

## PROPIEDADES DE LAS ONDAS ROTANTES CON SIMETRÍA HELICOIDAL CLASIFICADAS POR SU VELOCIDAD DE FASE

### PROPERTIES OF ROTATING WAVES WITH HELICAL SYMMETRY CLASSIFIED BY THEIR PHASE SPEED

R. González<sup>\*1</sup> y C. D. Vigh<sup>2,3,4</sup>

<sup>1</sup>Universidad Nacional de General Sarmiento, Instituto de Desarrollo Humano Juan M. Gutierrez 1150, Los Polvorines – (1613) Buenos Aires – Argentina

<sup>2</sup>Universidad Nacional de General Sarmiento, Instituto de Ciencias Juan M. Gutierrez 1150, Los Polvorines – (1613) Buenos Aires – Argentina

<sup>3</sup>Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de Física, Buenos Aires. Buenos Aires, C1428EGA – Argentina

<sup>4</sup>CONICET-Universidad de Buenos Aires, Instituto de Física Interdisciplinaria y aplicada (INFINA), Buenos Aires. Buenos Aires, C1428EGA – Argentina

Recibido: 23/08/2024 ; Aceptado: 27/12/2024


En este trabajo se estudian algunas propiedades de las ondas rotantes progresivas (ORP) en un tubo infinito con simetría helicoidal, como consecuencia de la propiedad dinámica de los flujos de Beltrami [1-3] (PDFB, González, 2014, 2022, 2023). Se muestra que la clasificación de ondas no interactuantes depende de sus velocidades de fase de la forma  $v_{ph}(m) = m v_{ph}(m=1)$  donde  $\varsigma$  es el signo de la helicidad, lo que implica una velocidad de fase diferente para cada  $m$  o sea una separación de modos con diferentes números azimutales. Que esto da lugar a un método geométrico para encontrar las ondas no interactuantes en función de su velocidad de fase. Y que esta clasificación facilita el estudio de propiedades de estas ondas como por ejemplo el transporte de momento angular que se calcula como ejemplo para un caso particular.

*Palabras Clave:* Ondas rotantes progresivas, flujos de Beltrami, simetría helicoidal, propiedad dinámica.

In this work, some properties of progressive rotating waves (ORP) in an infinite tube with helical symmetry are studied, as a consequence of the dynamic property of Beltrami flows [1-3] (PDFB, González, 2014, 2022, 2023). It is shown that the classification of non-interacting waves depends on their phase velocities of the form  $v_{ph}(m) = m v_{ph}(m=1)$  where  $\varsigma$  is the sign of the helicity, which implies a different phase speed for each  $m$ , that is, a separation of modes with different azimuthal numbers. This gives rise to a geometric method to find non-interacting waves based on their phase velocity. And this classification facilitates the study of properties of these waves, such as the transport of angular momentum, which is calculated as an example for a particular case.

*Keywords:* progressive rotating waves, Beltrami fluxes, helical symmetry, dynamic property.

<https://doi.org/10.31527/analesafa.2025.36.1.12>

 ISSN 1850-1168 (online)

## I. INTRODUCCIÓN

A partir del descubrimiento de la propiedad dinámica de los flujos de Beltrami (PDFB) (González[1]) que se cumple en aquellos flujos que cumplen que:

1. su vorticidad es paralela a la velocidad ( $\boldsymbol{\omega}_B = \pm \gamma^\pm \mathbf{v}_B$ )
2. tiene una dinámica de onda progresiva, es posible re-actualizar una clasificación de estas ondas en relación con el autovalor  $\gamma^\pm$  que se expresa en función de la velocidad de fase de la onda.

Esta clasificación organiza a las ondas entre las que tienen igual autovalor y no intercambian energía o diferente autovalor que sí la intercambian y de esta forma facilita el estudio de las propiedades del flujo. Ya hemos estudiado algunas de estas propiedades desde antes de descubrir la

PDFB y en la actualidad[2-6] tomando diferentes geometrías y simetrías. En particular el estudio de flujos de Beltrami (FB) con simetría helicoidal en un tubo, fue realizado en un artículo pionero por Dritschel[7] aplicado tanto a hidrodinámica como a magnetohidrodinámica (MHD). Luego nosotros lo estudiamos en hidrodinámica en una expansión entre dos tubos, enfocando en la cuestión de la estabilidad[4]. En el trabajo del 2014[1] generalizamos el estudio a flujos de Beltrami no axisimétricos y mostramos que el flujo de Beltrami helicoidal se podía obtener como un caso particular del mismo. En este trabajo enfocamos nuevamente en la simetría **helicoidal** de un flujo (FH) en un tubo infinito, con el objeto de estudiar sus propiedades específicas. Y como se diferencia del caso no axisimétrico, no helicoidal. En la sección II introducimos la PDFB en la que se enmarca el trabajo. En la sección III mostramos la aplicación de la PDFB a ondas rotantes no axisimétricas en un tubo infinito y en la sección IV lo hacemos a ondas rotantes pro-

\* cvigh@campus.ungs.edu.ar

gresivas con simetría helicoidal, realizamos la clasificación de modos de la forma explicada previamente y obtenemos su propiedad central y en la sección V estudiamos el transporte del momento angular de la onda helicoidal. Como ya hemos reseñado en un trabajo previo[4] los flujos tipo Beltrami, aparecen en fenómenos de flujos en rotación rígida que se perturban, en fenómenos atmosféricos, en MHD y fenómenos solares y astrofísicos, en el estudio de la turbulencia y en aplicaciones tecnológicas en turbo maquinaria y máquinas de fusión con confinamiento magnético.

## II. PROPIEDAD DINÁMICA DE LOS FLUJOS DE BELTRAMI

La propiedad dinámica [1], consiste en que los FB generados por rotación ( $\mathbf{\Omega} = \Omega z$ ), cumplen una ecuación de onda rotante progresiva (ORP), en el sistema rotante, que es una solución exacta de las ecuaciones de Euler, con las siguientes características

$$\nabla \times \mathbf{v}_B = \gamma^\pm \mathbf{v}_B \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_B}{\partial t} = \pm \frac{\Omega}{\gamma^\pm} \frac{\partial \mathbf{v}_B}{\partial z} \quad (2)$$

Con simetría helicoidal definiendo  $\phi = \theta - \kappa z$  la ec. 2 se transforma en

$$\frac{\partial \mathbf{v}_B}{\partial t} = \pm \frac{\Omega \kappa}{\gamma^\pm} \frac{\partial \mathbf{v}_B}{\partial \phi} \quad (3)$$

donde siendo  $\mathbf{v}_B = \hat{\mathbf{v}}_B(r) e^{i(m\phi - \sigma t)}$  resulta que:

$$\sigma^\pm = \mp \frac{2\Omega}{\gamma^\pm} m \kappa \quad (4)$$

Observamos que en términos de  $\theta$  y  $z$ ,  $\kappa$ , que es el *pitch* de la onda helicoidal y es  $\kappa = \frac{2\pi}{p}$ , siendo  $p$  el paso de la hélice juega el rol de un vector de onda, en la que  $\gamma(k)^\pm$  depende de la *configuración* i.e de su geometría, de su simetría y de sus condiciones de contorno. De forma tal que, la combinación de dos FB con  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{B_1} + \mathbf{v}_{B_2}$  y con igual  $\gamma^\pm$ , es también un FB con el mismo autovalor. En efecto

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (\mathbf{v}_{B_1} + \mathbf{v}_{B_2}) = \pm \gamma^\pm (\mathbf{v}_{B_1} + \mathbf{v}_{B_2}) = \pm \gamma^\pm \mathbf{v} \quad (5)$$

Por lo tanto, en la ecuación de momentos de Euler el término no lineal  $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} = 0$  y esto significa que no hay transferencia de energía entre ambos FB. Esta característica permite clasificar los FB a partir de la igualdad o diferencia de los autovalores  $\gamma$ , autovalor, que se convierte así, en un *autovalor clasificador*. Por eso, en las configuraciones que estudiamos, establecemos, a partir de trabajos previos[1-6], qué son los autovalores y que forma adquiere la relación de dispersión resultante al especificarlo en la ec. 3.

## III. ONDAS ROTANTES PROGRESIVAS NO AXISIMÉTRICAS EN UN TUBO INFINITO

En este caso consideramos una ORP propagándose a lo largo del eje de rotación con un FB en coordenadas cilíndricas (González[1], 8-13). Al ser el vector de onda axial, adimensionalizando en adelante, el tiempo con  $\Omega$  y la longitud con el radio del tubo  $a$ , la ec. 12 adquiere la siguiente forma adimensionalizada:

$$\sigma^\pm = \mp \frac{2}{\gamma^\pm} m \kappa \quad (6)$$

y luego

$$\gamma^\pm = \mp \frac{2k}{\sigma^\pm} = \frac{2}{v_{ph^\pm}} = \gamma_{ph}^\pm \quad (7)$$

Por lo tanto, el autovalor clasificador se determina con la velocidad de fase en forma adimensional y lo denominamos  $\gamma_{ph}$ . A cada velocidad de fase le corresponde un autovalor. Estas ondas deben cumplir la condición de contorno de anulación de la velocidad radial en la pared del cilindro. Por lo tanto, se cumplen las ecs. 6 y 7, pero ahora existe una relación definida por la siguiente ecuación, para  $r = 1$ ,

$$m J_m(\mu^\pm) \pm \frac{\mu^\pm k}{\gamma_s} J'_m(\mu^\pm) = 0 \quad (8)$$

Donde  $J_m$  es la función de Bessel de orden  $m$  y  $J'_m$  su derivada y  $s$  es el signo positivo o negativo, según que el flujo sea co-rotante o contra-rotante. Debido a la ec. 2, los autovalores  $\gamma_{ph}^\pm$  dependen de  $m$ , y, por lo tanto, la cantidad de autovalores resulta discretizada por  $m$ , pero, a su vez, para cada  $m$ ,  $\gamma_{ph}^\pm$  depende de  $k$  en forma continua. Los modos de igual autovalor se encuentran sobre una recta de velocidad de fase constante, pero están representados por los puntos de intersección de esta recta con los gráficos que resultan de las ecs. 6 y 8 para dicha velocidad de fase. De acuerdo con el criterio de clasificación, estos modos no intercambian energía. Los modos con diferentes autovalores, que sí intercambian energía, pueden ser tratados, por ejemplo, mediante interacciones triádicas resonantes[5].

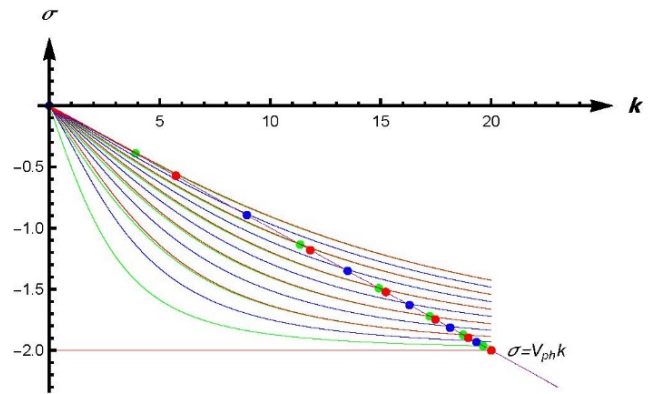


FIG. 1: los puntos sobre la recta representan modos con velocidades de fase,  $v_{ph} = -0.1$ . Los puntos verdes corresponden a  $m = 0$ , los azules a  $m = 1$  y los rojos a  $m = 2$ .

En la Fig.1, la recta contiene a los pares  $(k, \sigma)$  con igual velocidad de fase, es decir, por la ec. 7, con igual autovalor  $\gamma_{ph}^+$ .

## IV. ONDAS ROTANTES PROGRESIVAS CON SIMETRÍA HELICOIDAL EN UN TUBO INFINITO

En un tubo infinito  $\mathbf{v}_B = \hat{\mathbf{v}}_{B_s}(r) e^{i(m\phi - \sigma t)}$  con  $\hat{\mathbf{v}}_B(r) = (f_s(r), g_s(r), h_s(r))$ , siendo  $f_s(r), g_s(r), h_s(r)$ , las componentes según  $r, \phi, z$ .

$$f_s(r) = im \left[ \frac{1}{r} J_m(\mu_s r) + s \frac{\mu_s \kappa}{\gamma_s} J_m(\mu_s r) \right] \quad (9)$$

$$g_s(r) = \left[ -\mu_s J_m(\mu_s r) - s \frac{m^2 \kappa}{r \gamma_s} J_m(\mu_s r) \right] \quad (10)$$

$$h_s(r) = s \frac{\mu_s^2}{r \gamma_s} J_m(\mu_s r) \quad (11)$$

donde  $\mu_s^2 = \gamma_s^2 - m^2 \kappa^2$  y  $s = \pm$  es el signo de la helicidad definida como  $s\gamma$ . Además, se cumple la condición de contorno de  $f_s(1) = 0$

$$J_m(\mu_s) + s \frac{\mu_s \kappa}{\gamma_s} J_m(\mu_s) = 0 \quad (12)$$

que expresa la anulación de la velocidad radial en la pared del tubo.

En este caso, usando la ec. 4 se obtiene

$$\gamma^\pm = \mp \frac{2m\kappa}{\sigma^\pm} = \mp \frac{2m}{v_{ph\pm}} \quad (13)$$

con  $v_{ph\pm} = \frac{\sigma^\pm}{\kappa}$  y luego pedir que  $\gamma^\pm$  sea constante significa que  $\frac{2m}{v_{ph\pm}} = \text{constante}$  y por lo tanto la velocidad de fase es proporcional a  $m$ . Es importante aclarar que la onda helicoidal no depende de  $z$ , y que  $\kappa$  es el *pitch* de la onda helicoidal, pero que, en términos de  $z$ , juega el rol de un vector de onda constante una vez elegido, por lo que esta velocidad de fase definida *suigeneris*, tiene el objetivo de utilizar el método de análisis gráfico análogo al de la Fig. 1 en función de  $\kappa$ , puesto que la simetría helicoidal es un caso particular de no axisimetría, pero con  $k$  constante. Es lo que hacemos en la Fig. 2. Entonces hay dos novedades en relación con el caso no axisimétrico, no helicoidal, por un lado la frecuencia es proporcional a  $m$ , para un mismo  $\gamma^\pm$  y un mismo  $\kappa$  y por otro lado, para un mismo  $\gamma^\pm$  hay una recta en el plano  $(\kappa, \sigma)$  con diferente velocidad de fase para cada  $m$ . Ambas cosas representadas en la Fig.2.

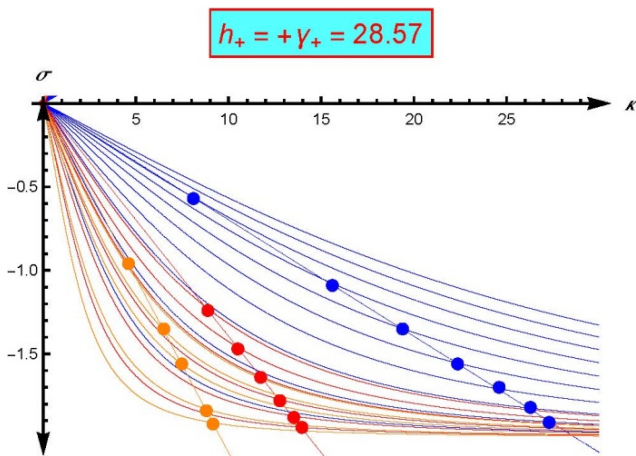


FIG. 2: los puntos sobre las rectas representan modos helicoidales. Los puntos azules corresponden a  $m=1$  con,  $v_{ph\pm} = -0.07$ , los rojos a  $m=2$  con,  $v_{ph\pm} = -0.14$ , y los naranjas a  $m=3$  con  $v_{ph\pm} = -0.28$ .

## V. TRANSPORTE DE MOMENTO ANGULAR DE LA ONDA

Una de las ventajas de la clasificación de las ondas es la de facilitar la visualización de las propiedades que implica. Aparte de su propiedad central que es la dependencia de su velocidad de fase con  $m$ , para un mismo autovalor, vamos a ilustrar esto con el estudio del transporte de momento angular de la onda promediado temporalmente en un período, a través de la sección del tubo, utilizando como parámetros a la constante de la hélice y la velocidad de fase definida en 13.

Para ello tomamos

$$L_z = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \langle v_{Bz} v_{B\phi} \rangle r dr d\phi \quad (14)$$

con  $\langle \rangle = \frac{\int_0^T \langle \rangle dt}{T}$  promedio temporal en un período  $T$  de la onda. Además, se toma la parte real de la velocidad  $\mathbf{v}_B(r) = \hat{\mathbf{v}}_{B_s}(r) e^{i(m\phi - \sigma t)}$  con  $\hat{\mathbf{v}}_{B_s}(r) = (f_s(r), g_s(r), h_s(r))$ , usando las expresiones 9 - 11 que se expresan en función de  $v_{phs}$  usando 13. La expresión resultante es entonces

$$\begin{aligned} L_z &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} f_s(r, v_{ph}, \kappa) h_s(r, v_{ph}, \kappa) \langle \sin(m\phi - \sigma t)^2 \rangle r dr d\phi \\ &= \\ &= \pi \int_0^1 f_s(r, v_{ph}, \kappa) h_s(r, v_{ph}, \kappa) r dr d\phi \end{aligned} \quad (15)$$

De esta forma, para los modos representados en la Fig. 2, podemos obtener  $L_z$  para cada  $m, s$  y  $v_{ph\pm}$ . En la Fig. 3 representamos  $L_z$  para  $m = 1, 2, 3, s = +$  y  $s = -$  las velocidades de fase indicadas.

## VI. CONCLUSIONES

Algunas de las conclusiones son:

- I. A diferencia del caso general no axisimétrico, no helicoidal en el que una única velocidad de fase define la clasificación de modos no interactuantes, para todos los números azimutales  $m$ , en el caso con simetría helicoidal, son posibles diferentes velocidades de fase siguiendo la fórmula  $v_{ph}(m) = m v_{ph}(m=1)$ , siempre que esta última corresponda a una onda que satisfaga las condiciones de contorno. Es decir que el autovalor se elige tomando  $\gamma^\pm = \mp \frac{2}{v_{ph\pm}(m=1)}$  y las velocidades de fase para los demás números azimutales correspondientes a dicho autovalor se obtienen según la fórmula indicada previamente. Podríamos decir que la simetría helicoidal *separa* los modos azimutales que antes se encontraban en una misma recta correspondiente a una misma velocidad de fase, en rectas diferentes con velocidades de fase diferentes tal como se observa en la Fig.2.
- II. Un método para obtener los modos correspondientes a cada velocidad de fase, es la intersección de la recta  $\sigma^s = -s v_{ph} \kappa$  con las curvas que surgen de la ec. 12 que anula la velocidad radial en el tubo (2),

- III. salvo para los modos  $(m, \kappa, \sigma, L_z) = (1, 0.52, -0.07, 0.78)$  y  $(m, \kappa, \sigma, L_z) = (3, 0.37, -0.21, 0.76)$  para los cuales  $L_z$  es positivo, los restantes modos tienen  $L_z$  negativo y para un mismo  $m$  existe un mínimo de  $L_z$  entre  $\kappa = 0$  y  $\kappa_{max}$ . Como se observa en la Fig.3, el  $\kappa_{max}$  son decrecientes con relación a  $m$ ,
- IV. para un  $m$  dado, las coordenadas  $(\kappa, L_{z_{min}})$  son las mismas para las frecuencias positivas y negativas y se van desplazando en el orden de las décimas de estos valores para los demás modos del mismo  $m$ , volviendo a coincidir en  $(\kappa_{max}, 0)$  para  $L_z = 0$ .
- V. Las velocidades según  $\phi$  son prácticamente coincidentes para cada  $m$  cuando  $s = +$  ó  $s = -$  para los valores de  $\kappa$  que se corresponden entre las dos helicidades (correspondencia dada por el orden de aparición de los modos y que dan  $\kappa$  aproximados), mientras que las velocidades según  $z$  son opuestas para un mismo  $m$  para cada signo. Sin embargo para el FB, el balance de la integral 15, para los valores de  $\kappa$  correspondientes a cada helicidad, da siempre negativo, salvo para los modos señalados en el inciso III, para los cuales  $L_z$  es positivo.

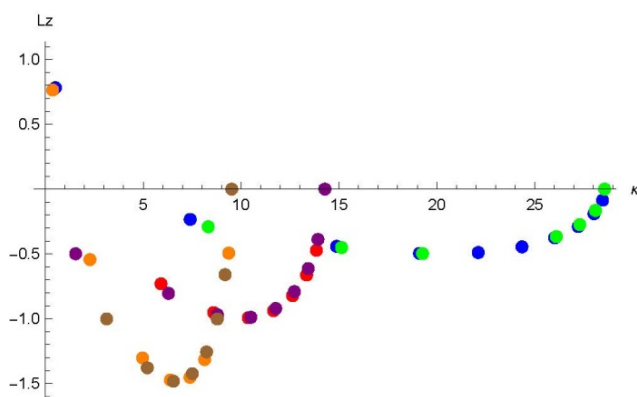


FIG. 3: Flujos de momento angular de las ondas. Los puntos azules, rojos y naranja, corresponden a  $m=1$ ,  $v_{ph+} = -0.07$ ;  $m=2$ -  $v_{ph+} = -0.14$ , y  $m=3$ -  $v_{ph+} = -0.28$  respectivamente. Los puntos verdes, lila y marrón, corresponden a  $m=1$ ,  $v_{ph-} = -0.07$ ,  $m=2$ ,  $v_{ph-} = -0.14$ , y  $m=3$ ,  $v_{ph-} = -0.28$ .

## REFERENCIAS

- [1] R. González. Dynamics of non-axisymmetric Beltrami flows. *Physics of Fluids* **26** (nov. de 2014). ISSN: 1089-7666. <http://dx.doi.org/10.1063/1.4901971>.
- [2] *Anales AFA* **33** (ago. de 2022). ISSN: 1850-1168. <http://dx.doi.org/10.31527/analesafa.2022.fluidos.1>.
- [3] R. González, G. Sarasua y C. D. Vigh. Dynamical property and triadic interaction of Beltrami-type rotating waves. *Physics of Fluids* **35** (ago. de 2023). ISSN: 1089-7666. <http://dx.doi.org/10.1063/5.0158922>.
- [4] R. González, G. Sarasua y A. Costa. Kelvin waves with helical Beltrami flow structure. *Physics of Fluids* **20** (feb. de 2008). ISSN: 1089-7666. <http://dx.doi.org/10.1063/1.2840196>.

- [5] R. González, A. Costa y E. S. Santini. On a variational principle for Beltrami flows. *Physics of Fluids* **22** (jul. de 2010). ISSN: 1089-7666. <http://dx.doi.org/10.1063/1.3460297>.
- [6] R. González y E. S. Santini. The dynamics of beltramized flows and its relation with the Kelvin waves. *Journal of Physics: Conference Series* **296**, 012024 (mayo de 2011). ISSN: 1742-6596. <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/296/1/012024>.
- [7] D. G. Dritschel. Generalized helical Beltrami flows in hydrodynamics and magnetohydrodynamics. *Journal of Fluid Mechanics* **222**, 525 (ene. de 1991). ISSN: 1469-7645. <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112091001209>.