

## DESCRIPCIÓN DEL ESTADO FUNDAMENTAL DEL $^{22}\text{C}$ $^{22}\text{C}$ GROUND STATE DESCRIPTION

F. N. Gerdau<sup>\*1,2</sup> y R. M. Id Betan<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup>Instituto de Física de Rosario (IFIR) – Universidad Nacional De Rosario – CONICET, Santa Fe, Argentina

<sup>2</sup>Instituto de Estudios Nucleares y Radiaciones Ionizantes, FCEIA-UNR, Santa Fe, Argentina

<sup>3</sup>Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y agrimensura, UNR, Santa Fe, Argentina

Recibido: 27/04/2023; Aceptado: 02/06/2023

La línea de goteo de neutrones presenta estructuras nucleares exóticas. En este trabajo estudiamos al  $^{22}\text{C}$ , un isótopo borromeano del carbono. El modelo utilizado para comprender sus propiedades es el modelo de capas con energía compleja. Condicionando los parámetros de los potenciales de uno y dos cuerpos a los datos experimentales, se calculó la raíz cuadrática media del radio.

*Palabras Clave:* Línea de goteo, halos borromeanos, núcleos exóticos.

The neutron drip line presents exotic nuclear structures. In this work, we study  $^{22}\text{C}$ , a Borromean isotope of carbon. The Gamow Shell model was used to understand its properties. A Woods-Saxon plus Gaussian mean field defined the single-particle basis. The root means square of the radius was calculated.

*Keywords:* dripline, borromean halo, exotic nuclei.

<https://doi.org/10.31527/analesafa.2023.34.3.71>



ISSN 1850-1168 (online)

### I. INTRODUCCIÓN

La línea de goteo de neutrones se refiere a una región específica de la tabla de nucleidos que se caracteriza por tener una alta concentración de neutrones respecto al número de protones. La baja densidad de los neutrones de valencia provoca algunos fenómenos exóticos entre los que se encuentran la piel de neutrones y los halos borromeanos [1]. En este estudio, se aborda específicamente el segundo caso, en el cual la configuración consiste en un carozo y dos neutrones. Se dice que son borromeanos ya que cualquier subsistema binario que resulta del mismo no es estable. El nombre se adopta del concepto geométrico de los anillos borromeanos, el cual es un sistema de tres anillos entrelazados entre sí de manera tal que, si se quita uno cualquiera de los tres, los otros dos quedarían separados. El fenómeno fue observado por primera vez [2] en el año 1985 en el núcleo de  $^{11}\text{Li}$ . El  $^{22}\text{C}$  fue observado por primera vez en 2010 [3] con un radio de  $5.4 \pm 0.9$  fm, un radio bastante mas grande que el de su carozo  $^{20}\text{C}$ , de  $2.98 \pm 0.05$  fm [4]. Experimentos posteriores [5] devolvieron un resultado de  $3.44 \pm 0.08$  fm.

Resulta de particular interés teórico la inestabilidad del isótopo  $^{21}\text{C}$ , solo se registra una única publicación con datos experimentales al respecto [6] en la que se da un límite para el *scattering length* de  $|a_s| < 2.8$  fm. Este resultado nos lleva a considerar la posibilidad de que el estado fundamental del  $^{21}\text{C}$  es un estado antiligado (en la próxima sección se dará información sobre esta clase de estados). Debido a que no hay información experimental sobre la energía del mismo se supondrán algunos valores y se compararán entre sí para analizar que tan factible es la consideración.

En la Sec. II se dará una breve descripción del formalismo utilizado, en la Sec. III se investiga como afecta la variación de parámetros de un potencial gaussiano, y luego, en la Sec. IV se describen resultados sobre la manifestación de los estados antiligados en el continuo. En la Sec. V aplicamos todo lo estudiado al sistema de dos partículas y discutimos algunos resultados encontrados.

### II. MODELO DE CAPAS CON ENERGÍA COMPLEJA

Para describir al  $^{22}\text{C}$  utilizaremos el Modelo de Capas con energía compleja, al cual describiremos de manera breve en esta sección. Al sistema de A partículas que interactúan de a pares se lo modeliza como dos neutrones de valencia fuera de un carozo inerte. Para esto hay que encontrar los autoestados del siguiente hamiltoniano de dos partículas

$$H(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = h(\mathbf{r}_1) + h(\mathbf{r}_2) + v_{res}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (1)$$

donde  $h(\mathbf{r})$  es el hamiltoniano de una sola partícula sujeta al campo medio generado por el carozo y  $v_{res}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  es la interacción de los dos neutrones de valencia.

Al hamiltoniano de campo medio lo definimos como

$$h(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + V(r) \quad (2)$$

siendo  $\nabla^2$  el laplaciano y

$$V(r) = V_{ws}(r) + V_{so}(r) + V_g(r) \quad (3)$$

donde

$$V_{ws}(r) = -\frac{v_{ws}}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}}, \quad (4)$$

\* gerdau@ifir-conicet.gov.ar

con  $R = r_0 A^{1/3}$  y  $v_{ws} > 0$ , es el potencial de Woods-Saxon, de muy extendido uso en el área de física nuclear,

$$V_{so}(r) = \frac{v_{so}}{r} \left[ \frac{d}{dr} V_{ws}(r) \right] \frac{\xi}{2} \quad (5)$$

con  $v_{so} > 0$  y  $\xi = l$  para estados con momento angular total  $j = l + 1/2$  y  $\xi = -l - 1$  para los que cumplen  $j = l - 1/2$ , es el potencial de espín-órbita, cuyo rol fue central para explicar la existencia de los números mágicos. Finalmente,

$$V_g(r) = -v_g e^{-r^2/a_g^2} \quad (6)$$

es un potencial gaussiano. En secciones siguientes se va a investigar los efectos sobre los distintos estados de la base según la variación de los parámetros de este potencial. Una característica del modelo empleado es que acepta autovalores con energía compleja, como resonancias y estados de dispersión. Es esta la razón por la que se lo denomina Modelo de Capas con Energía compleja.

Para el término  $v_{res}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  también utilizamos un potencial fenomenológico de estilo gaussiano con la forma

$$v_{res}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = v_0 e^{-(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2/\beta^2} \quad (7)$$

donde  $v_0$  y  $\beta > 0$  son parámetros de ajuste.

Finalmente, el hamiltoniano de la Ec. (1) será diagonalizado en la base de dos partículas que se obtiene a través del producto tensorial de la base generada por los autoestados de la Ec. (2) por sí misma. En este trabajo nos limitamos a estudiar al estado fundamental del sistema.

Considerando que los estados base van a estar dados por el sistema  $^{21}\text{C}$ , sistema no ligado, la base para determinar al  $^{22}\text{C}$  no poseerá estados ligados, estará conformada enteramente por estados del continuo. En esta región del plano energético también hay polos de la matriz de dispersión  $S$ , como lo son las resonancias y los estados antiligados [7]. Estos últimos son estados virtuales que se caracterizan por presentar una función de onda enteramente imaginaria (a diferencia de los estados ligados) y que diverge asintóticamente.

Su manifestación física se da en el continuo a través de una propiedad que denominamos localización [8, 9] dada por

$$L(E) = \int_0^{1.2R} \mathcal{R}^2(r) r^2 dr \quad (8)$$

donde  $\mathcal{R}(r) = u(r)/r$  es la parte radial de la función de onda de dispersión con momento angular orbital  $l$  y energía  $E = \hbar^2 k^2 / 2\mu$ . En la Sec. IV se verán ejemplos de estas curvas y su evolución respecto a la energía del estado.

Las resonancias presentan un comportamiento oscilante modulado por una exponencial divergente cuando  $r$  tiende a infinito, por lo que se requiere utilizar una representación que permita incluir a esta clase de estados en la base. Dicha representación debe incluir un método de regularización que no solo permita utilizar a los estados resonantes, sino que también permita utilizar estados ligados, si los hubiere. La representación utilizada es la representación de Berggren [10], que se explicará brevemente en los próximos párrafos. El método de regularización utilizado se lo

conoce como rotación compleja externa [11].

Utilizando esta representación la relación de completitud se escribe como

$$\sum_n u_n(r) u_n(r') + \int_{L^+} w(r, E) w(r', E) dE = \delta(r - r') \quad (9)$$

donde las funciones  $u_n(r)$  son autofunciones correspondientes a polos de la matriz de dispersión  $S$ , es decir, estados ligados y resonancias, mientras que las funciones  $w(r, E)$  se corresponden a estados del continuo de un contorno de integración  $L^+$  que yace en el cuarto cuadrante de la segunda hoja de Riemann de energías complejas. La métrica usada se caracteriza por ser el producto de las funciones radiales por sí mismas y no por su complejo conjugado, como se utiliza usualmente.

Utilizar el contorno como un continuo es costoso computacionalmente, por lo que se recurre a métodos numéricos que permitan agilizar la tarea. En nuestro caso utilizamos el método de Gauss-Legendre

$$\int_{L^+} w(r, E) w(r', E) dE = \sum_p h_p w_p(r, E_p) w_p(r', E_p) \quad (10)$$

donde los pesos  $h_p$  y los puntos  $E_p$  están dados por la cantidad de puntos que se desean discretizar.

En cuanto a la forma del contorno  $L^+$ , es una deformación del eje real, por lo que debe comenzar en el punto  $(0, 0)$  y finalizar en el infinito,  $(\infty, 0)$ , y, si bien su forma puede ser arbitraria, debe poseer ciertas propiedades que permitan un adecuado trabajo en los sistemas de dos partículas [12]. Para incluir resonancias en la base éstas deben estar entre el eje real y el contorno, como como se muestra en la Fig. 1. Si se quisiera utilizar un estado antiligado, el contorno es mas complicado [8].

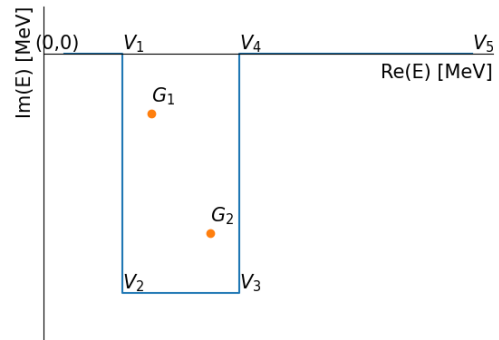


FIG. 1: Esquema de un contorno del continuo atrapando a dos resonancias a considerar. Los puntos  $G_i$  se corresponden a resonancias y los  $V_i$  a los vértices del contorno.

La propiedad característica de los halos borromeanos es que poseen un radio material considerablemente mas grande que el de su carozo. Esta característica no se la puede medir, experimentalmente, de forma directa, sino que se usan métodos para obtener el resultado a través de modelos que tienen como valor de entrada a la sección eficaz de reacción. Para el caso teórico esta propiedad puede ser calculada a través del operador radio obteniendo valores medios a través

de la función de onda del estado que se desee investigar. Utilizando el radio del carozo como parámetro de entrada, la raíz cuadrática media del radio se puede escribir

$$R_{rms}^2(A_c + 2) = \frac{A_c}{A_c + 2} R_{rms}^2(A_c) + 2 \frac{(A_c + 1)}{(A_c + 2)^2} \langle r_A^2 \rangle \quad (11)$$

donde  $A_c$  es el número atómico del carozo,  $R_{rms}^2(A_c)$  es un dato que se obtiene a través de tablas de valores experimentales y

$$\langle r_A^2 \rangle = \langle \psi | r_A^2 | \psi \rangle \quad (12)$$

con  $|\psi\rangle$  la función de onda de las dos partículas alrededor del carozo.

### III. EFECTOS DEL POTENCIAL GAUSSIANO

En esta sección vamos a estudiar como afecta el potencial gaussiano a los estados  $d_{5/2}$ ,  $d_{3/2}$  y  $s_{1/2}$  del  $^{21}\text{C}$ .

Dado que la idea de este potencial es que afecte mayormente al estado  $s$ , puede ser acompañado de un proyector que solo actúe en dicho estado [13]. Aquí lo emplearemos de manera que va a afectar a todos los estados del Hamiltoniano. Sin embargo se busca utilizar parámetros que permitan mover al estado  $s$  a rangos energéticos deseados sin que afecte de manera significativa a los demás estados.

El potencial gaussiano cuenta con dos parámetros a ajustar, la difusividad,  $a_g$  y la intensidad,  $v_g$ . Se eligen 4 difusividades y se varía la intensidad para cada una de estas, estudiando el cambio de los estados  $s$  y  $d$ .

Para los otros potenciales se fijan los parámetros  $r_0 = 1.417$  fm y  $a = 0.65$  fm. Las intensidades de Woods-Saxon,  $v_{ws} = 34.5$  MeV y Spin-Orbit,  $v_{so} = 13.94$  MeV, fueron elegidas de manera que, cuando el coeficiente del potencial gaussiano es igual a cero, el estado  $d_{5/2}$  posea una energía similar, pero de signo opuesto, a la energía de separación de un neutrón del  $^{21}\text{C}$ ,  $S_n = 2.98$  [14] MeV, y la energía del estado  $d_{3/2}$  sea la correspondiente a una resonancia con un ancho  $\Gamma = 0.4$  MeV.

En la Fig. 2 se puede visualizar un ejemplo de la evolución del estado  $s$  dejando fijos todos los parámetros excepto la intensidad del potencial gaussiano, la difusividad del mismo se fija en 0.5 fm. Observando de derecha a izquierda, para  $v_g$  de menor valor absoluto se tiene que los estados  $s$  son ligados. A medida que aumentamos la intensidad del pozo el estado se acerca al umbral de la energía y, en lugar de atravesarlo para formar parte del continuo, vuelve a ganar profundidad pero, esta vez, como un estado antiligado. Esta evolución puede apreciarse observando el valor de su número de onda, que en principio es imaginario puro positivo y luego es imaginario puro negativo. Mostrando, entonces, que el potencial gaussiano se comporta como un potencial repulsivo.

En la Tabla 1 se muestran los valores de las energías de los estados  $d$  y  $s$  modificando únicamente los valores del potencial gaussiano. Con el fin de realizar una comparación objetiva se compararon los parámetros necesarios para obtener un estado  $s$  antiligado con una energía de 0.01 MeV, salvo para el caso del potencial gaussiano "apagado". Resulta interesante observar como, cuanto mayor es la difusividad  $a_g$ , menor es la intensidad. Tal observación podría llevar a

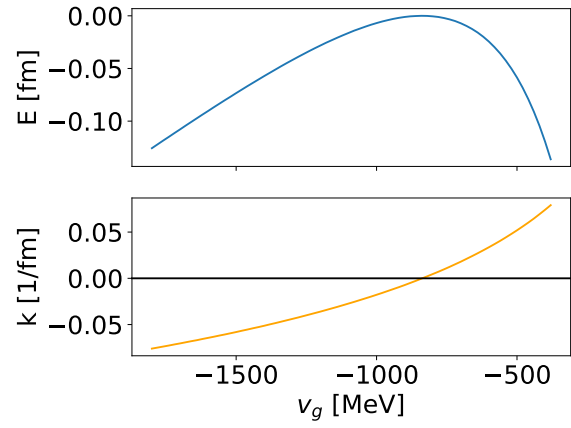


FIG. 2: Evolución de la energía y el número de onda,  $k$  del estado  $s_{1/2}$  variando  $v_g$ . Los valores de los demás parámetros se mantienen en  $a_g = 0.5$  fm,  $a = 0.65$  fm,  $r_0 = 1.417$  fm,  $V_0 = 34.5$  MeV y  $V_{so} = 13.94$  MeV.

pensar que es mejor trabajar con difusividades grandes con el fin de ahorrar tiempo en la búsqueda de parámetros de ajuste, sin embargo podemos observar que los efectos sobre los estados  $d$  comienzan a ser mas significativos, efecto que no es deseado. A su vez, para difusividades menores a 0.5 fm el caso es el contrario, si bien el efecto sobre los estados  $d$  resulta despreciable, encontrar al estado  $s$  deseado requiere de muchas pruebas, haciendo ineficiente al método. En nuestro caso, en adelante, trabajaremos con la difusividad  $a_g = 0.25$  fm.

$V_g$	$a_g$ [fm]	$E(d_{5/2})$	$E(s_{1/2})$	$E(d_{3/2})$
0	-	-3.01	-1.5	$1.24 - i0.24$
-1040	0.50	-2.98	-0.01	$1.26 - i0.15$
-180	0.75	-2.93	-0.01	$1.30 - i0.16$
-73	1.00	-2.82	-0.01	$1.37 - i0.18$

TABLA 1:  $V_g$ ,  $E(d_{5/2})$ ,  $E(d_{3/2})$  y  $E(s_{1/2})$  están en MeV. Valores de las energías de los estados  $d$  y  $s$  para algunos valores los parámetros  $V_g$  y  $a_g$  del potencial gaussiano.

### IV. LOCALIZACION EN EL CONTINUO

Como se mencionó en la Sec. II, la manifestación física de los estados antiligados puede observarse a través de su localización, una propiedad que se describe mediante la Ec. (8). En la Fig. 3 se presentan las curvas para las energías de 0.1, 0.05 y 0.01 MeV del estado antiligado  $s$ . Los parámetros de los potenciales se detallan en la Tabla 2.

$V_{ws}$	$V_{so}$	$V_g$	$E(s_{1/2})$
34.593	13.69	-1800	0.1
34.580	13.7	-1390	0.05
34.565	13.7	-1070	0.01

TABLA 2: Todos los valores están en MeV. Los demás parámetros de los potenciales son  $r_0 = 1.417$  fm,  $a = 0.65$  fm,  $a_g = 0.5$  fm. Con Todos estos parámetros se obtiene que  $E(d_{5/2}) = -2.98$  MeV y  $E(d_{3/2}) = -1.21 - i0.13$  MeV.

Si definimos el ancho de la función como la distancia entre los puntos de inflexión que rodean al máximo, es posible observar que, a menor energía del estado, menor será su ancho y más localizada estará la función en la región que

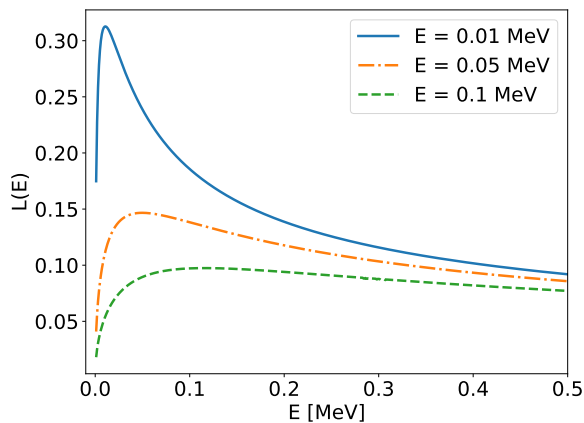


FIG. 3: Representación gráfica de las curvas correspondientes a la Ec. (8) para distintas energías del estado antiligado  $s_{1/2}$

rodea al máximo. El pico de la curva siempre se encuentra en la energía correspondiente al estado antiligado. Esta información es útil para determinar qué región del contorno continuo de  $s$  posee estados con mayor amplitud, lo que nos permite concentrar los puntos gaussianos en las cercanías del máximo.

## V. LIGADURA EN FUNCIÓN DEL ESTADO ANTI-LIGADO

La base de partícula simple queda conformada por un único polo que es un estado resonante  $d_{3/2}$  con  $E = 1.2 - i0.13$  MeV. Para los estados del continuo correspondientes al polo se utiliza un contorno como el de la Fig. 1 con vértices  $V_1 = (0.2; 0.0)$  MeV,  $V_2 = (0.2; -2.5)$  MeV,  $V_3 = (4.0; -2.5)$  MeV,  $V_4 = (4.0; 0.0)$  MeV y  $V_5 = (15.0; 0.0)$  MeV. El contorno correspondiente al momento angular  $s_{1/2}$  es enteramente real, pero se busca concentrar los puntos en las zonas donde la localización es mayor, es decir, en las cercanías del pico observado en la Fig. 3. Luego se utilizan contornos enteramente reales para estados de dispersión con momento angular  $p_{1/2}$ ,  $p_{3/2}$ ,  $d_{5/2}$ ,  $f_{5/2}$  y  $f_{7/2}$ . Si bien se pueden usar más contornos del continuo, fue probado que provocaban un efecto de menor orden de magnitud que la precisión buscada en los cálculos realizados.

Con la base completa de dos partículas calculamos el estado fundamental del  $^{22}\text{C}$ . Para esto se utiliza un código especializado que, explicado de manera muy simplificada, obtiene todos los elementos de partícula simple de la base deseados, realiza el producto tensorial para formar la base y luego diagonaliza al hamiltoniano. Se puede seleccionar que autoestados del hamiltoniano se desean obtener como *output*. Pero como fue mencionado con anterioridad, solo nos interesamos por el estado fundamental. Los estados excitados serán estudiados en trabajos futuros.

Entre los valores de entrada del código están también los parámetros de la Ec. (7). Al parámetro  $\beta$  se lo deja fijo en el valor 1.4 fm, mientras que el parámetro  $v_0$  es modificado de manera tal que el resultado del estado fundamental se ajuste al valor experimental. A la energía estado fundamental del  $^{22}\text{C}$  se la considera como igual, pero de signo opuesto a la energía de separación de dos neutrones del mismo,  $S_{2n}$ , la cual, según [14], tiene un valor de  $0.035 \pm 0.020$  MeV. La Fig. 4 muestra como se comporta el radio en función de

la energía del estado fundamental en el rango de los valores experimentales. Tales valores se obtienen variando  $v_0$  entre  $-35$  y  $-37$  MeV. La evolución obtenida no se comporta de manera monótona, como uno podría esperarse. Se observa que, a medida que el estado se acerca al umbral, el radio del mismo disminuye. Al comparar el resultado obtenido con los resultados presentados en la introducción [3, 5] se observa que el valor teórico obtenido se encuentra en un punto medio de ambos resultados experimentales.

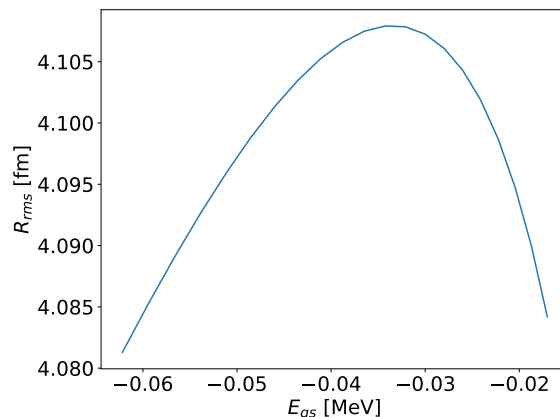


FIG. 4: Evolución de la raíz cuadrática media del radio en función de la energía del estado fundamental del  $^{22}\text{C}$ .

## VI. CONCLUSIÓN

Presentamos el Modelo de capas con energía compleja como una herramienta para describir al fenómeno de los halos borromeanos, propio de la línea de goteo de neutrones. Demostró ser un modelo confiable, arrojando resultados en el rango de los datos experimentales. Se presentó el potencial gaussiano y se mostró como puede usarse de manera que afecte mayormente al estado  $s_{1/2}$ . Se mostró como las propiedades de localización de los estados del continuo pueden ser utilizadas para representar fenómenos físicos como los estados antiligados. Con lo trabajado se describió una base de partícula simple que luego fue utilizada para obtener una base de dos partículas que permite describir al sistema  $^{22}\text{C}$  y la energía de su estado fundamental junto con su radio.

En conclusión, el método mostró ser muy versátil para describir múltiples propiedades físicas de los núcleos.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas PIP-0930 y la Universidad Nacional de Rosario ING588.

## REFERENCIAS

- [1] B. A. Brown. The nuclear shell model towards the drip lines. *Prog. Part. Nucl. Phys.* **47**, 517 (2001).
- [2] I. Tanihata, H. Hamagaki, O. Hashimoto y et al. Measurements of Interaction Cross Sections and Nuclear Radii in the Light  $p$ -Shell Region. *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2676 (1985).
- [3] K. Tanaka, T. Yamaguchi, T. Suzuki y et al. Observation of a large reaction cross section in the drip-line nucleus  $^{22}\text{C}$ . *Phys. Rev. Lett.* **104**, 062701 (2010).

- [4] A. Ozawa, T. Suzuki e I. Tanihata. Nuclear size and related topics. *Nucl. Phys. A* **693**, 32 (2001).
- [5] Y. Togano, T. Nakamura, Y. Kondo y et al. Interaction cross section study of the two-neutron halo nucleus  $^{22}\text{C}$ . *Phys. Lett. B* **761**, 412 (2016).
- [6] S. Mosby, N. Badger, T. Baumann y et al. Search for  $^{21}\text{C}$  and constraints on  $^{22}\text{C}$ . *Nucl. Phys. A* **909**, 69 (2013).
- [7] H. C. Ohanian y C. G. Ginsburg. Antibound 'States' and Resonances. *Am. J. Phys.* **42**, 310 (1974).
- [8] R. Id Betan, R. Liotta, N. Sandulescu y T. Vertse. A shell model representation with antibound states. *Phys. Lett. B* **584**, 48 (2004).
- [9] R. Id Betan, R. J. Liotta, N. Sandulescu, T. Vertse y R. Wyss. Complex shell model representation including anti-bound states. *Phys. Rev. C* **72**, 054322 (2005).
- [10] T. Berggren. On the use of resonant states in eigenfunction expansions of scattering and reaction amplitudes. *Nucl. Phys. A* **109**, 265 (1968).
- [11] B. Gyarmati y T. Vertse. On the normalization of Gamow functions. *Nucl. Phys. A* **160**, 523 (1971).
- [12] R. Id Betan, R. J. Liotta, N. Sandulescu y T. Vertse. Two-Particle Resonant States in a Many-Body Mean Field. *Phys. Rev. Lett.* **89**, 042501 (2002).
- [13] W. Horiuchi e Y. Suzuki.  $^{22}\text{C}$ : An *s*-wave two-neutron halo nucleus. *Phys. Rev. C* **74**, 034311 (2006).
- [14] *National Nuclear Data Center* <https://www.nndc.bnl.gov/nudat3/nudat2.jsp>.