)}{\partial x} + (2 - \xi) \lambda \frac{\partial \eta \widehat{\gamma}_x \widehat{\gamma}_y}{\partial y} \quad (6)$$

$$b_2 = (2 - \xi) \lambda \frac{\partial \eta \widehat{\gamma}_x \widehat{\gamma}_y}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \left(\xi \eta \widehat{\gamma}_x^2 + 2\eta \widehat{\gamma}_y^2 \right)}{\partial y} \quad (7)$$

donde π_{zz} es la componente normal del tensor total de tensiones, λ es la constante de relajación del fluido, ξ es un parámetro del modelo PTT, η es la viscosidad aparente del fluido. La velocidad de arrastre $u_e = (u_t + u_f)/2$ siendo u_t la velocidad del componente tibial y u_f la velocidad del componente femoral, ambas en dirección x . Los valores de u_e pueden determinarse a partir del ángulo de flexión y el desplazamiento antero-posterior en el plano sagital. En este trabajo se utiliza la velocidad de arrastre obtenida a partir de la norma ISO 14243-3 [4, 7], la cual describe un ensayo de desgaste en prótesis de rodilla.

Dada la no linealidad de las componentes del tensor de tensiones viscosas, se asume que el flujo viscoelástico consiste de un flujo base Newtoniano que sufre una perturbación no-newtoniana permitiendo estimar los cuadrados de los gradientes de velocidad a través del espesor de la película lubricante a partir de los valores medios de los cuadrados de los gradientes de velocidad newtoniana: $\widehat{\gamma}_x^2, \widehat{\gamma}_y^2, \widehat{\gamma}_x \widehat{\gamma}_y$. Se requiere entonces resolver el problema análogo newto-

TABLA 2: Casos de estudio [4].

Tiempo (s)	Velocidad de arrastre u_e (mm/s)	Carga soportada por cóndilo medial (N)
0.03	16.8	1192
0.08	40.9	812
0.13	19.6	1659
0.45	14.9	1558
0.50	57.6	1192

niano (con idénticas condiciones geométricas, operativas y mecánicas pero considerando al fluido sinovial como Newtoniano).

La capacidad de carga (W) de la película lubricante se obtiene al integrar la componente normal del tensor de tensiones (π_{zz}) en el dominio (Ω):

$$W = \int_{\Omega} \pi_{zz} d\Omega \quad (8)$$

Dada la simetría del problema respecto al eje x , las ecuaciones gobernantes (Ecs. (3), (4) y (8)) se resolvieron en la mitad del dominio, utilizando el software comercial COMSOL Multiphysics (basado en el método de elementos finitos) y adoptando las condiciones de frontera que se muestran en la Fig. 3. Para facilitar la convergencia, la obtención de resultados se realiza para cargas gradualmente crecientes, utilizándose como inicialización en cada cálculo los resultados obtenidos para una carga inferior.

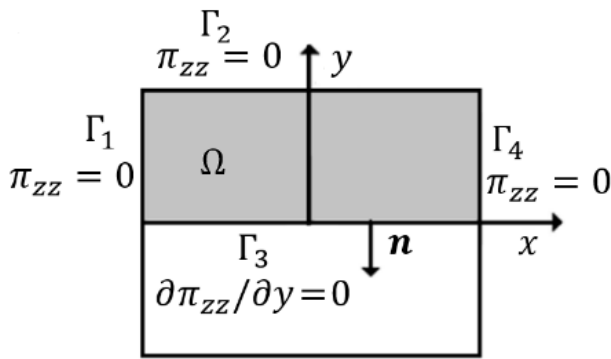


FIG. 3: Dominio (Ω , en gris) simétrico respecto a eje x , y condiciones en las fronteras: $\pi_{zz} = 0$ en las fronteras Γ_1 , Γ_2 y Γ_4 , $\partial\pi_{zz}/\partial y=0$ (simetría) en Γ_3 .

Dado que la carga y la velocidad de arrastre varían a lo largo de un ciclo de marcha, se seleccionaron como casos de estudio a los instantes correspondientes a máximos de carga o velocidad, a lo largo de la fase de apoyo simple (ver Tabla 2).

III. RESULTADOS

La carga aplicada es la misma para el caso PTT y el newtoniano, por lo que la distribución de presiones y de la componente normal del tensor de tensiones es idéntica, evidenciando un máximo en el centro del canal. La Fig. 4 muestra la máxima componente normal del tensor de tensiones obtenidos en este trabajo. Se observa una buena concordancia entre estos resultados y los obtenidos por Su et al [4]. El efecto de considerar la viscoelasticidad del fluido se aprecia, principalmente, en el espesor de la película lubricante.

La Tabla 3 presenta el mínimo espesor de película lubricante de fluido PTT (h_{min}) y de fluido newtoniano (h_{min}^N) para los distintos casos de estudio, con $\lambda = 10^{-6}$ s, 2.5×10^{-5} s

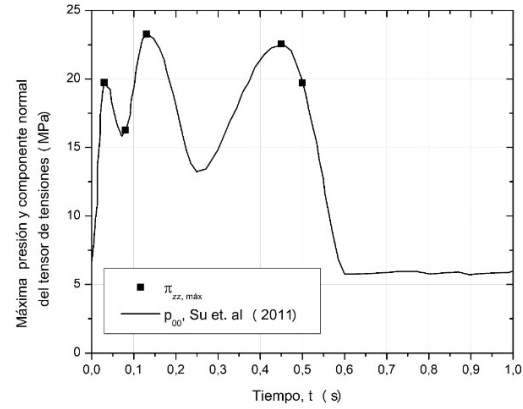


FIG. 4: Máxima componente normal del tensor de tensiones ($\pi_{zz,max}$, símbolos llenos) vs tiempo (t), considerando fluido PTT. En línea llena se presenta la máxima presión ($p_{00} = p_{max}$ obtenida por Su et al. [4], considerando fluido newtoniano e idénticos parámetros geométricos, físicos y operativos (R_x , R_y , e , E , v , u_e , W , η_0) que en este trabajo.

y 3×10^{-5} s. En esta tabla el número adimensional de Weissenberg (We), número que representa la relación entre las fuerzas elásticas y viscosas, se calcula a partir del espesor mínimo obtenido en cada caso, y su correspondiente constante de relajación (λ) y velocidad de arrastre (u_e). En fluidos newtonianos $We = 0$.

En la Tabla 3 se aprecia que, para todos los tiempos en estudio, considerar $\lambda = 10^{-6}$ s conduce a números de Weissenberg del orden de 10^{-2} y a espesores de película lubricante que difieren menos del 0.3% respecto al correspondiente caso newtoniano. Además, la viscosidad aparente al considerar $\lambda = 10^{-6}$ s es superior al 99% de la viscosidad a tasa de corte cero η_0 (considerada para el caso newtoniano).

La Fig. 5 presenta el espesor de película lubricante (h) a lo largo de la línea de simetría ($y=0$) para el caso correspondiente al tiempo $t=0.13$ s, momento en que tiene la máxima carga sobre la articulación.

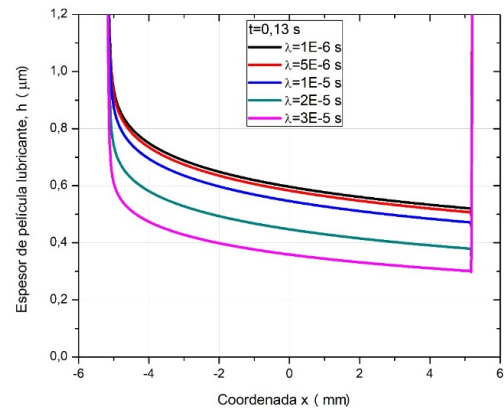


FIG. 5: Espesor de película lubricante (h) vs coordenada x , en la línea de simetría ($y=0$), considerando distintas constantes de relajación del fluido (λ , leyenda) para el caso correspondiente al tiempo $t=0.13$ s.

TABLA 3: Número de Weissenberg (We) y mínimo espesor de película lubricante de fluido PPT (h_{min}) y de fluido newtoniano (h_{min}^N) considerando $\lambda = 10^{-6}$, 2.5×10^{-5} y 3×10^{-5} s con $\eta_0 = 0.1$ Pa.s.

t (u_e)	λ (s)	h_{min} (μm)	h_{min}^N (μm)	$\frac{(h_{min} - h_{min}^N)}{h_{min}^N} 100\%$	We ($\lambda u_e / h_{min}$)	$\frac{\eta_{min}}{\eta_0}$
0.03	10^{-6}	0.49	0.49	-0.09	0.03	0.997
	2.5×10^{-5}	0.32		-34.83	1.33	0.323
	3×10^{-5}	0.28		-43.34	1.83	0.249
0.08	10^{-6}	0.79	0.80	-0.19	0.05	0.993
	2.5×10^{-5}	0.44		-44.52	2.32	0.183
	3×10^{-5}	0.36		-54.28	3.38	0.134
0.13	10^{-6}	0.51	0.51	-0.11	0.03	0.996
	2.5×10^{-5}	0.33		-35.54	1.27	0.271
	3×10^{-5}	0.29		-42.09	1.69	0.205
0.45	10^{-6}	0.45	0.45	-0.07	0.03	0.997
	2.5×10^{-5}	0.31		-31.95	1.22	0.332
	3×10^{-5}	0.28		-38.57	1.62	0.256
0.5	10^{-6}	0.90	0.91	-0.24	0.06	0.989
	2.5×10^{-5}	0.40		-55.95	3.60	0.126
	3×10^{-5}	0.37		-58.80	4.62	0.091

En la Fig. 5 y en la Tabla 3 se aprecia que el aumento de la constante de relajación del fluido λ conduce a la disminución del espesor de la película lubricante, observándose un mínimo en la desembocadura del canal. Por lo tanto, asumir al fluido sinovial como fluido Newtoniano conduciría a estimaciones de espesores de película lubricante mayores a los que en realidad se producirían.

En la Fig. 6 se presentan la altura mínima y central obtenidas con distintas constantes de relajación λ , y los resultados obtenidos por Su *et al.* [4] al simular la lubricación elastohidrodinámica dependiente del tiempo. Las grandes diferencias observadas podrían atribuirse al fenómeno de aplastamiento de la película lubricante, no simulado en este trabajo.

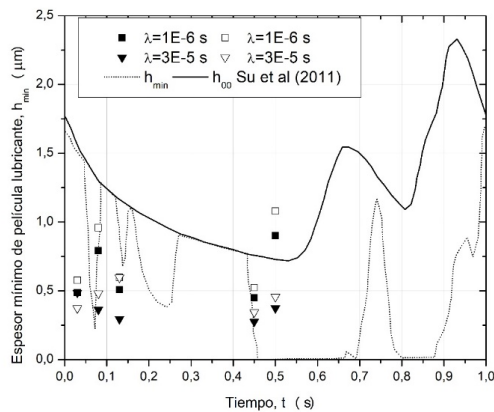


FIG. 6: Espesor mínimo (h_{min} , símbolos vacíos) y central (h_0 , símbolos llenos) de película lubricante vs tiempo (t), para distintas constantes de relajación (λ). Resultados considerando fluido PPT con $\eta_0=0,1$ Pa.s. Se presentan el espesor central (línea llena) y mínimo (línea punteada) de película lubricante obtenidos por Su *et al.* [4], considerando fluido newtoniano e idénticos parámetros geométricos, físicos y operativos (R_x , R_y , e , E , v , u_e , W , η_0) que en este trabajo.

El régimen de lubricación depende del espesor de la película lubricante y de la rugosidad equivalente de las super-

ficies articulares. Contemplando la situación más favorable, con $0.1 \mu\text{m}$ de rugosidad del UHMWPE, h debería ser superior a $0.3 \mu\text{m}$ para que el régimen de lubricación sea de película delgada. Los resultados presentados en la Tabla 3 sugieren que si $\lambda > 2.5 \times 10^{-5}$ s el régimen de lubricación correspondería a la lubricación mixta ($0.1 \mu\text{m} < h_{min} < 0.3 \mu\text{m}$).

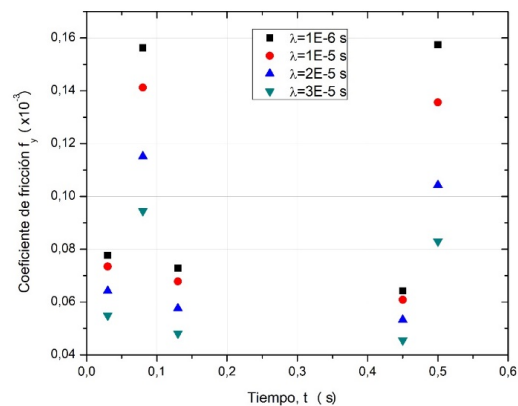
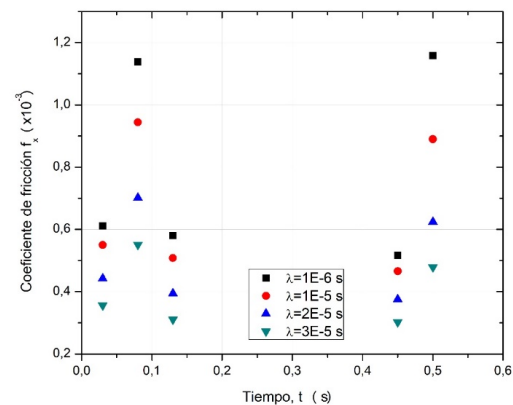


FIG. 7: Coeficiente de fricción a) en dirección x (f_x) y b) en dirección y (f_y) vs tiempo (t), para distintas constantes de relajación (λ).

El aumento de λ conduce a una disminución en la mínima viscosidad aparente, alcanzando viscosidades entre 0.01 y 0.03 Pa.s ($0.1 \leq \eta_{min}/\eta_0 \leq 0.3$, Tabla 3) acordes a resultados experimentales [10].

Las Figs. 7 y 8 presentan los coeficientes de fricción (f_x y f_y) y los coeficientes de fricción relativos al caso análogo newtoniano (f_x/f_x^N y f_y/f_y^N). Cuando $\lambda = 10^{-6}$ s, se tienen coeficientes de fricción relativos aproximadamente 1 para todos los instantes del ciclo de marcha simulado. El aumento de λ conduce a la reducción del coeficiente de fricción y coeficiente de fricción relativo. Estos resultados indicarían la importancia del comportamiento viscoelástico del fluido sinovial en la buena performance de las articulaciones sinoviales jóvenes y sanas (las cuales presentan las mayores constantes de relajación λ [11]).

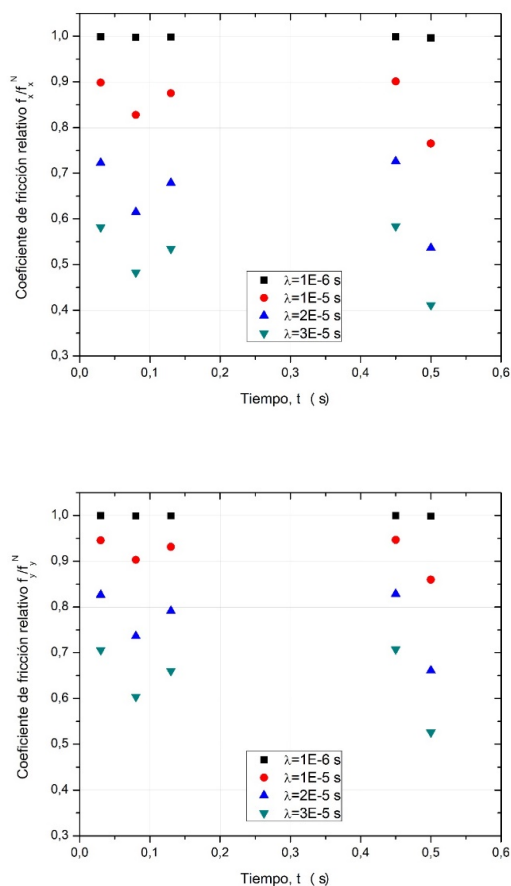


FIG. 8: Coeficiente de fricción relativo a) en dirección x (f_x/f_x^N) y b) en dirección y (f_y/f_y^N) vs tiempo (t), para distintas constantes de relajación (λ).

IV. CONCLUSIONES

Asumir al fluido sinovial como fluido Newtoniano podría conducir a estimaciones de espesores de película lubricante mayores a los que en realidad se producirían. De aquí la importancia de un apropiado modelado de este fluido, tanto en experimentos numéricos como en ensayos de prótesis.

Los resultados sugieren que, mientras el régimen de lubricación sea de película delgada (lo cual sucede con $\lambda \leq 2.5 \times 10^{-5}$ s), la viscosuplementación y consiguiente au-

mento de λ conduciría a menores coeficientes de fricción.

Las diferencias observadas al comparar los espesores central y mínimo con los resultados de Su *et al.* [4] podrían atribuirse a la lubricación por aplastamiento de la película lubricante, no simulada en este trabajo. La resolución del modelo completo, incluyendo el aplastamiento y la lubricación elastohidrodinámica, será explorada en futuros trabajos para corroborar esta hipótesis.

REFERENCIAS

- [1] P. F. Sharkey, W. J. Hozack, R. H. Rothman, S. Shastri y S. M. Jacoby. Why Are Total Knee Arthroplasties Failing Today? *Clinical Orthopaedics and Related Research* **404**, 7-13 (2002).
- [2] D. J. Paulo. *Biotribology* (Wiley, London, 2013).
- [3] Z. M. Jin, D. Dowson y J. Fisher. Contact Pressure Prediction in Total Knee Joint Replacements Part I: General Elasticity Solution for Elliptical Layered Contacts. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H: Journal of Engineering in Medicine* **209**, 1-8 (1995).
- [4] Y. Su, P. Yang, Z. Fu, Z. Jin y C. Wang. Time-dependent elastohydrodynamic lubrication analysis of total knee replacement under walking conditions. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering* **14**, 539-548 (2011).
- [5] J. D. Paolo y M. E. Berli. Numerical analysis of the effects of material parameters on the lubrication mechanism for knee prosthesis. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering* **9**, 79-89 (2006).
- [6] M. Mongkolwongrojn, K. Wongseedakaew y F. E. Kennedy. Transient elastohydrodynamic lubrication in artificial knee joint with non-Newtonian fluids. *Tribology International* **43**, 1017-1026 (2010).
- [7] *ISO 14243-3. Implants for Surgery - Wear of Total Knee-Joint Prostheses - Part 3: Loading and Displacement Parameters for Wear-Testing Machines with Displacement Control and Corresponding Environmental Conditions for Test.*
- [8] B. A. Weiss, B. Bou-Said, S. Ubal y J. D. Paolo. The Phan-Thien and Tanner Model Applied to the Lubrication of Knee Prostheses. *Journal of Biomechanical Engineering* **141** (2019).
- [9] B. A. Weiss, S. Ubal, M. E. Berli y D. P. José. Investigaciones teórico-computacionales para el desarrollo de prótesis articulares de mayor duración para miembro inferior. *Suplemento Ciencia, Docencia y Tecnología* **10** (2020).
- [10] B. Petcharatana. *Rheology of synovial fluid with and without viscosupplements in patients with osteoarthritis: a pilot study* Tesis doct. (University of British Columbia, 2009).
- [11] V. O. Ribitsch. *Viscoelastic behaviour of synovial fluids and artificial replacements* 1.ª ed. (Springer - Verlag New York, 1990).