

PROPIEDAD DINÁMICA DE ONDAS ALFVÉNICO-INERCIALES. BIFURCACIÓN DE FRECUENCIA CERO ENTRE ESTADOS ESTACIONARIOS ALFVÉNICOS PUROS

DYNAMICAL PROPERTY OF ALFVENIC-INERTIAL WAVES. ZERO FREQUENCY BIFURCATION BETWEEN PURE ALFVENIC STEADY STATES

R. González^{*1,3}, C. D. Vigh^{2,3,4} y F. Kenig¹

¹Universidad Nacional de General Sarmiento, Instituto de Desarrollo Humano
Juan M. Gutierrez 1150, Los Polvorines – (1613) Buenos Aires – Argentina

² Universidad Nacional de General Sarmiento, Instituto de Ciencias
Juan M. Gutierrez 1150, Los Polvorines – (1613) Buenos Aires – Argentina

³Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de Física, Buenos Aires
Buenos Aires, C1428EGA – Argentina

⁴CONICET-Universidad de Buenos Aires, Instituto de Física Interdisciplinaria y aplicada (INFINA), Buenos Aires
Buenos Aires, C1428EGA – Argentina

Recibido: 06/03/2026 ; Aceptado: 28/08/2026

En este trabajo se analiza la existencia de la Propiedad Dinámica de los flujos de Beltrami [1-7] en Magnetohidrodinámica (MHD) [1, 5, 6]. Se encuentra que para un equilibrio MHD en rotación rígida y con un campo magnético azimutal $B_0 = \xi \Omega_0 r \phi$ con $\xi = Q_0/\Omega$, las perturbaciones beltramizadas y alineadas $\mathbf{b} = c\mathbf{v}$, cumplen una dinámica de onda viajera, si los factores de alineamiento ξ y c cumplen una condición de consistencia que neutralice los efectos de la *shear* azimutal. Se encuentra una contracción de frecuencias con respecto al espectro inercial puro y un desdoblamiento Zeeman clásico. En esas condiciones, cuando $\xi = 1$, se produce una bifurcación de frecuencia cero, entre dos estados alfvénicos, puros, el segundo de mayor complejidad y auto organizado durante un proceso de relajación a dicho estado de energía mínima global.

Palabras Clave: Ondas viajeras alfvénico-inerciales, perturbaciones beltramizadas, propiedad dinámica, estados de alfvén puros, contracción de frecuencias, bifurcación de frecuencia cero, relación de consistencia..

This paper analyzes the existence of the Dynamic Property of Beltrami flows [1-7] in Magnetohydrodynamics (MHD) [1, 5, 6]. It is found that for an MHD equilibrium in rigid rotation and with an azimuthal magnetic field $B_0 = \xi \Omega_0 r \phi$ with $\xi = Q_0/\Omega$, beltramized and aligned perturbations $\mathbf{b} = c\mathbf{v}$ follow a traveling wave dynamics if the alignment factors ξ and c satisfy a consistency condition that neutralizes the effects of azimuthal shear. A frequency contraction with respect to the pure inertial spectrum and a classical Zeeman splitting are found. Under these conditions, when $\xi = 1$, a zero-frequency bifurcation occurs between two pure Alfvén states, the second of which is more complex and self-organized, during a relaxation process to that state of minimum global energy.

Keywords: Alfvén-inertial traveling waves, Beltramized perturbations, dynamic property, pure Alfvén states, frequency contraction, zero frequency bifurcation, consistency relation.

<https://doi.org/10.31527/analesafa.2026.37.3.61-68>



ISSN - 1850-1168 (online)

I. INTRODUCCIÓN

En fluidos neutros se ha desarrollado el concepto de la propiedad dinámica de los flujos de Beltrami (PDFB) (González [1]) que se cumple en aquellos flujos que cumplen que:

1. su vorticidad es paralela a la velocidad $\boldsymbol{\omega}_B = \pm \gamma^\pm \mathbf{v}_B$
2. tiene una dinámica de onda progresiva y es posible realizar una clasificación de estas ondas en relación con el autovalor $\gamma^\pm$ que se expresa en función de la velocidad de fase de la onda.

Esta clasificación organiza a las ondas entre las que tienen igual autovalor y no intercambian energía o diferente

autovalor que sí la intercambian y de esta forma facilita el estudio de las propiedades del flujo.

Ya hemos estudiado algunas de estas propiedades desde antes de descubrir la PDFB y en la actualidad [1-6] tomando diferentes geometrías y simetrías. El flujo de Beltrami resulta ser el estado final estacionario de un proceso de relajación turbulenta, bajo la restricción de la conservación de invariantes ideales como la helicidad cinética, la magnética y la cruzada, que minimiza las respectivas energías sujetas a dichos invariantes [8-12]. Pero cuando se perturba un flujo en rotación uniforme incompresible, se produce una beltramización [1-3] de la perturbación, que resulta del hecho de que en el sistema rotante fijo al flujo estacionario, se da el mismo proceso de minimización. De esta forma se obtiene un flujo de Beltrami no estacionario, cuya dinámica es la de una onda progresiva o viajera. En MHD es conocido

*rgonzale@campus.ungs.edu.ar

también este estado de equilibrio de Beltrami con flujo, resultante de un proceso de relajación turbulenta [7, 8, 10, 12] en el que se da una paralelización del campo magnético con la velocidad. En particular el estudio de flujos de Beltrami (FB) con simetría helicoidal en un tubo infinito, fue realizado en un artículo pionero por Dritschel [7] aplicado tanto a hidrodinámica (HD) como a MHD en el que se postula una paralelización entre el campo magnético y la velocidad del fluido, a partir de una configuración magnética de equilibrio basada en la analogía del tipo $\boldsymbol{\omega} \leftrightarrow \mathbf{j}, \mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{v}$. De esta forma, es factible postular que las perturbaciones de estos campos, no sólo estarán beltramizados, sino que serán paralelos, de tal forma, que las fuerzas giroscópicas de Coriolis y de Lorentz, se vuelven semejantes y aportan cada una a las oscilaciones alfvénico-inerciales, cuyas condiciones de existencia e interacción estudiamos aquí.

Las preguntas son varias. Dritschel sostiene que hay una dinámica de onda rotante con “corrimiento de frecuencia” con respecto al fluido neutro: ¿se produce sin simetría helicoidal? ¿qué tipo de corrimiento es? ¿Qué características tiene la interacción entre el campo magnético y la rotación? ¿hay nuevos estados de equilibrio? En ese caso ¿son estables? Evidentemente, dada esta interacción, las ondas no serán sólo inerciales ni sólo alfvénicas, sino alfvénico-inerciales y Dritschel [7] nos adelantó su existencia y la propiedad del corrimiento de frecuencia.

Nosotros hemos estudiado la beltramización y su dinámica, en HD, en una expansión entre dos tubos, enfocando en la cuestión de la estabilidad [2]. En el trabajo del 2014 [1] generalizamos el estudio a flujos de Beltrami no axisimétricos y mostramos que el flujo de Beltrami helicoidal se podía obtener como un caso particular del mismo.

Como ya hemos reseñado en un trabajo previo [2] los flujos tipo Beltrami, aparecen principalmente, en fenómenos de flujos en rotación rígida que se perturban, en fenómenos atmosféricos, en MHD y fenómenos solares y astrofísicos, en el estudio de la turbulencia y en aplicaciones tecnológicas en turbo maquinaria y máquinas de fusión con confinamiento magnético. Por ello su investigación y los posibles resultados, tienen una amplia e importante gama de aplicaciones.

En la sección II, repasamos la Propiedad Dinámica de los FB. En la sección III, establecemos el flujo básico que perturbamos con perturbaciones tipo Beltrami y campo alineado y establecemos las condiciones de posibilidad de ondas alfvénico-inerciales no axisimétricas para dicho equilibrio. En la sección IV estudiamos los modos alfvénico-inerciales en un cilindro infinito. En la sección V, mostramos que hay una bifurcación entre dos estados alfvénicos puros ($\mathbf{B} = \mathbf{v}$ en unidades alfvénicas) Y la peculiaridad de que esta bifurcación no se produce por inestabilidad del equilibrio, sino por la anulación de la frecuencia de oscilación, debido a las múltiples restricciones geométricas y topológicas, debidas a las condiciones de existencia de las ondas y a los invariantes dinámicos del flujo MHD.

II. PROPIEDAD DINÁMICA DE LOS FLUJOS DE BELTRAMI EN FLUIDOS NEUTROS

La *propiedad dinámica* (González[1]), consiste en que los FB generados por rotación ($\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{z}$), cumplen una ecuación de onda rotante progresiva o viajera (ORP), en el sistema rotante, que es una solución exacta de las ecuaciones de Euler, con las siguientes características

$$\nabla \times \mathbf{v}_B = \pm \gamma^\pm \mathbf{v}_B \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_B}{\partial t} = \pm \frac{2\Omega}{\gamma^\pm} \frac{\partial \mathbf{v}_B}{\partial z} \quad (2)$$

en la que $\gamma(k)^\pm$ depende de la *configuración* i.e de su geometría, de su simetría y de sus condiciones de contorno. De forma tal que, la combinación de dos FB $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{B_1} + \mathbf{v}_{B_2}$ con igual $\gamma^\pm$, es también un FB con el mismo autovalor. En efecto

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (\mathbf{v}_{B_1} + \mathbf{v}_{B_2}) \\ &= \pm \gamma^\pm (\mathbf{v}_{B_1} + \mathbf{v}_{B_2}) = \pm \gamma^\pm \mathbf{v} \end{aligned} \quad (3)$$

Por lo tanto, en la ecuación de momentos de Euler el término no lineal $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} = 0$ y esto significa que no hay transferencia de energía entre ambos FB. Esta característica permite clasificar los FB a partir de la igualdad o diferencia de los autovalores γ , autovalor, que se convierte así, en un *autovalor clasificador*. Por eso, en las configuraciones que estudiamos, establecemos, a partir de trabajos previos [1-6] qué son los autovalores γ y que forma adquiere la relación de dispersión resultante al especificarlo en la misma.

III. DINÁMICA ALFVÉNICO-INERCIAL

En el marco de la MHD ideal e incompresible consideramos las ecuaciones para $\mathbf{u}$ y $\tilde{\mathbf{B}}$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + \tilde{\mathbf{B}} \times \mathbf{j} = -\nabla \pi \quad (4)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial t} + \nabla \times (\tilde{\mathbf{B}} \times \mathbf{u}) = 0 \quad (5)$$

con $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ y $\mathbf{j} = \nabla \times \tilde{\mathbf{B}}$ tomando las variables definidas por Dritschel [7] expresada en unidades de la velocidad de alfvén, con la velocidad de Alfvén .

$$V_A = \frac{B_0}{\sqrt{\rho \mu_0}}$$

En primer lugar consideramos el siguiente equilibrio MHD estacionario que consiste en una rotación rígida y un campo azimutal

$$\mathbf{V}_0 = \Omega_0 r \boldsymbol{\phi}, \mathbf{B}_0 = Q_0 r \boldsymbol{\phi} \quad (6)$$

Ahora realizamos la perturbación del equilibrio estacionario, definiendo perturbaciones beltramizadas con alineamiento de la velocidad y el campo magnético:

$$\mathbf{u} = \Omega_0 r \boldsymbol{\phi} + \mathbf{v}, \tilde{\mathbf{B}} = Q_0 r \boldsymbol{\phi} + \mathbf{b} \quad (7)$$

donde $\mathbf{v}$ cumple 1 y que,

$$\mathbf{b} = c \mathbf{v} \quad (8)$$

entonces

$$\nabla \times \mathbf{b} = c \nabla \times \mathbf{v} = \pm \gamma^\pm c \mathbf{v} = \pm \gamma^\pm \mathbf{b} \quad (9)$$

Donde se usó la ec. 1. Y luego

$$\boldsymbol{\omega} \rightarrow 2\Omega_0 \hat{\mathbf{z}} \pm \gamma^\pm \mathbf{v}, \mathbf{j} \rightarrow 2Q_0 \hat{\mathbf{z}} \pm \gamma^\pm \mathbf{b} \quad (10)$$

La colinealidad entre la perturbación del campo magnético y la perturbación de la velocidad del fluido y las condiciones de Beltramización constituyen el “alineamiento de Chandrasekhar-Kendal [13]” y fue planteada por primera vez por Chandrasekhar [14] con respecto al alineamiento que lleva a la equipartición de energía y al trabajo de la obtención de las autofunciones del rotor de Chandrasekhar-Kendal [13] que resultan en configuraciones dinámicas estables [13, 14]. Luego tomando el rotor de la ecuación de momentos y reemplazando en la ecuación resultante y en la ec. 5, las condiciones expresadas por las ecs. (6)–(10), resultan:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \pm \frac{2\Omega}{\gamma^\pm} \nabla \times (\mathbf{z} \times \mathbf{v}) + \Omega(1 - c \frac{Q_0}{\Omega}) \nabla \times (\mathbf{v} \times r\boldsymbol{\phi}) \\ \pm \frac{Q_0 c}{\gamma^\pm} \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{z}) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = (\Omega - \frac{Q_0}{c}) \nabla \times (\mathbf{v} \times r\boldsymbol{\phi}) = 0 \quad (12)$$

Para encontrar la onda viajera que cumpla con la propiedad dinámica, debemos elegir c de forma que se cancelen entre sí los términos que contienen al versor $\boldsymbol{\phi}$, que expresa el shear azimutal, para lo cual sumamos las dos últimas ecuaciones miembro a miembro, e igualem a 0 la suma de estos términos, resultando que,

$$\Omega - \frac{Q_0}{c} + \Omega - c, Q_0 = 0 \quad (13)$$

cuyas raíces son con

$$c^\pm = \frac{1}{\xi} [1 \pm \sqrt{1 - \xi^2}], \xi = \frac{Q_0}{\Omega} \quad (14)$$

así la ec. 14 constituye una *relación de consistencia*, que posibilita la estructura de perturbaciones tipo beltrami de velocidad y de campo magnético alineados. Y, reemplazando en la suma de las ecuaciones el valor de c obtenemos cuatro ecuaciones que resultan de combinar los signos $\pm$ del autovalor $\gamma^\pm$ por un lado y los del coeficiente $c^\pm$ por el otro y podemos sintetizar así:

resulta

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \pm \frac{\Omega - c^\pm Q_0}{\gamma^\pm} \nabla \times (\mathbf{z} \times \mathbf{v}) = 0 \quad (15)$$

IV. ONDAS ALFVÉNICO-INERCIALES PROGRESIVAS NO AXISIMÉTRICAS EN UN TUBO INFINITO

Tomando en cuenta la combinación de signos de $\gamma^\pm$ y $c^\pm$, tenemos cuatro ecuaciones que corresponderán a cuatro ramas de ondas alfvénico-inerciales. Utilizando las ecs. 14

y 15 y expandiendo las cuatro posibilidades, llegamos a las cuatro ecuaciones de ondas progresivas que expresan a la Propiedad Dinámica [1]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \pm^{(1)} \mp^{(2)} \frac{\Omega}{\gamma^{\pm(1)}} \sqrt{1 - \xi^2} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \quad (16)$$

Donde $\pm^{(1)}$ y $\pm^{(2)}$ son los doble signos correspondientes a los autovalores $\gamma^\pm$ y a los coeficientes de proporcionalidad $c^\pm$ respectivamente, ecuación que a su vez depende del parámetro $\xi = \frac{Q_0}{\Omega}$, que expresa la relación entre la intensidad de campo y la velocidad de equilibrio:

$$\mathbf{B}_0 = Q_0 r \boldsymbol{\phi} = \xi \Omega r \boldsymbol{\phi} = \xi \mathbf{V}_0 \quad (17)$$

de forma que la velocidad y el campo magnético de equilibrio están alineados, pero con el coeficiente ξ , mientras que el alineamiento de las perturbaciones tiene coeficiente de proporcionalidad c . La relación de consistencia 14 impone así un *vínculo geométrico* entre el equilibrio y las perturbaciones.

Desarrollando la velocidad en una base en coordenadas cilíndricas de Chandrasekhar-Kendal [15]

$$\mathbf{v} = C \hat{\mathbf{v}}_B e^{i(kz + m\phi)} e^{i\sigma^{\pm(1)\pm(2)} t} + cc \quad (18)$$

con $\hat{\mathbf{v}}_B(r) = (f_s(r), g_s(r), h_s(r))$, siendo $f_s(r), g_s(r), h_s(r)$, las componentes según r, ϕ y z .

$$f_s = i \left[\frac{m}{r} J_m(\mu_s r) + s \frac{\mu_s k}{\gamma_s} J'_m(\mu_s r) \right], \quad (19)$$

$$g_s = \left[-\mu_s J'_m(\mu_s r) - s \frac{mk}{r \gamma_s} J_m(\mu_s r) \right], \quad (20)$$

$$h_s = s \frac{\mu_s^2}{\gamma_s} J_m(\mu_s r), \quad (21)$$

donde $\mu_s^2 = \gamma_s^2 - k^2$ y $s = \pm$ es el signo de la helicidad de la onda, definida como $s \gamma_s$.

Las ecs. 16 y 18 nos dan las relaciones de dispersión adimensionalizadas de estas ondas con sus cuatro combinaciones de signo

$$\sigma^{\pm(1)\pm(2)} = \pm^{(1)} \mp^{(2)} \frac{1}{\gamma^{\pm(1)}} \sqrt{1 - \xi^2} k \quad (22)$$

Vemos que, en relación con las ondas inerciales puras, en la ec. 22 no aparece el factor 2 que figura en la relación de dispersión de la onda inercial pura sin campo magnético y las frecuencias no son mayores a 1 en valor absoluto. Para un ξ dado, hay dos ramas de frecuencias para cada $\gamma^{\pm(1)}$ que son simétricas con respecto al eje k . Por otro lado, la frecuencia está modulada por el factor $\sqrt{1 - \xi^2}$. Dejando fija a Ω , analizaremos el tipo de ondas resultante al variar Q_0 . Cuando $Q_0 = \Omega$ y entonces $c = 1$ y tenemos un estado alfvénico puro de *equilibrio estacionario dinámico* con las líneas de campo rotando con Ω . Hay equipartición de energía cinética y magnética de las perturbaciones. Para este valor de c , toda la estructura MHD de Beltrami rota con el fluido para todos los modos posibles del flujo dados por m ,

k y el signo de la helicidad. Cuando Q_0 disminuye, aparecen las ondas viajeras. En primer lugar, al fijar distintos Q_0 , tendremos diferentes regiones que le corresponden de la relación de dispersión. Parametricémoslas con ξ , las ondas serán posibles si $0 < \xi \leq 1$. La *propiedad dinámica* implica dos aspectos: una dinámica de onda progresiva y la no interacción entre modos con igual autovalor γ . Pero de la ec. 22 deducimos que

$$v_{ph}^{\pm(1)\pm(2)} = \pm^{(1)} \mp^{(2)} \frac{1}{\gamma^{\pm(1)}} \sqrt{1 - \xi^2} \quad (23)$$

de modo que para ξ y γ dados, queda definida una velocidad de fase de los diferentes modos de la onda. Debe quedar claro que fijar un ξ es fijar el equilibrio MHD dado en la ec. 6 y definir la alineación de la velocidad y el campo en la ec. 17. Luego fijar un γ , para dicho equilibrio, es fijar la velocidad de fase de los modos, o recíprocamente a la velocidad de fase de una onda le corresponde un γ dado por 23. No tiene sentido hablar de interacción de ondas con diferentes ξ , puesto que representan equilibrios de base diferentes. Estos modos, por otro lado, se obtienen al despejar γ de la ec. 22 y reemplazarla en la ec. 19, que al igualarla a 0 establece la condición de contorno de anulación de la velocidad radial en la pared del tubo:

$$mJ_m(\mu^\pm) \pm \frac{\mu^\pm k}{\gamma_s} J'_m(\mu^\pm) = 0 \quad (24)$$

lo que completará la determinación de la estructura espacial del flujo y del campo.

Si elegimos, por ejemplo, $\gamma^\pm = 40$, combinado con los tres valores de $\xi = 0.99, 0.6, 0^+$, para las ramas $c^\pm$, obtenemos las relaciones de dispersión global representadas en la Fig. 1, para los modos $m = 0, 1, 2$. En primer lugar, tomamos la velocidad de fase correspondiente a cada parámetro $v_{ph}^{++} = -0.0035, -0.020, -0.025$, respectivamente. Para estos valores, dibujamos las tres rectas que representan a la relación de dispersión local dada por la ec. 22. La intersección de estas rectas, con las curvas que surgen de combinar a la relación de dispersión local con la condición de contorno nos dan los modos discretizados correspondientes a esta configuración, para dichos parámetros.

Por otro lado, para los mismos valores de ξ , pero para la rama c^- , resultan las curvas simétricas con respecto a k de frecuencias positiva y velocidades de fase positivas de igual valor absoluto que las de las frecuencias negativas. Así, la primera propiedad que encontramos en esta investigación, en torno a las ondas alfvénico-inerciales, es el *desdoblamiento* del espectro de frecuencias con respecto al espectro correspondiente a ondas inerciales sin campo magnético, lo que es un efecto Zeeman clásico, pero en este caso, además, en ramas simétricas, correspondientes a c^+ y c^- , lo que implican ondas progresivas contra rotantes y co rotantes.

Una segunda propiedad, es que se produce una contracción de frecuencias, a medida que ξ crece. Dritschel[7], que estudia esta configuración de base con alineamiento de las perturbaciones beltramizadas de campo magnético y velocidad, pero con simetría helicoidal, habla de corrimiento de frecuencias, pero no especifica qué tipo de corrimiento. Mientras que en el caso HD sin campo magnético (Fig.2)

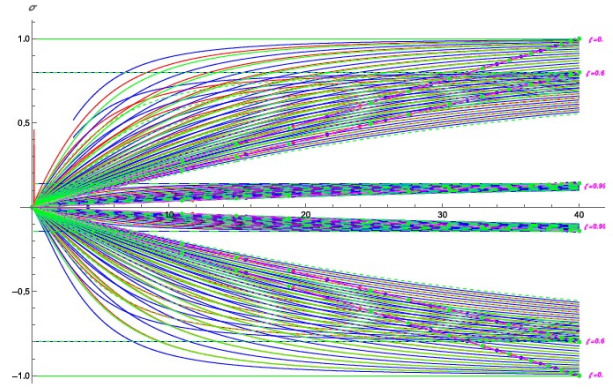


FIG. 1: Relaciones de dispersión local (rectas) y global (curvas), correspondientes a $\gamma^+ = 40$, c^+ (frecuencia negativa) y c^- (frecuencias positivas) para $m = 0$ (verde), $m = 1$ (azul), $m = 2$ (rojo), $\xi = 0.99$ (rectas interiores), $\xi = 0.6$ (rectas intermedias), $\xi = 0$ (rectas más externas).

las frecuencias de las ondas en el cilindro varían en el rango $(-2,2)$ [1], aquí varían en el rango $(-1,1)$. Pero, además, si tomamos las regiones de curvas alrededor de las rectas correspondientes a las tres velocidades de fase, constatamos gráficamente esta contracción de frecuencias, cumpliéndose además que $\sigma \rightarrow 0$ a medida que $\xi \rightarrow 1$. Vemos como las frecuencias “amontonan” sobre el eje k aumentando la “densidad de líneas” para $\xi = 0.99$. Todas las líneas “colapsan” para $\xi = 1$ en $\sigma = 0$.

Los *estados alfvénicos* cumplen en general que $\mathbf{b} = c\mathbf{v}$, y son estados *alfvénicos* puros cuando $c = 1$. En nuestro caso, ocurre cuando $\xi = 1$ y entonces $Q_0 = \Omega$, $c = 1$ y $\mathbf{b} = \mathbf{v}$. Luego, las perturbaciones tipo Beltrami alcanzan un estado estacionario, que se suma al del flujo base inicial y constituye un *nuevo estado estacionario* que es alfvénico puro. Es decir, hay una bifurcación entre un estado estacionario que es el flujo base con ξ como parámetro de control y un estado estacionario que es la suma del flujo base más un beltrami estacionario justo cuando $\xi = 1$.

Este es, probablemente, uno de los resultados más interesantes de este artículo, e intentaremos dar un cuadro completo del proceso dinámico de relajación a este estado estacionario, mediante la *propiedad dinámica*, articulada con los principios variacionales [8-15] y las evidencias de relajación turbulenta MHD tendiente al alineamiento de las perturbaciones de campo magnético y velocidad[8, 12, 13].

Con respecto a la *propiedad dinámica*, en primer lugar, por qué tiene una dinámica de onda progresiva? El hecho de ser un flujo de Beltrami, implica la eliminación de la no linealidad y por lo tanto una ecuación dinámica lineal, expresada en la base de Chandrasekhar-Kendal [14, 15] que es una base de auto funciones del rotor, del tipo 18 siempre que la *geometría* y la *simetría* de la configuración y las *condiciones de contorno*, sean adecuadas. No hay beltramización para cualquier geometría, simetría o condición de contorno, debe analizarse cada caso. Pero dada una configuración tipo Beltrami, la tenemos en dos estados posibles: estacionario o con una dinámica de ondas viajeras. En nuestro caso tanto para el flujo como para el campo. Además, la *relación de consistencia* 14 constituye una condición geométrica, que vincula al equilibrio base con las perturbaciones beltrami-

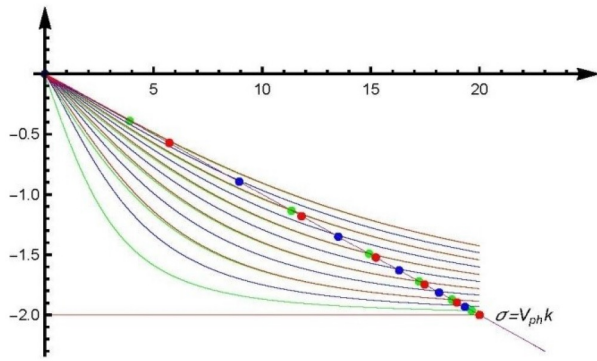


FIG. 2: Puntos representando flujos tipo Beltrami, para $a = 1$. los puntos verdes corresponden a $m = 0$, los azules a $m = 1$ y los rojos a $m = 2$.

zadas, estando estas últimas, en su estado estacionario o en su estado dinámico de onda viajera, como las dos únicas posibilidades. La relación de consistencia, es condición de posibilidad de existencia de la beltramización, al desacoplar la componente axial de la azimutal. Por otro lado, en ondas inerciales puras, las rectas de velocidad de fase constante dependen exclusivamente del autovalor que decrece a medida que γ aumenta y viceversa, habiendo una infinidad de ondas viajeras para todos los γ . En cambio, aquí, eligiendo cualquier γ , la frecuencia y la velocidad de fase decrecen a medida que $\xi \rightarrow 1$. Hay un *forzamiento* causado por el valor de ξ sobre el espectro, que se “comprime” sobre el eje k debido a la relación de consistencia, y la cantidad de ondas viajeras va disminuyendo en la misma proporción.

Las curvas de la relación de dispersión global (condición de contorno) no dependen de γ pero sí de ξ .

Una vez fijado ξ , se elige un equilibrio del flujo base, y con él, una familia de curvas en una región del plano $\sigma - k$. Ahora fijando un γ para dicho ξ , queda definida la velocidad de fase (ec. 23 y por lo tanto la pendiente de la recta, que al cortar a las curvas, da los modos correspondientes a dicho equilibrio. Es lo que ocurre en la Fig. 1, para $\gamma = 40$, en la que los modos así obtenidos no interactúan entre sí por tener el mismo γ . Para obtener modos con γ de valores diferentes en dicho equilibrio, hay que cambiar la pendiente de la recta, en la región de curvas correspondientes, y los nuevos puntos de intersección serán modos con un autovalor diferente al inicial. Entonces, estos nuevos modos, sí podrán interactuar con los primeros [6] y eventualmente producir procesos de cascadas. De esta forma, los modos que pueden interactuar, son aquellos que pertenecen a rectas diferentes, dentro de la región de curvas correspondientes a un equilibrio dado parametrizado por ξ . Esta es la explicación derivada de la *propiedad dinámica* para este caso.

V. BIFURCACIÓN DE FRECUENCIA 0 ENTRE ESTADOS ESTACIONARIOS ALFVÉNICOS PUROS

Tenemos una familia de estados estacionarios parametrizados por ξ , que en este trabajo cumple la condición $0 < \xi \leq 1$. Suponiendo que ξ cambia desde valores cercanos a 0, y aumenta hasta alcanzar el valor $\xi = 1$, los equilibrios van cambiando y soportan ondas viajeras beltrami-

zadas, cuyas frecuencias para un γ y un k dados, dependen de ξ de la forma indicada en la ec. 22 es decir que, la frecuencia se puede expresar de la forma

$$\sigma(i, \xi) = \kappa(i) \sqrt{1 - \xi^2} \quad (25)$$

donde i es un número natural que indica la rama que se considera, en este caso va de 1 a 4. Observamos los siguientes puntos;

1. si $\xi \neq 1$ entonces $\sigma(i, \xi) \neq 0$
2. $\sigma(i, 1) = 0$
3. como $0 < \xi \leq 1$ la frecuencia es siempre real y varía suavemente con ξ

Como observamos en la Fig. 1, si variamos desde valores cercanos a 0 y en forma creciente, vamos pasando de regiones ricas en ondas viajeras, a regiones en las que va disminuyendo esta cantidad a medida que ξ aumenta, y las curvas de la relación de dispersión se van cerrando y “amon-tonando” sobre el eje k . Asimismo, las ondas viajeras van disminuyendo cada vez más su velocidad de fase y su energía, decreciendo la energía cinética y aumentando la magnética. Los correspondientes equilibrios de base “conviven” con menos viajeras.

Por otro lado, como ya lo señalamos, tanto los equilibrios de base como las perturbaciones son estados alfvénicos, pues cumplen con las ecuaciones de paralelización del campo magnético y la velocidad, ec. 8 y ec. 17, con coeficientes c y ξ respectivamente, que están vinculados por la relación de consistencia. Inicialmente para $\xi \rightarrow 0$, $c^+ \rightarrow \infty$, de modo que podríamos decir que inicialmente esos estados de alfvén están “desincronizados”, aunque $\xi c^+ \rightarrow 2$ y $\xi c^- \rightarrow 0$ cuando $\xi \rightarrow 0$. Cuando $\xi = 1$ entonces $c = 1$, y por un lado, por la condición 2 señalada arriba, la frecuencia se anula y la perturbación se vuelve estacionaria y “se congela” en el flujo del equilibrio base. Pero al mismo tiempo tanto el equilibrio base, como el Beltrami estacionario, constituyen un *estado alfvénico puro*. Es decir que se produjo una *bifurcación de frecuencia 0*, desde un estado estacionario alfvénico puro representado por el flujo base para $\xi = 1$ a un nuevo estado estacionario alfvénico puro que es la superposición del primero, con el Beltrami estacionario con $\xi = 1$. Y en ese punto se produce una “sincronización” entre ambos equilibrios, con equipartición de energía cinética y magnética, alcanzado un estado absoluto de mínima energía y por lo tanto muy estable. Se pasó de un estado alfvénico puro con alta simetría, a otro alfvénico puro más complejo en un proceso que podríamos considerar como auto organizado. Lo sorprendente de esta bifurcación es que no se genera por la desestabilización de un equilibrio al variar un parámetro de control, en este caso ξ , sino porque las condiciones de alineamiento, van apagando las ondas viajeras, en su camino de relajación hacia el mínimo absoluto, hasta que se detienen en el flujo de equilibrio base cuando se alcanza este último. Y es una bifurcación de *ondas viajeras* a estado estacionario alfvénico puro.

VI. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Es posible dar un cuadro dinámico global de esta bifurcación de frecuencia 0, comenzando por la evidencia de procesos de relajación MHD que en una primera etapa producen alineamientos de velocidad y campo magnético mediante procesos de cascada turbulentos [8, 10, 12, 13, 16]. Esto inicia un proceso de relajación hacia un estado de equilibrio alfvénico puro siempre que la helicidad cruzada

$$H_c = \int \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} d^3V \quad (26)$$

sea un invariante de movimiento [8, 10, 12, 13, 16]. Si además se dan las conservaciones de las helicidades magnética

$$H_m = \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} d^3V \quad (27)$$

y cinética,

$$H_k = \int \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega} d^3V \quad (28)$$

durante dicho proceso relajatorio hacia un estado alfvénico puro global [8, 10, 12, 13, 16], habrán estados de mínimos de energía locales y parciales, que beltramizarán a las perturbaciones de campo magnético y de velocidad, lo que nos conduce al esquema de partida de este trabajo, haber considerado perturbaciones beltramizadas y alineadas que son *estados de alfvén*, pero no puros, sino de relajación hacia un *estado de alfvén puro* correspondiente al mínimo de energía global. La conservación de las tres helicidades, son una condición necesaria para la existencia de las perturbaciones beltramizadas y de la alineación velocidad-campo.

Por la propiedad dinámica [1, 6] sabemos que la dinámica de dichas perturbaciones es la de ondas viajeras, con una relación de dispersión lineal, en la que la velocidad de fase tiene una relación inversamente proporcional con el autovalor γ . Luego la geometría y las condiciones de contorno, determinarán los modos correspondientes a dicha configuración y la forma de relajamiento al estado estacionario global, si este es posible. Dependerá de estos factores si la frecuencia podrá tomar algún valor complejo y producirse desestabilización. Si no se produce inestabilidad, la llegada a un estado estacionario, implica necesariamente, la anulación de la frecuencia de las perturbaciones, por lo que las perturbaciones que no se extinguieron, alcanzan su nivel de energía total es decir cinética más magnética, mínimo global, y por su condición de estado alfvénico puro, hay equipartición de energía cinética y magnética.

Este es el cuadro dinámico general del proceso de relajación al equilibrio en el contexto de perturbaciones beltramizadas con alineamiento de velocidad y campo magnético. Veamos como se aplica al caso del equilibrio específico que tratamos aquí. La particularidad es que el equilibrio de base, que depende del parámetro ξ que expresa la relación entre la intensidad del campo y la velocidad angular, es a su vez, el coeficiente de alineamiento de la velocidad y el campo de equilibrio (ec.17). Por otro lado, las perturbaciones tienen un factor de alineamiento c (ec. 8), pero ambos factores están ligados por la ecuación de consistencia ec. 14 que es necesaria para eliminar la parte azimutal de las ecuaciones de momento e inducción, con la particularidad de que cuan-

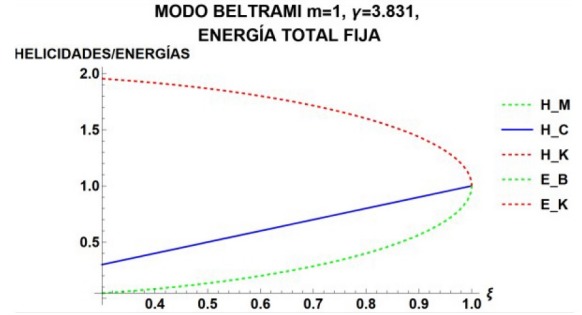


FIG. 3: helicidades, magnética (M), Cruzada (C) y Cinética (K) y Energías Magnética (B) y Cinética (K), de la perturbación beltramizada, correspondiente al modo $m = 1$, $\gamma = 3.831$ en función de ξ , para la rama $c^+ > 1$, todas normalizadas con sus respectivos valores en $\xi = 1$.

do $\xi = 1$ entonces $c = 1$. Luego se dan dos situaciones

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b} = \xi \mathbf{V}_0 + c \mathbf{v} \neq \mathbf{V}_0 + \mathbf{v} \quad \text{si } 0 < \xi < 1 \quad (29)$$

Es decir que si $\xi \neq 1$, velocidad y campo total no son iguales, no hay estado alfvénico puro. Y en cambio

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b} = \xi \mathbf{V}_0 + c \mathbf{v} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{v} \quad \text{si } \xi = 1 \quad (30)$$

Con lo cual, cuando $\xi = 1$ tenemos la superposición de dos estados alfvénicos puros, que es, a su vez, alfvénico puro. Por eso, el parámetro ξ se convierte en parámetro de control de un proceso de bifurcación de equilibrios, como ya explicamos, que culmina en un estado alfvénico global de equilibrio, cuando las frecuencias de las perturbaciones se anulan, y se alcanza el nivel de energía mínima global. Por lo tanto, este proceso de bifurcaciones, coincide con el proceso de relajación definido por los principios variacionales mencionados antes. En efecto, en las Figs. 3 y 4

se representan las helicidades y las energías, para el modo beltramizado $m = 1$ y $\gamma = 3.81$, para las ramas c^+ y c^- respectivamente. En ambos casos verificamos que la helicidad cruzada H_c alcanza un máximo, en el estado de alfvén puro de mínima energía de esta perturbación, mientras que las energías cinética y magnética son equipartidas. La diferencia que se observa es que, para $c^+ > 1$ la energía cinética de la perturbación es siempre mayor a la magnética hasta llegar a la equipartición, mientras que en el caso $c^- < 1$ es la magnética la que domina todo el proceso hasta llegar al equilibrio global.

Por otro lado, corroboramos que, al ser, tanto el equilibrio base, como el perturbado, alfvénicos puros en $\xi = 1$, alcanzan en ese momento su mínima energía y por lo tanto el equilibrio final, que es la superposición de ambos, tendrá energía mínima, también. De modo que, para $\xi = 1$, el equilibrio base se convierte en estado alfvénico puro y al mismo tiempo “se dispara” la bifurcación hacia un nuevo estado de equilibrio, también alfvénico puro. Es en este aspecto que la igualdad $c[\xi = 1] = 1$ “sincroniza” los estados alfvénicos puros. Se pasa del estado alfvénico puro del equilibrio base a un nuevo equilibrio que es la suma del primero más el estado estacionario alcanzado por las perturbaciones, más complejo y auto organizado. Es muy estable, porque ni bien nos apartamos un poco del equilibrio, lo que

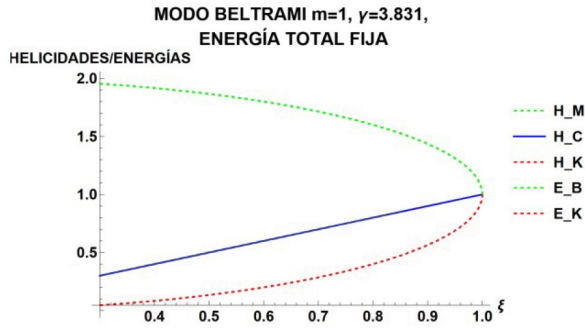


FIG. 4: helicidad, magnética (M), Cruzada (C) y Cinética (K) y Energías Magnética (B) y Cinética (K), de la perturbación beltramizada, correspondiente al modo $m = 1$, $\gamma = 3.831$, en función de ξ , para la rama $c^- < 1$, todas normalizadas con sus respectivos valores en $\xi = 1$.

hay es un equilibrio base no alfvénico puro, rodeado de ondas viajeras, que tenderán a relajar nuevamente al mínimo global.

Sin embargo, esto ocurre sólo para el rango $0 < \xi \leq 1$; si $\xi > 1$, c se vuelve imaginario, e introduce un factor en la frecuencia que va a producir una inestabilidad. Como se ve, la existencia de ondas viajeras, de equilibrio alfvénico o la inestabilidad, dependen del parámetro ξ . Y lo continuaremos estudiando en próximos trabajos.

Podemos hacer una síntesis de los principales resultados:

(i) Se produce una contracción de frecuencias debido a que la inducción magnética “se opone” a la inercia generada por la rotación que arrastra a las líneas de campo, cuanto mayor es ξ más intenso es el campo para producir este frenado y viceversa. El caso extremo se da en $\xi = 1$ en que las oscilaciones “se apagan” y se vuelven estacionarias. Por otro el desdoblamiento de frecuencias se debe a que hay dos grados de libertad en la alineación para producir ondas co-rotantes y contra-rotantes.

(ii) al ser las perturbaciones beltramizadas, se cumple la *propiedad dinámica* en MHD, por la cual la forma dinámica de existencia de las mismas es a través de ondas viajeras que “conviven” con el equilibrio de base, mientras transiciona al estado estacionario.

(iii) se está produciendo una relajación, que este trabajo asume ya en su forma alineada, pero que, de acuerdo a los teoremas variacionales comentados, evoluciona hacia un mínimo de energía global, que es un *estado alfvénico puro global*.

(iv) dado que el equilibrio base depende del parámetro ξ , relacionado con la intensidad magnética, se verifica que este actúa como un parámetro de control de un proceso de bifurcación que, cuando $0 < \xi < 1$, produce diferentes equilibrios de base con factor de alineamiento ξ rodeado de ondas viajeras beltramizadas, con factor de alineamiento c , alineamientos desincronizados. Cuando $\xi = 1$ entonces $c = 1$ y los respectivos alineamientos se sincronizan, y se produce una bifurcación del estado estacionario del flujo base, ahora en estado de alfvén puro, hacia un nuevo equilibrio, que es la suma del de equilibrio, más la perturbación beltramizada que alcanzó también su estado alfvénico puro. Este nuevo equilibrio es, él mismo alfvénico puro, por lo que la bifurcación se da entre dos estados alfvénicos puros, pero

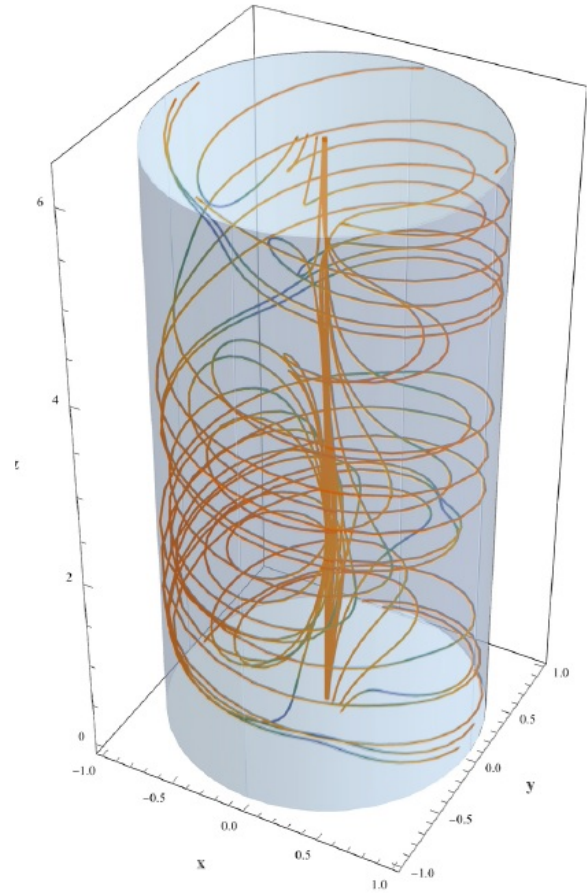


FIG. 5: líneas de campo magnético, estacionario sobre un fluido que rota rigidamente, correspondiente al modo $m = 1$, $\gamma = 3.831$, del campo beltramizado. Degradado “Rainbow”. El valor 0 es el azul y el 1 es rojo el más intenso.

el segundo es más complejo y auto organizado. La bifurcación se produjo no por inestabilidad, sino por anulación de frecuencia. Es una bifurcación de ondas viajeras a estado estacionario, en sentido opuesto a lo que pasa en una bifurcación de Hopf.

(v) cuando $\xi > 1$, la frecuencia se volverá imaginaria pura, generando una inestabilidad de este flujo, cuyas implicancias se estudiarán próximamente.

En síntesis, la propuesta de relajación sigue la secuencia: relajación turbulenta $\rightarrow$ alineación dinámica velocidad-campo y beltramización de perturbaciones, que, en su forma dinámica, es de ondas viajeras (Propiedad Dinámica) $\rightarrow$ Estado de Alfvén, Mínimo de energía global y en este caso bifurcación entre estados alfvénicos puros cuando $\xi = 1 \rightarrow$ posterior desestabilización si $\xi > 1$. Es importante señalar que las soluciones son de amplitud finita, pues las soluciones obtenidas, son soluciones exactas, de las ecuaciones MHD linealizadas por beltramización y alineamiento.

Finalmente, mostramos un gráfico de un campo magnético en el estado estacionario de Alfvén puro, en la Fig. 5.

VII. AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Nacional de General Sarmiento y al Departamento de Física de la Facultad de Ciencias Exactas de la UBA, y al INFINA (UBA-CONICET)-

Los autores dedican este trabajo a la memoria de Daniel

REFERENCIAS

- [1] R. González. Dynamics of non-axisymmetric Beltrami flows. *Physics of Fluids* **26**, 114104 (nov. de 2014). ISSN: 1070-6631. eprint: https://pubs.aip.org/aip/pof/article-pdf/doi/10.1063/1.4901971/16089710/114104_1_online.pdf. <https://doi.org/10.1063/1.4901971>.
- [2] R. González, G. Sarasua y A. Costa. Kelvin waves with helical Beltrami flow structure. *Physics of Fluids* **20**, 024106 (feb. de 2008). ISSN: 1070-6631. eprint: https://pubs.aip.org/aip/pof/article-pdf/doi/10.1063/1.2840196/16139601/024106_1_online.pdf. <https://doi.org/10.1063/1.2840196>.
- [3] R. González, A. Costa y E. S. Santini. On a variational principle for Beltrami flows. *Physics of Fluids* **22**, 074102 (jul. de 2010). ISSN: 1070-6631. eprint: https://pubs.aip.org/aip/pof/article-pdf/doi/10.1063/1.3460297/15913657/074102_1_online.pdf. <https://doi.org/10.1063/1.3460297>.
- [4] R. González y E. S. Santini. The dynamics of beltrami-ized flows and its relation with the Kelvin waves. *Journal of Physics: Conference Series* **296**, 012024 (2011).
- [5] R. González. Clasificación dinámica de flujos de Beltrami. *Anales AFA* **33**. XVI Meeting on Recent Advances of Physics of Fluids and its Applications, 1-5 (2022). <https://doi.org>.
- [6] R. González, G. Sarasua y C. D. Vigh. Dynamical property and triadic interaction of Beltrami-type rotating waves. *Physics of Fluids* **35**, 084108 (ago. de 2023). ISSN: 1070-6631. eprint: https://pubs.aip.org/aip/pof/article-pdf/doi/10.1063/5.0158922/18080177/084108_1_5.0158922.pdf. <https://doi.org/10.1063/5.0158922>.
- [7] D. G. Dritschel. Generalized helical Beltrami flows in hydrodynamics and magnetohydrodynamics. *Journal of Fluid Mechanics* **222**, 525-541 (1991).
- [8] S. Servidio, W. H. Matthaeus y P. Dmitruk. Depression of Nonlinearity in Decaying Isotropic MHD Turbulence. *Phys. Rev. Lett.* **100**, 095005 (mar. de 2008). <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.100.095005>.
- [9] L. Woltjer. A theorem on force-free magnetic-fields. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **44**, 489-491 (1958). eprint: <https://www.pnas.org/doi/pdf/10.1073/pnas.44.6.489>. <https://www.pnas.org/doi/abs/10.1073/pnas.44.6.489>.
- [10] L. Woltjer. ON HYDROMAGNETIC EQUILIBRIUM. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **44**, 833-841 (1958). eprint: <https://www.pnas.org/doi/pdf/10.1073/pnas.44.9.833>. <https://www.pnas.org/doi/abs/10.1073/pnas.44.9.833>.
- [11] H. K. Moffatt. The degree of knottedness of tangled vortex lines. *Journal of Fluid Mechanics* **35**, 117-129 (1969).
- [12] D. Biskamp. *Nonlinear Magnetohydrodynamics* ISBN: 978-0-521-59970-2. <https://www.cambridge.org/core/books/nonlinear-magnetohydrodynamics/1637E455D91F2FB4B073D492861D8B98> (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).
- [13] S. Chandrasekhar y P. C. Kendall. On Force-Free Magnetic Fields. *The Astrophysical Journal* **126**, 457-460 (1957). <http://harvard.edu>.
- [14] S. Chandrasekhar. On the stability of the simplest solution of the equations of hydromagnetics. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **42**, 273-276 (1956). eprint: <https://www.pnas.org/doi/pdf/10.1073/pnas.42.5.273>. <https://www.pnas.org/doi/abs/10.1073/pnas.42.5.273>.
- [15] Z. Yoshida. Eigenfunction expansions associated with the curl derivatives in cylindrical geometries: Completeness of Chandrasekhar-Kendall eigenfunctions. *Journal of Mathematical Physics* **33**, 1252-1256 (abr. de 1992). ISSN: 0022-2488. eprint: https://pubs.aip.org/aip/jmp/article-pdf/33/4/1252/19120129/1252_1_online.pdf. <https://doi.org/10.1063/1.529703>.
- [16] W. H. Matthaeus, A. Pouquet, P. D. Mininni, P. Dmitruk y B. Breech. Rapid Alignment of Velocity and Magnetic Field in Magnetohydrodynamic Turbulence. *Phys. Rev. Lett.* **100**, 085003 (2008). <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.100.085003>.