

# CLUSTERING DE PARTÍCULAS LAGRANGIANAS EN TURBULENCIA 2D

## CLUSTERING OF LAGRANGIAN PARTICLES IN 2D TURBULENCE

C. Martinovich<sup>1</sup>, I. Zalduendo<sup>\*1</sup> y P. Cobelli<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de Física, Buenos Aires, Argentina

<sup>2</sup>CONICET - Universidad de Buenos Aires, Instituto de Física de Buenos Aires (IFIBA), Buenos Aires, Argentina

Recibido: 01/09/2023; Aceptado: 09/10/2023

En este trabajo se diseña y construye un experimento para generar y estudiar turbulencia bidimensional. Se calcularon los campos de velocidad y vorticidad, el espectro de energía y el parámetro de Bondarenko del sistema en decaimiento y en encendido; resultando en valores dados por  $\alpha_D = (-0.400 \pm 0.012) s^{-1}$  y  $\alpha_E = (0.404 \pm 0.005) s^{-1}$ , respectivamente. Además, se estudió la distribución de las partículas en el flujo a través de teselados de Voronoi.

*Palabras Clave:* turbulencia, clustering, Voronoi.

In this paper we design and construct an experiment to generate and study 2D turbulence. We calculate velocity and vorticity fields, the energy spectrum and Bondarenko's parameter for the system both in decay and onset; those values result in  $\alpha_D = (-0.400 \pm 0.012) s^{-1}$  and  $\alpha_E = (0.404 \pm 0.005) s^{-1}$ , respectively. Additionally, we study the distribution of particles in the flux through the use of Voronoi tessellations.

*Keywords:* turbulence, clustering, Voronoi.

<https://doi.org/10.31527/analesafa.2023.34.4.103>



ISSN 1850-1168 (online)

### I. INTRODUCCIÓN

Los fluidos son ubicuos en la naturaleza. Todos ellos tienen una viscosidad cinemática que ralentiza los movimientos hasta que se observen desplazamientos suaves y lentos. Para contrarrestar este efecto, uno tiene que inyectarle energía al fluido de alguna manera. Cuando la viscosidad le gana a esta inyección de energía, se dice que el flujo es laminar. Caso contrario, el flujo será turbulento, donde los movimientos son menos predecibles. Este último caso es de gran interés ya que la turbulencia en fluidos es un fenómeno que se observa en la naturaleza de muchas maneras a distintas escalas.

Durante muchos años se estudiaron las propiedades de la turbulencia en tres dimensiones, como por ejemplo las cascadas de energía directa. Esto es, la transferencia de energía de mayor a menor escala. Por otro lado, está la turbulencia bidimensional, que adquirió relevancia en las últimas décadas. Por supuesto que en la naturaleza no existe la turbulencia bidimensional estrictamente hablando. Sin embargo, existen escenarios en donde la variabilidad del flujo sobre una coordenada espacial es despreciable en comparación a las otras dos, y en esos casos los modelos de turbulencia en dos dimensiones describen adecuadamente a la realidad. Por esta razón se han encontrado numerosas aplicaciones en la oceanografía y la geofísica. Además, la turbulencia bidimensional es más amena de estudiar desde el punto de vista experimental y computacional, ya que numéricamente se obtiene una mejor resolución espacial y temporal. Por último, los resultados en dos dimensiones podrían ser reinterpretados para lograr una mejor comprensión del fenómeno en el caso tridimensional [1].

En principio, la evolución de un flujo bidimensional está dado por la ecuación de Navier-Stokes

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad (1)$$

donde  $\mathbf{u}$  es un campo de velocidades bidimensional incompresible ( $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ),  $\rho$  es la densidad del fluido,  $\nu$  la viscosidad cinemática,  $p$  la presión y  $\mathbf{f}$  representa un campo forzante externo.

Sin embargo, los resultados teóricos basados en (1) no coincidían con lo que se observaba experimentalmente. En 1979, N. F. Bondarenko argumentó que esta incongruencia provenía de la fricción del fluido con el fondo, que afecta lo que ocurre en la superficie ya que la altura  $h$  del fluido es pequeña (se busca que el flujo sea lo más bidimensional posible). La condición de contorno en el fondo ( $\mathbf{u} = 0$  en  $z = 0$ ) genera un gradiente de velocidades en  $z$  que no es tenido en cuenta en la ecuación (1). Así, Bondarenko agregó un término de fricción lineal en la velocidad obteniendo:

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \alpha \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \langle \mathbf{F}_{\parallel} \rangle_z \quad (2)$$

donde  $\langle \mathbf{F}_{\parallel} \rangle_z$  es la fuerza paralela al plano, integrada a lo largo de la variable  $z$ . En la última expresión,  $\alpha$  es el llamado coeficiente de fricción (o parámetro alfa de Bondarenko), que toma la forma

$$\alpha = \eta \frac{2\nu}{h^2} \quad (3)$$

donde  $\eta$  es un parámetro que se ajusta para que los resultados experimentales coincidan con las predicciones teóricas [2].

\* izalduendo@hotmail.com

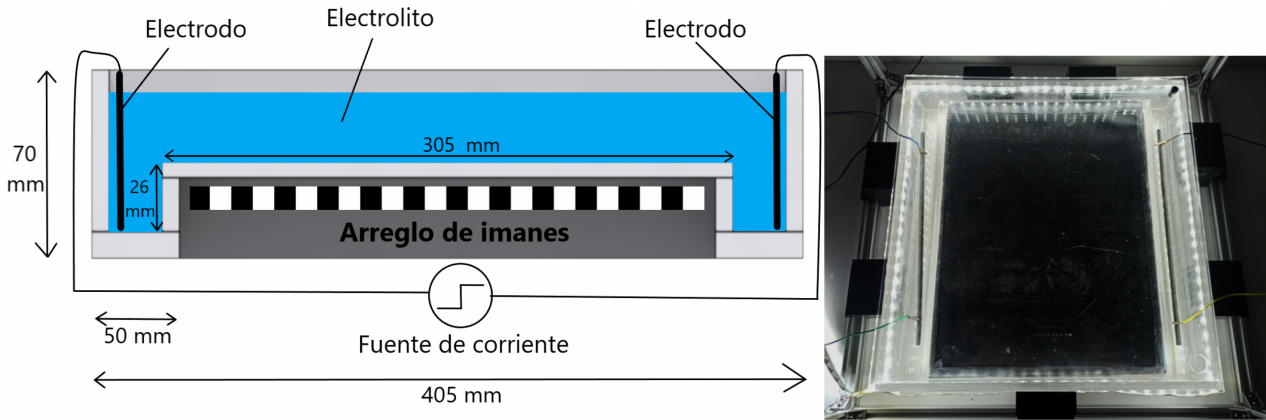


FIG. 1: (a) El diseño experimental [3] con sus medidas características. El electrolito se ve influenciado por la corriente que lo atraviesa y por el campo magnético generado por los imanes. La fuerza de Lorentz genera la turbulencia en la superficie del electrolito. (b) Una fotografía desde arriba de la pecera. Los electrodos y los imanes están en sus posiciones habituales, estos últimos no se observan ya que están recubiertos con un plastificado negro debajo de la región de interés.

En este trabajo se diseña un montaje experimental capaz de generar turbulencia bidimensional de manera controlada. Asimismo, se mide este fenómeno en sus distintas etapas (encendido, estacionario y decaimiento) para luego determinar los campos de velocidad y vorticidad, el espectro de energía, y el coeficiente de fricción del sistema. En última instancia se estudia el ordenamiento espacial del flujo en turbulencia a través de mapas de Voronoi.

## II. DISEÑO EXPERIMENTAL

Existen distintas formas efectivas de generar turbulencia bidimensional de manera controlada, en este caso, se decidió utilizar el método que denominamos “capas electromagnéticas”, cuyo funcionamiento se detallará a continuación [3-7].

El método de capas electromagnéticas consiste en tener un fluido conductor, por el cual se hace circular una corriente bajo la presencia de un campo magnético generado por un arreglo de imanes. En la Fig. 1(a) se ilustra el diseño experimental, con las dimensiones correspondientes a nuestro montaje particular.

La turbulencia se genera en el electrolito, por encima del arreglo de imanes. En esta región, la profundidad del electrolito es baja ( $\sim 6$  mm), para garantizar que se está trabajando dentro de una buena aproximación bidimensional. La fuente de corriente, los electrodos y el propio electrolito forman un circuito cerrado mediante el cual circula una corriente uniforme en una dirección paralela al plano de turbulencia, digamos en  $\hat{y}$ , generando electrólisis. Por otra parte, los imanes, que se colocan alternados en polarización, generan un campo magnético en la dirección perpendicular al plano de turbulencia, digamos en  $\hat{z}$ . Como el fluido es conductor, los elementos de fluido se ven afectados tanto por la corriente como por el campo magnético y están sometidos a la fuerza de Lorentz ( $\mathbf{F}_{\parallel} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$ ) [8], que apunta en la dirección  $\hat{x}$ , que es paralela al plano de turbulencia. Como los imanes están alternados en polarización, la fuerza de Lorentz cambia su dirección al moverse en el plano del electrolito. Se espera que esto produzca pequeños vórtices de un tamaño característico comparable al de los imanes. Una de las ventajas experimentales de este diseño es que

tanto el arreglo de imanes como la corriente pueden tomar diferentes formas, haciendo que el sistema tenga distintas configuraciones para explorar.

En lo particular de este trabajo, el electrolito utilizado es agua con sal (salmuera) en una concentración del 30%. Los electrodos son cilíndricos, de grafito, de 6mm de diámetro. Se trabajó con una fuente de alta potencia RIGOL DP1116A, la cual entrega 20 V (2 A) al circuito. Los imanes son de cerámica, circulares, de 10 mm de diámetro y 3mm de ancho, cuyo campo magnético generado es de aproximadamente 0.4 Tesla y están encastrados en una placa MDF. Esta placa está recubierta con un plastificado negro para tener un buen contraste con las partículas que se utilizan para visualizar el movimiento en el fluido, que flotan en la superficie del mismo. Las partículas utilizadas son de poliamida, y tienen un tamaño de  $100 \mu\text{m}$ . Además, se montó una tira de luces LED en el borde de la cuba para una mejor visualización del fenómeno. Por último, se colocaron filtros de algodón entre los electrodos y la región de interés para evitar que las burbujas emitidas por la electrólisis interfieran en la dinámica del fenómeno a estudiar. Estos están sostenidos por ganchos de plástico hechos con una impresora 3D. En la Fig. 1(b) se observa una fotografía del montaje utilizado con los electrodos colocados y los imanes recubiertos por el plastificado negro en su posición habitual.

## III. ANÁLISIS Y RESULTADOS

Una vez que el experimento estuvo adecuadamente montado se procedió a medir. Las mediciones consistieron de grabaciones realizadas con una cámara ultra rápida Photron 1024PCI, con resolución de  $(1024 \times 1024)$  px y 60 fps. Las mismas tuvieron una extensión de aproximadamente 3000 imágenes. Se midieron tres estados del sistema: el encendido, el estacionario y el decaimiento.

Haciendo uso de PIVlab en MATLAB, se calcularon los campos de velocidad y vorticidad para cada par de cuadros consecutivos, en cada medición. Este programa utiliza la técnica de Particle Image Velocimetry [9] (de ahora en adelante, PIV), la cual consiste en comparar la posición de partículas entre dos cuadros (fotos) consecutivos de una tira (video) y calcular así el desplazamiento de la misma, y por

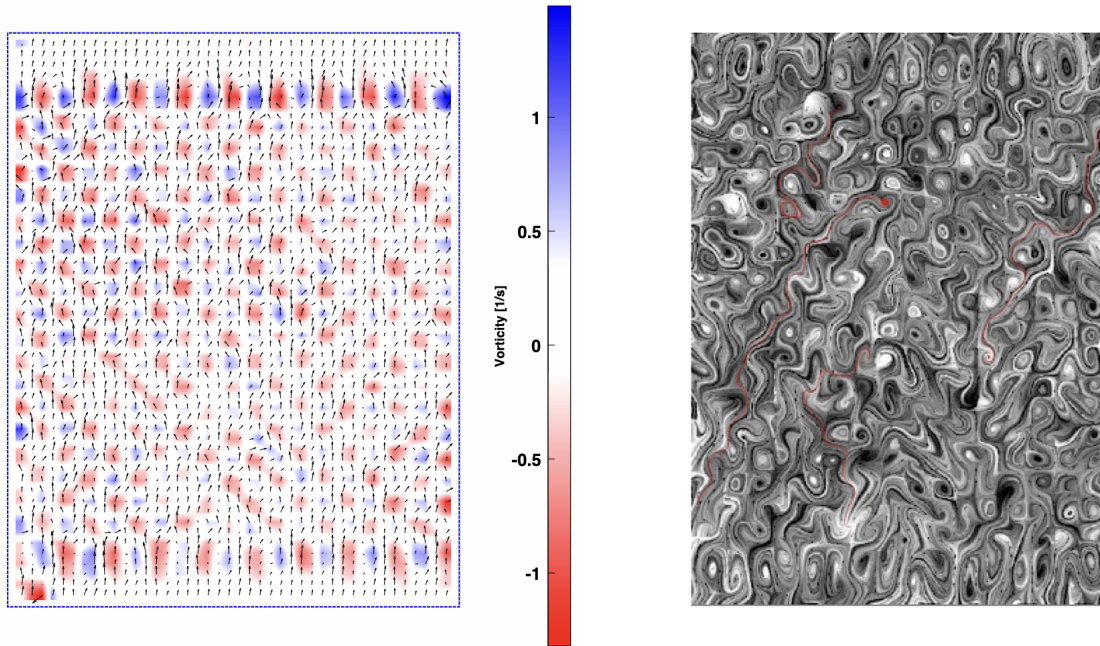


FIG. 2: (a) Campos de velocidad y vorticidad. El campo de velocidad representado por las flechas negras reproduce el campo de vorticidad esperado, representado por la escala de colores. El azul y el rojo indican signos opuestos de vorticidad. (b) El LIC (Line Integral Convolution) de un cuadro en particular donde se ve cuánto tiempo se quedan las partículas en un lugar. El blanco indica mucho tiempo y el negro poco tiempo. En rojo se muestran trayectorias particulares que seguirían las partículas en esta situación.

lo tanto el vector de velocidad instantánea punto a punto. En el lado izquierdo de la Fig. 2 se exhiben los resultados para un par de cuadros consecutivos en particular, donde se observa el campo de velocidad representado con flechas negras. A partir de este campo se obtiene el campo de vorticidad, representado con una escala de colores de azul a rojo. Azul siendo vorticidad positiva y rojo negativa. La distribución de los colores está de acuerdo con el arreglo de los imanes, que fueron colocados uno al lado del otro con polarización alternada.

Por otro lado, utilizando Line Integral Convolution [10] (LIC) se buscó analizar cuánto son atrapadas las partículas por los vórtices. Esta técnica permite diferenciar las áreas más habitadas del flujo de las menos habitadas, mostrando en blanco las zonas donde más tiempo se quedan las partículas y en negro donde menos se quedan. Con este análisis cualitativo observamos que en algunos cuadros el sistema tenía alta simetría, mostrando celdas muy uniformes, mientras que en otros estas celdas aparecían deformadas como en la Fig. 2 del lado derecho. Esto fue una primera comprobación del estado turbulento del sistema, dada la aperiodicidad del desorden del flujo.

### Espetros de energía

A fin de caracterizar de forma cuantitativa la llegada al régimen turbulento estacionario, se buscó que el espectro de energía siguiese el comportamiento de un espectro de Kolmogorov, es decir una ley de potencias que va como  $k^{-5/3}$ . Para ello, primero se calculó la energía cinética de cada medición y se la transformó al espacio de Fourier. Como la ley de potencias solo describe el comportamiento del rango inercial, este proceso además delimita las escalas de

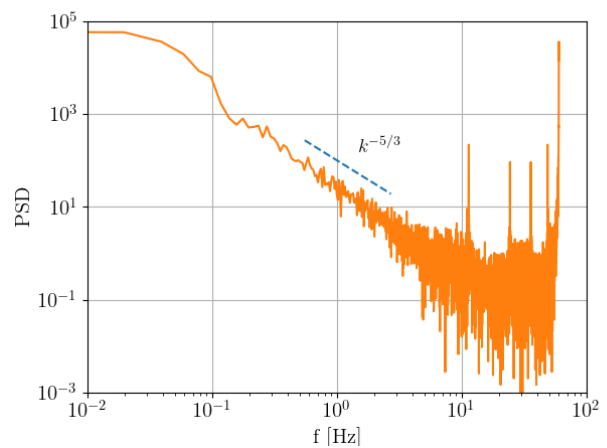


FIG. 3: El espectro de energía en función de la frecuencia en escala logarítmica. La línea punteada en celeste marca la inclinación correspondiente a un espectro de Kolmogorov ( $k^{-5/3}$ ). Se observa que el espectro es efectivamente de Kolmogorov en el intervalo aproximado (0.3, 2) Hz, que define el rango inercial del sistema.

ese rango. Esto se realizó para todas las mediciones tomadas. En la Fig. 3 se muestra el espectro de energía para una medición. Se ve cómo sigue la ley de potencias esperada (marcada con la línea punteada celeste) entre los 0.3 y los 2 Hz, que es el rango inercial. Este análisis demuestra que las mediciones son compatibles con el espectro de Kolmogorov.

### Parámetro alfa de Bondarenko

Como parte de los objetivos de este trabajo se propuso calcular el parámetro alfa de Bondarenko del sistema dise-



ñado. Este parámetro está dado por la Ec. (3).

Dado que el flujo se encuentra en régimen turbulento, el término de disipación viscosa de la Ec. (2), que tiene a  $v$  como prefactor, es despreciable y describe la disipación en las escalas más pequeñas. Por esta razón, el decaimiento debería estar regido únicamente por el término lineal con la velocidad. Entonces, midiendo el sistema en decaimiento desde el estacionario y ajustando una exponencial decreciente, se obtiene el parámetro que rige el decaimiento, que es el alfa buscado.

Se suavizó la curva de energía cinética utilizando un filtro Savitzky-Golay. Se ajustó una función exponencial, de la cual se obtuvieron los parámetros  $\alpha_D = (0.400 \pm 0.012) \text{ s}^{-1}$ . La curva con su ajuste se muestra en la Fig. 4 en la parte de abajo.

Por otro lado, se intentó calcular el alfa de Bondarenko del encendido del sistema. La hipótesis inicial era que el sistema tendría un crecimiento exponencial con el mismo parámetro que el del decaimiento (pero opuesto en signo). Sin embargo, rápidamente se observó que el sistema no tiene un comportamiento exponencial durante el encendido. Se propuso ajustar una tangente hiperbólica en vez de una exponencial. Una posible explicación para esta diferencia en el comportamiento del sistema es que en este caso no se parte de turbulencia ya desarrollada, como sí ocurre en el decaimiento. El sistema parte del reposo, por lo que tal vez haya que incluir otros mecanismos físicos en el término que estamos intentando describir a través del  $\alpha$ .

La tangente hiperbólica resultó una buena descripción de la curva. El ajuste se puede observar en la Fig. 4 en la parte superior. De este se obtuvo el parámetro  $\alpha_E = (0.404 \pm 0.005) \text{ s}^{-1}$ , que se solapa con  $\alpha_D$  (cambiando el signo del mismo), lo que permite determinar el  $\alpha$  de Bondarenko asociado a nuestro sistema.

### Clustering de partículas vía teselados de Voronoi

Otro de los objetivos fue estudiar la distribución de las partículas en el fluido. Se buscó determinar la frecuencia con la que se agrupan o dejan huecos en el mismo. Esto se hizo a través del uso de mapas de Voronoi, que son diagramas de celdas que cambian de tamaño según cuántas partículas hay próximas entre sí. Alta densidad de partículas generan celdas pequeñas, mientras que partículas dispersas generan celdas grandes. Por lo tanto, al analizar el área de las celdas podemos diferenciar huecos de conjuntos de partículas (de ahora en más, grupos).

El análisis en primera instancia consistió en el procesado de las imágenes medidas tal que los grupos contasen como píxeles encendidos y el fondo como píxeles apagados. Luego, se etiquetó a cada grupo y se lo delimitó con un rectángulo. Con el centro de cada rectángulo se realizaron los mapas de Voronoi. Esto se realizó en un cuadro de cada diez medidos para evitar redundancia en los datos, ya que la dinámica del sistema es lenta. En la Fig. 5 a la izquierda se puede ver un ejemplo de un mapa de Voronoi generado en una región incluida en la zona de interés. A la derecha en esa misma figura se observa el mapa de Voronoi con una escala de colores de la zona delimitada por el cuadrado amarillo de la figura de la izquierda. La escala representa áreas pequeñas con colores cálidos oscuros y áreas grandes con colores

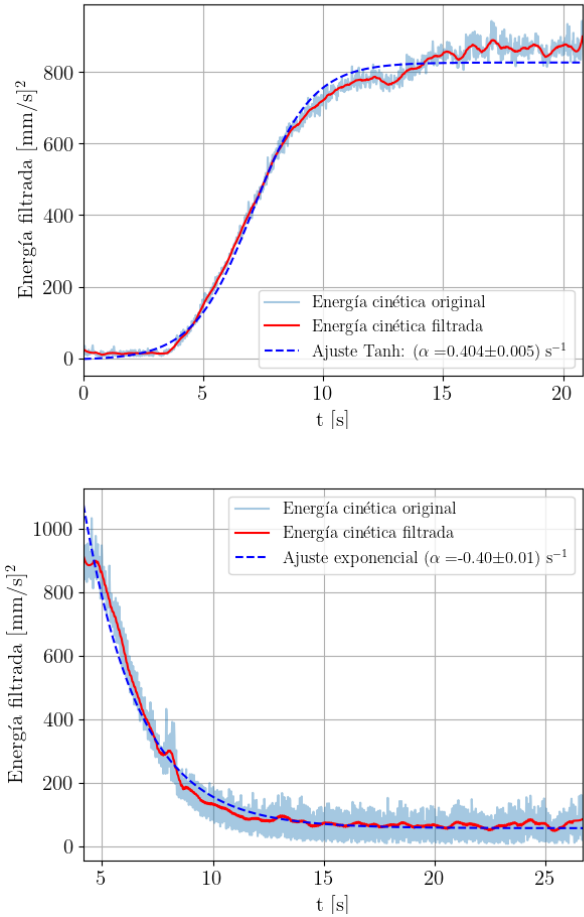


FIG. 4: En celeste se muestra la energía cinética de la medición en función del tiempo, en rojo, la energía cinética filtrada y en azul el ajuste correspondiente a los datos. Arriba se muestra el encendido, que se ajustó con una tangente hiperbólica, cuyo parámetro resultó ser  $\alpha_E = (0.404 \pm 0.005) \text{ s}^{-1}$ . Abajo se observa el decaimiento, que se ajustó con una exponencial decreciente, cuyo parámetro resultó ser  $\alpha_D = (-0.400 \pm 0.012) \text{ s}^{-1}$ .

claros.

Una vez filtrada la información, se realizó un histograma con el área de las celdas normalizada por la media de las mismas. Este se comparó contra el histograma resultante de una distribución aleatoria de centros, es decir de imágenes sintéticas con partículas distribuidas aleatoriamente en el espacio. Esto se hizo para determinar el corrimiento de los datos respecto a una distribución normal (de Poisson).

Ambos histogramas se realizaron utilizando bins elegidos log-espaciadamente (LE). Esta fue una decisión arbitraria dado que todos los métodos convergían para los datos normalizados, representados tal que la integral bajo la curva sea igual a 1. La comparación entre ambos histogramas se presenta en la Fig. 6. Allí, se ve que los histogramas se cruzan. De menor a mayor en áreas normalizadas, el primer punto donde se cortan las curvas delimita el valor máximo para describir grupos en el flujo. El segundo punto delimita el valor mínimo para el área de los huecos. El tercer corte sucede para órdenes de magnitud menor y por lo tanto es menos relevante. Con esta información es posible hacer estudios sobre la dinámica de grupos y huecos por separado

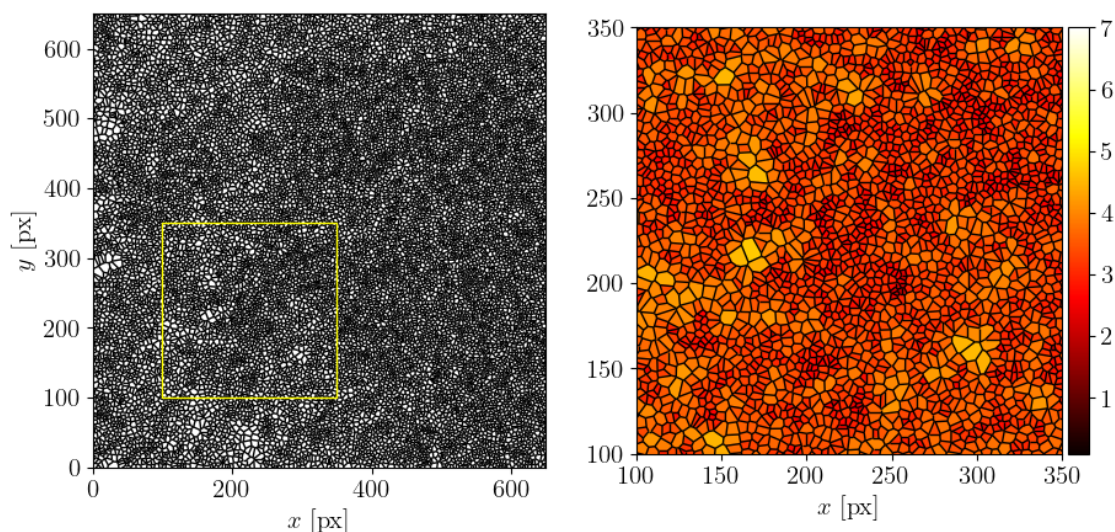


FIG. 5: A la izquierda, el mapa de Voronoi de un cuadro particular en una zona incluida en la región de interés. El cuadrado amarillo delimita la figura que se observa a la derecha. A la derecha se observa el mapa de Voronoi encerrado por el cuadrado amarillo, con una escala de colores para evidenciar mejor regiones de huecos y de grupos. Las áreas grandes se representan con colores claros mientras que las áreas pequeñas se representan con colores oscuros.

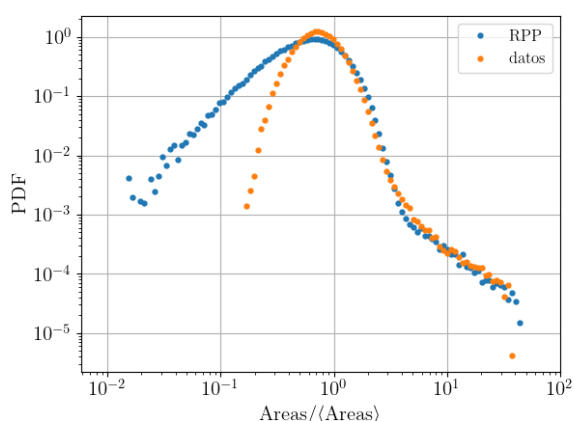


FIG. 6: Histogramas de áreas de celdas de Voronoi normalizadas por la media de las áreas. Se representaron superpuestos el histograma de datos en naranja, y el histograma de imágenes sintéticas en azul. Ambos histogramas fueron creados con binarización log-espaciada.

en el flujo turbulento, simplemente diferenciando el área de las celdas con las que se trabaja.

#### IV. CONCLUSIONES

Luego de obtener y analizar los distintos resultados se pueden obtener diversas conclusiones.

En primer lugar, se obtuvieron los campos esperados de velocidad y vorticidad de forma cualitativa.

Además se verificó que se trabajó en un régimen turbulento ya que el espectro de energía obtenido es compatible con el espectro de Kolmogorov.

En cuanto al alfa de Bondarenko, se ajustó el encendido con una tangente hiperbólica y el decaimiento con una exponencial decreciente y se obtuvieron los resultados  $\alpha_D = (-0.400 \pm 0.012) \text{ s}^{-1}$  para el decaimiento y  $\alpha_E =$

$(0.404 \pm 0.005) \text{ s}^{-1}$  para el encendido, cuyos valores se solapan cambiando el signo de  $\alpha_D$ .

Por último, se realizó un análisis basado en la distribución de las partículas en el flujo. De este se concluye que hay zonas de grupos de partículas y zonas de huecos bien definidas por sus áreas en los mapas de Voronoi. Esto es así ya que los histogramas de datos y de Poisson se intersecan en dos puntos.

Como perspectivas a futuro, las herramientas desarrolladas a lo largo del trabajo podrían utilizarse para seguir analizando propiedades de la turbulencia bidimensional, ya sea variando el montaje experimental utilizado (por ejemplo explorando distintas configuraciones de imanes) o siguiendo el análisis de los grupos y huecos de partículas realizado a través de los mapas de Voronoi.

#### REFERENCIAS

- [1] P. Tabeling. Two-dimensional turbulence: a physicist approach. *Phys. Rep.* **362**, 1-62 (2002).
- [2] B. Suri. *Quasi-Two-Dimensional Kolmogorov flow: Bifurcations and Exact Coherent Structures* Tesis doct. (Ph. D. thesis, Georgia Institute of Technology, 2017).
- [3] G. Boffetta y R. E. Ecke. Two-Dimensional Turbulence. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **44**, 427-451 (2012).
- [4] M. K. Rivera y R. E. Ecke. Pair Dispersion and Doubling Time Statistics in Two-Dimensional Turbulence. *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005).
- [5] P. Tabeling, S. Burkhart, O. Cardoso y H. Willaime. Experimental study of freely decaying two-dimensional turbulence. *Phys. Rev. Lett.* **67**, 3772-3775 (1991).
- [6] A. E. Hansen, D. Marteau y P. Tabeling. Two-dimensional turbulence and dispersion in a freely decaying system. *Phys. Rev. E* **58**, 7261-7271 (1998).

- [7] P. Gutiérrez y S. Aumaître. Clustering of floaters on the free surface of a turbulent flow: An experimental study. [Eur. J. Mech. B Fluids](#) **60**, 24-32 (2016).
- [8] L. M. Moubarak y G. Y. Antar. Dynamics of a two-dimensional flow subject to steady electromagnetic forces. [Exp. Fluids](#) **53**, 1627-1636 (2012).
- [9] C. Tropea, A. L. Yarin y J. F. Foss. *Springer handbook of experimental fluid mechanics* (Springer, 2007).
- [10] B. Cabral y L. C. Leedom. *Imaging vector fields using line integral convolution* en *Proceedings of the 20th annual conference on Computer graphics and interactive techniques* (ACM, 1993), 263-270.