

# Flujos viscogravitatorios planos convergentes: formación y evolución de crestas

Julio Gratton<sup>1,2,\*</sup> y Carlos Alberto Perazzo<sup>3,2,\*\*</sup>

<sup>1</sup>INFIP-CONICET, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,  
UBA, Ciudad Universitaria, Pab. I, 1428 Buenos Aires.

<sup>2</sup>Investigador del CONICET.

<sup>3</sup>Universidad Favaloro, Solís 453, 1078 Buenos Aires.

(Dated: 4 de octubre de 2007)

Consideramos una capa líquida delgada, inicialmente uniforme, que descansa sobre un substrato horizontal y plano dividido en dos partes, que para  $t > 0$  son empujadas la una hacia la otra con una velocidad constante. Este movimiento convergente arrastra el líquido de modo de producir una cresta. En este trabajo investigamos la evolución temporal de la cresta y otras características del flujo. Encontramos diferentes regímenes autosemejantes que describen el fenómeno en el entorno del instante inicial y para tiempos muy largos.

We consider a thin liquid layer initially uniform, that rests on a horizontal plane substrate divided in two parts, that for  $t > 0$  are pushed one against the other with constant velocity. This convergent motion drags along the liquid and a ridge is formed. Here we investigate the temporal evolution of the ridge as well as other properties of the flow. We find different self similar regimes that describe the phenomenon close to its beginning, and for very large times.

## I. INTRODUCCIÓN

Tiempo atrás uno de nosotros<sup>1</sup> dedujo leyes de escala para la evolución de cordilleras por medio de análisis dimensional y con base en hipótesis físicas sencillas que consisten en el flujo viscoso de una capa delgada, causado por el acortamiento de la corteza terrestre. A fin de alcanzar una mejor comprensión de estas leyes de escala (y otras relacionadas) estamos investigando un modelo sencillo que consiste de una capa fluida inicialmente uniforme que descansa sobre un substrato horizontal y plano dividido en dos partes, que para  $t > 0$  son empujadas la una hacia la otra. Este movimiento convergente de los substratos arrastra el líquido de modo de producir una cresta (ver figura 1). Aquí estudiamos la evolución del flujo y mostramos que existen dos regímenes autosemejantes que se alcanzan en diferentes dominios espacio temporales. Estos regímenes y sus correspondientes leyes de escala se pueden obtener analíticamente. Uno de ellos da lugar a leyes de escala de la misma forma que las obtenidas para la evolución de cordilleras.

## II. ECUACIONES BÁSICAS

Debido a la simetría del problema representado en la figura 1 será suficiente considerar sólo el semiplano  $X > 0$ .

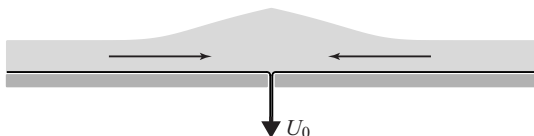


Figura 1: Formación de una cresta debida al movimiento convergente del substrato.

Sea por lo tanto una capa líquida uniforme semiinfinita cuyo espesor es  $H_0$ , que reposa sobre una superficie rígida horizontal. Para tomar en cuenta la simetría del problema podemos imaginar que en  $X = 0$  hay una pared vertical a lo largo de la cual el líquido puede deslizar libremente. Supondremos que en  $T = 0$  el substrato en  $X > 0$  comienza a moverse con velocidad constante  $U_0 < 0$  de modo que el líquido se acumula contra la pared. Supondremos que el flujo es lento y dominado por la viscosidad de manera que se puede emplear la aproximación de lubricación (despreciamos la capilaridad). Sea  $H \equiv H(X, T)$  el espesor de la capa de líquido y  $U \equiv U(X, T)$  la velocidad horizontal promediada verticalmente. La condición de contorno en  $X \rightarrow \infty$  es  $H(\infty, T) = H_0$ . Supondremos además que la condición de contorno en  $X = 0$  es  $U(0, T) = 0$ . Definimos las variables adimensionales  $u, h, x, t$  por medio de

$$U = |U_0|u, \quad H = H_0h,$$

$$X = \frac{g}{3\nu} \frac{H_0^3}{|U_0|} x, \quad T = \frac{g}{3\nu} \frac{H_0^3}{U_0^2} t,$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad y  $\nu$  es la viscosidad cinemática. La ecuación de evolución y las condiciones inicial y de contorno son entonces:

$$h_t = h_x + (h^3 h_x)_x, \quad (1)$$

$$h(x, 0) = 1, \quad h(\infty, t) = 1, \quad h^2 h_x|_{x=0} = -1.$$

De la conservación de la masa resulta  $\frac{d}{dt} \int_0^\infty (h-1) dx = 1$ .

## III. SOLUCIONES NUMÉRICAS

El problema (1) no tiene en general una solución en forma cerrada, por lo que se debe resolver numéricamente.

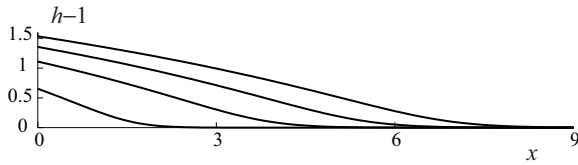


Figura 2: Perfiles numéricos para  $t = 0, 6, 2, 4, 6$ .

Algunos resultados se muestran en la figura 2. Se puede observar que  $h(x)$  tiene un punto de inflexión que a medida que crece  $t$  se desplaza hacia  $x$  mayores y tiende hacia la parte delantera del relieve, donde  $h$  se aproxima a 1. También se observa que el cociente de aspecto (altura / ancho) disminuye con el tiempo. Esto se debe a que al crecer la cresta, el ancho del relieve aumenta más rápidamente porque el término difusivo de la ecuación (1) escala como  $h^4$ .

#### IV. COMPORTAMIENTO PARA $t \ll 1$

Para  $t$  pequeño, cuando  $h$  es próximo a 1, podemos escribir  $h = 1 + z$  con  $z \ll 1$ , y linealizar la (1), que se reduce entonces a

$$z_t = z_x + z_{xx}, \quad z_x|_{x=0} = -1. \quad (2)$$

La solución del problema linealizado (por brevedad omitimos detalles) es

$$z = \frac{e^{-s^2}}{\sqrt{\pi}} \left[ 2\sqrt{t} H_{-2}(s) + \sum_{j=1}^{\infty} (2\sqrt{t})^j H_{-1-j}(s) \right], \quad (3)$$

donde  $s = (x+t)/2\sqrt{t}$  y  $H_q(s)$  es la función de Hermite de orden  $q$ . Nótese que esta solución aproximada no conserva la masa.

La solución (3) no es autosemejante, pero tiende a la autosemejanza para  $t \rightarrow 0$ . En este límite  $z \rightarrow z_s$ , donde

$$z_s = 2\sqrt{t} \left[ \frac{e^{-\psi^2}}{\sqrt{\pi}} - \psi \operatorname{erfc}(\psi) \right], \quad (4)$$

con  $\psi = x/2\sqrt{t}$  y  $\operatorname{erfc}(\psi)$  es la función error complementaria. En la figura 3 mostramos  $z_s$  y las soluciones numéricas de (1) para diferentes tiempos. En la figura 4 mostramos la evolución de la altura máxima  $z(0, t)$  de la cresta. Se puede observar que para  $t$  pequeño tiende al comportamiento autosemejante  $z_s(0, t) = 2\sqrt{t/\pi}$ .

#### V. COMPORTAMIENTO PARA $t \gg 1$

Para tiempos muy largos la solución alcanza otro régimen autosemejante. Se puede mostrar que para  $t \rightarrow \infty$  la solución tiende a

$$h_s = h_w \left( 1 - \frac{x}{x_f} \right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{si } x < x_f, \quad 0 \quad \text{si } x > x_f. \quad (5)$$

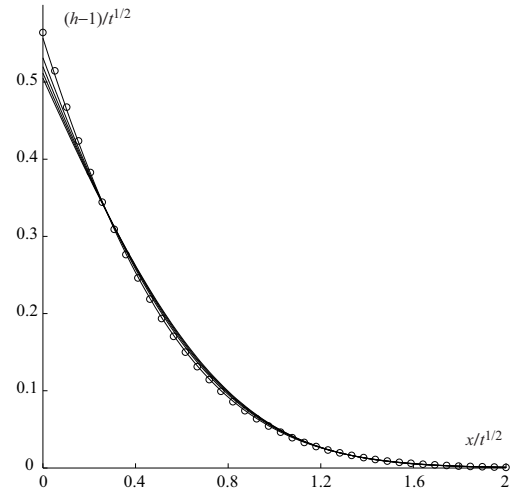


Figura 3: Comparación de las soluciones numéricas de (1) para  $t = 5 \times 10^{-4}, 0,0125, 0,025, 0,0375, 0,05$  (líneas llenas) con la solución autosemejante (4) (cículos).

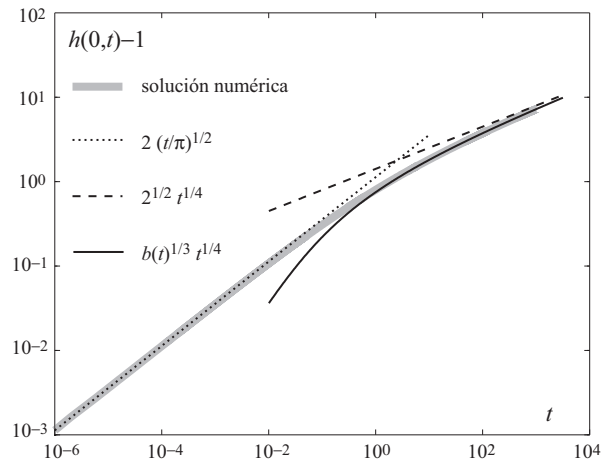


Figura 4: Evolución de la altura máxima de la cresta y sus diferentes leyes de escala.

Aquí

$$h_w = \sqrt{2}t^{\frac{1}{4}}, \quad x_f = \frac{\sqrt{8}}{3}t^{\frac{3}{4}}. \quad (6)$$

Si se considera que el semiancho  $a$  de la cresta está dado por  $x_f$ , las leyes de escala del ancho y la altura del relieve están dadas por (6) y concuerdan con las obtenidas en<sup>1</sup>.

Para tiempos grandes se puede lograr una aproximación mejor que (5) por medio de una solución cuasi autosemejante<sup>2,3</sup>. Se encuentra así una solución aproximada de la forma

$$h_s = h_w \left( 1 - \frac{x}{x_f} \right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{si } x < a, \quad 1 \quad \text{si } x > a, \quad (7)$$

donde  $a = x_f - 1/3$ , y  $h_w$  y  $x_f$  están dados por

$$h_w = b(t)^{\frac{1}{3}}t^{\frac{1}{4}}, \quad x_f = \frac{1}{3}b(t)t^{\frac{3}{4}}, \quad (8)$$

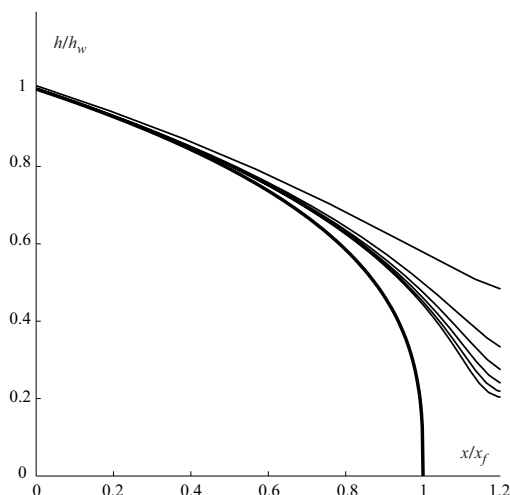


Figura 5: Comparación entre la solución autosemejante (5), (8) (línea gruesa) y la solución numérica para  $t = 6, 30, 54, 78, 102, 126$ .

donde  $b$  es la raíz real y positiva del polinomio  $b^4 - (4 + bt^{-\frac{1}{4}})^3$ . Para tiempos muy grandes la solución cuasi autosemejante tiende a coincidir con  $h_s$  en tanto que  $b \rightarrow \sqrt{8}$ . En la figura 5 comparamos la solución numérica para tiempos grandes con  $h_s$  con el fin de mostrar de qué modo tiende a la autosemejanza. Asimismo, en la figura 4 se puede observar que para tiempos grandes la altura del relieve crece como  $t^{\frac{1}{4}}$  de acuerdo con (6), pero la ley de escala dada por (8) es una mejor aproximación que la dada por (6).

## VI. CONCLUSIONES

De las figuras 3–5 se observa que la evolución de una cresta ocurre en dos etapas. En la etapa inicial el perfil

$h(x)$  se parece al de la solución autosemejante (4). Posteriormente  $h(x)$  tiende a la solución (5). La transición entre una etapa y la otra ocurre para  $t \approx 1$ , y corresponde a la migración del punto de inflexión de  $h(x)$ , que inicialmente se halla muy próximo a  $x = 0$  y a medida que  $t \rightarrow \infty$  se acerca a  $x_f$ . Durante el estadio inicial tanto el ancho como la altura del relieve crecen como  $t^{1/2}$ . A medida que aumenta la altura el derrame lateral se torna dominante de modo que el grueso de la masa que se incorpora al relieve produce un aumento del ancho del mismo, que en consecuencia tiende a crecer más rápidamente que la altura.

Recapitulando, en la formación de crestas se tienen dos regímenes autosemejantes:

- Si  $t \lesssim 0,1$  el perfil está dado por (4) y las escalas horizontal y vertical del relieve crecen ambas como  $t^{1/2}$ .
- Si  $t \gtrsim 1$  el perfil está dado por (5) y la altura del relieve escala como  $t^{1/4}$  mientras que su ancho lo hace como  $t^{3/4}$ .

## Agradecimientos

Agradecemos los subsidios PIP 5377 del CONICET, X031 de la Universidad de Buenos Aires y PICTR 2002-00094 de la ANPCYT.

\* Correo electrónico: jgratton@tinfiplfp.uba.ar

\*\* Correo electrónico: perazzo@favaloro.edu.ar

<sup>1</sup> J. Gratton, *J. Geophys. Res.* **94**, 15627–15634, 1989.

<sup>2</sup> J. Diez, R. Gratton, L. Thomas y B. Marino, *J. Colloid*

*Interface Sci.* **168**, 15–20, 1994.

<sup>3</sup> R. Gratton, J.A. Diez, L.P. Thomas, B. Marino y S. Betelú, *Phys. Rev. E* **53**, 3563–3572, 1996.